§ 2-5 Στάσιμα κύματα

"Το στάσιμο κύμα δεν είναι κύμα αλλά μία ιδιόμορφη ταλάντωση του μέσου"

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο ομοίων Α.Κ που διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο κατά μήκος της ίδιας ευθείας αλλά με αντίθετες κατευθύνσεις.

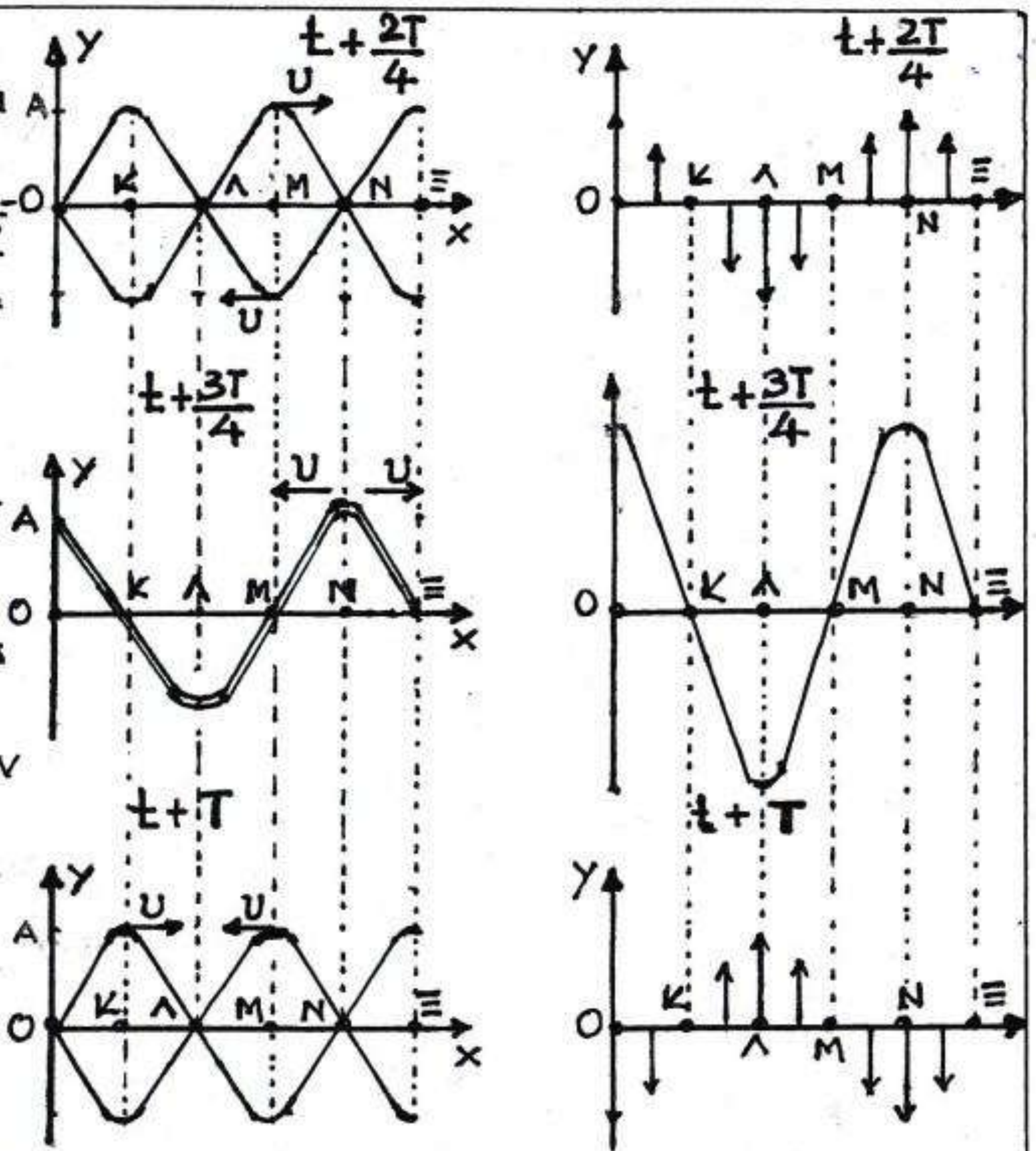
Στη μελέτη των στάσιμων κυμάτων που ακολουθεί θεωρούμε – όπως και στο σχολικό βιβλίο – ότι τα δύο Α.Κ είναι εγκάρσια, οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων του μέσου λόγω των διαδιδόμενων κυμάτων γίνονται στο ίδιο επίπεδο, και το ελαστικό μέσο είναι γραμμικό, π.χ μία χορδή μουσικού οργάνου.

Δημιουργία στάσιμου κύματος

Παρατηρώντας το ελαστικό μέσο στο οποίο δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, για ένα χρονικό διάστημα, Δt, **θα διαπιστώσουμε ότι:**

α. υπάρχουν θέσεις του μέσου – **οι δεσμοί** – στις οποίες

τα επιμέρους κύματα είναι συνέχεια σε αντίθεση φάσης με συνέπεια τα υλικά σημεία του μέσου στις θέσεις αυτές να παραμένουν διαρκώς ακίνητα _ θέσεις Κ, Μ, Ξ _,



Β. υπάρχουν θέσεις του μέσου _ οι κοιλίες _ όπου τα επιμέρους κύματα βρίσκονται συνέχεια σε συμφωνία φάσης με συνέπεια τα υλικά σημεία του μέσου στις θέσεις αυτές να ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος 2Α _ θέσεις Ο, Λ, Ν _ οι οποίες βρίσκονται στο μέσο της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών,

Γ. στις υπόλοιπες θέσεις του μέσου, δηλαδή στις θέσεις μεταξύ των δεσμών και των κοιλιών, τα υλικά σημεία ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα _ τη συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων που βρίσκονται στις κοιλίες _ και πλάτος μεταξύ 0 και 2Α.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος

Έστω ότι σε γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδεται, κατά τη θετική κατεύθυνση x'x, αρμονικό κύμα που περιγράφεται με την εξίσωση, $\underline{y_1 = A ημ 2π(t/T - x/λ)}$.

Ένα όμοιο αρμονικό κύμα που διαδίδεται στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσο προς την αντίθετη κατεύθυνση **xx'** θα περιγράφεται με την εξίσωση,

$\underline{y_2 = A ημ 2π(t/T + x/λ)}$.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων η απομάκρυνση ενός υλικού σημείου Μ του μέσου διάδοσης, που βρίσκεται στη θέση **x**, τη χρονική στιγμή **t**, θα είναι

$$y = y_1 + y_2 \longrightarrow$$

$$y = A[ημ 2π(t/T - x/λ) + ημ 2π(t/T + x/λ)] \longrightarrow$$

$$\boxed{y = 2A\, συν(2πx/λ) \cdot ημ(2πt/T)} \quad (1).$$

Στη σχέση (1) ο όρος $\underline{A' = 2A συν(2πx/λ)}$ $\underline{(2)}$ εξαρτάται μόνο από τη θέση x του υλικού σημείου Μ και παραμένει σταθερός με το χρόνο ενώ η ποσότητα $\underline{φ' = 2πt/T \ (3)}$ έχει διαστάσεις γωνίας.

Έτσι, η (1) γράφεται $\underline{y = A' ημ φ' \ (4)}$.

Επομένως,

αν $A' > 0 \longrightarrow |A'| = A' \xrightarrow{(4)} y = |A'| ημ φ$, όπου $φ = φ' = 2πt/T$, ενώ

αν $A' < 0 \longrightarrow |A'| = -A' \longrightarrow A' = -|A'| \xrightarrow{(4)}$
$y = -|A'| ημ φ' \longrightarrow y = |A'| ημ(φ' + π) \longrightarrow$
$y = |A'| ημ φ$, όπου $φ = φ' + π = 2πt/T + π$.

Επομένως, η (1) γράφεται τελικά

$\boxed{y = |A'| ημ φ}$ (5), όπου $φ = 2πt/T$ ή $φ = 2πt/T + π$.

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι η κίνηση κάθε υλικού σημείου του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι Α.Α.Τ με πλάτος **|A'|** και φάση φ που εξαρτάται τόσο από την ποσότητα $φ' = 2πt/T$ όσο και από το πρόσημο της ποσότητας $A' = 2A συν 2πx/λ$.

Παρατηρήσεις

1. Η σχέση (5) επιβεβαιώνει την ύπαρξη δεσμών – θέσεων όπου τα υλικά σημεία του μέσου παραμένουν συνεχώς ακίνητα – θέσεις x όπου $|A'|=0$ – και κοιλιών – θέσεων όπου τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος – θέσεις x όπου $|A'|=2A$ –.

2. Στη σχέση (5) για $x=0$ είναι $|A'|=2A$.
Συνεπώς στη σχέση **(1)** το σύμβολο **x** παριστάνει τη θέση ενός υλικού σημείου του μέσου αν ως αρχή των συντεταγμένων, έστω **O**, θεωρήσουμε τη θέση μιας κοιλίας.

3. Στη σχέση (1) ως αρχή για τη μέτρηση του χρόνου – ως χρονική στιγμή $t_0=0$ – θεωρούμε μία χρονική στιγμή όπου για το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση O – αρχή των συντεταγμένων – ισχύει ότι $y=0$ και $\upsilon>0$, δηλαδή ότι το εν λόγω υλικό σημείο βρίσκεται, λόγω ταλάντωσης, στη Θ.Ι του και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση.

Προσοχή

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η συμβολή έχει αρχίσει πριν από άγνωστο χρονικό διάστημα, δηλαδή θεωρούμε ότι υφίσταται στάσιμο κύμα σε όλη την έκταση του άξονα συμβολής, οπότε και δεν έχει νόημα να μιλάμε για περιοχή συμβολής.

Αν όμως θεωρήσουμε ως χρονική στιγμή μηδέν τη χρονική στιγμή που τα δύο κύματα αρχίζουν να συμβάλλουν στην αρχή **O** – που φτάνουν στην αρχή O – των συντεταγμένων καθώς διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις και η αρχή **O** έχει επιλεχθεί έτσι ώστε η κίνηση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση O να περιγράφεται, λόγω των επιμέρους κυμάτων, από τις εξισώσεις $y_1=A\eta\mu 2\pi t/T$ και $y_2=$ $=A\eta\mu 2\pi t/T$, δηλαδή με την εξίσωση

$y = 2A\eta\mu 2\pi t/T$ λόγω της συμβολής των κυμάτων, τότε στάσιμο κύμα υπάρχει στην περιοχή συμβολής που είναι η περιοχή του άξονα διάδοσης $x0x'$ στην οποία υπάρχουν και τα δύο κύματα.

Τη χρονική στιγμή t η περιοχή συμβολής εκτείνεται από τη θέση $x_1 = -\upsilon t$ έως τη θέση $x_2 = \upsilon t$, ενώ έξω από την περιοχή συμβολής υπάρχει κάθε κύμα μόνο του.

4. Από τη σχέση (5) καταλαβαίνουμε ότι η απομάκρυνση y, λόγω του όρου $\eta\mu\phi$, όπου $\phi = 2\pi t/T$ ή $\phi = 2\pi t/T + \pi$, που είναι ανεξάρτητος από τη συντεταγμένη x, μηδενίζεται και μεγιστοποιείται την ίδια χρονική στιγμή για όλα τα υλικά σημεία του μέσου στην περιοχή συμβολής ανεξάρτητα ποιά είναι η θέση του καθενός.

Αυτό σημαίνει ότι όλα τα υλικά σημεία του μέσου στην περιοχή όπου έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους — $\eta\mu\phi = 0 \leftrightarrow y = 0$ — και από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους — $\eta\mu\phi = \pm 1 \leftrightarrow y = \pm A$ — <u>ταυτόχρονα</u>.

5. Εφόσον για τη κίνηση, λόγω ταλάντωσης, ενός υλικού σημείου στην περιοχή του μέσου όπου έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα ισχύει ότι $y = |A'|\eta\mu\phi$, όπου $\phi = 2\pi t/T$ ή $\phi' = 2\pi t/T + \pi$, δύο οποιαδήποτε υλικά σημεία στην περιοχή συμβολής μπορεί να είναι μόνο συμφασικά — $\Delta\phi = 0$ — ή αντιφασικά — $\Delta\phi = \pi$ — μεταξύ τους.

Η διαφορά φάσης — 0 ή π rad — εξαρτάται από το πρόσημο του όρου $\sigma\upsilon\nu 2\pi x/\lambda$ για το καθένα από τα υλικά σημεία.

Έτσι, αν οι δύο όροι $\sigma\upsilon\nu 2\pi x_1/\lambda$ και $\sigma\upsilon\nu 2\pi x_2/\lambda$ που αντιστοιχούν σε δύο υλικά σημεία x_1 και x_2 είναι:

α. <u>ομόσημοι</u>, τότε τα υλικά σημεία στις θέσεις x_1 και x_2 είναι <u>συμφασικά _ $\Delta\phi=0$ _</u>.

β. <u>ετερόσημοι</u>, τα υλικά σημεία στις θέσεις x_1 και x_2 είναι <u>αντιφασικά _ $\Delta\phi=\pi$ _</u>.

Όμως, το πρόσημο του όρου συν$2\pi x/\lambda$ αλλάζει μετά από κάθε μηδενισμό του που συμβαίνει στις θέσεις όπου υπάρχουν δεσμοί.

Επομένως, τα υλικά σημεία του μέσου μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών, είναι συμφασικά _ φάση $\phi=\phi'$ ή $\phi=\phi'+\pi$, οπότε $\Delta\phi=0$ _, ενώ τα υλικά σημεία του μέσου εκατέρωθεν ενός δεσμού είναι αντιφασικά _ $\Delta\phi=\pi$ _.

Γενικότερα, όταν μεταξύ δύο υλικών σημείων του μέσου υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών, τα υλικά σημεία είναι συμφασικά, ενώ όταν υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών, είναι αντιφασικά.

6. <u>Προσοχή</u>.

Στην περίπτωση που θέλουμε ως αρχή των αξόνων να θεωρήσουμε ένα σημείο όπου υπάρχει δεσμός η σχέση **(1)** χρειάζεται τροποποίηση ώστε, για $x=0$ να δίνει δεσμό.

Τότε η **(1)** γράφεται

$$\underline{y = 2A\,\text{συν}(2\pi x/\lambda+\pi/2)\cdot \text{ημ}(2\pi t/T)}.$$

7. α. <u>Οι **δεσμοί** του στάσιμου κύματος</u> δημιουργούνται στα υλικά σημεία που βρίσκονται σε θέση **x** τέτοια ώστε

$$|A'|=0 \longrightarrow$$

$$A'=2A\,\text{συν}\,2\pi x/\lambda=0 \longrightarrow$$

$$2\pi x/\lambda=(2k+1)\pi/2 \longrightarrow$$

$$\boxed{x=(2k+1)\lambda/4}\ , \text{ όπου } k=0,\pm1,\pm2\ldots$$

ή $\boxed{|x|=(2k+1)\lambda/4}$, όπου $k=0.1.2\ldots$.

β. <u>Οι **κοιλίες** του στάσιμου κύματος</u> δημιουργούνται στα υλικά σημεία που βρίσκονται σε θέση X τέτοια ώστε

$|A'| = 2A \longrightarrow$

$A' = 2A συν 2\pi x/\lambda = \pm 2A \longrightarrow$

$συν 2\pi x/\lambda = \pm 1 \longrightarrow$

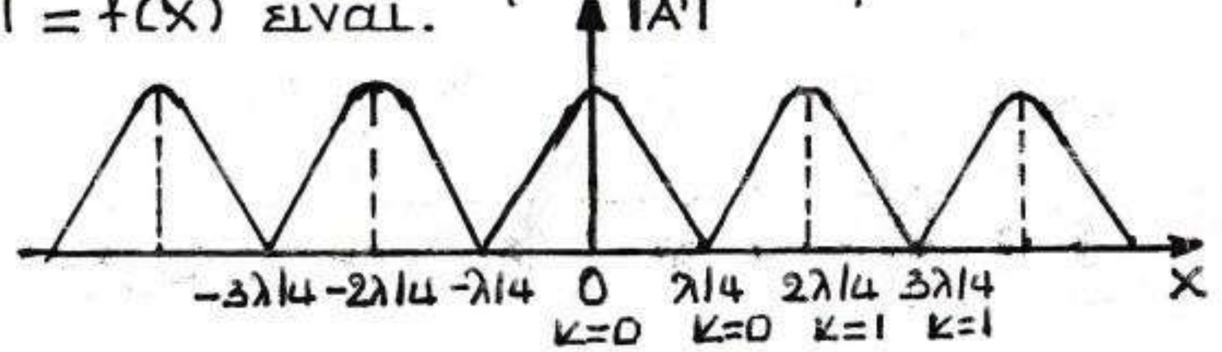
$2\pi x/\lambda = κ\pi \longrightarrow$

$\boxed{x = κ\lambda/2 = 2κ\lambda/4}$, όπου $κ = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

ή $\boxed{|x| = κ\lambda/2 = 2κ\lambda/4}$, όπου $κ = 0, 1, 2 \ldots$

8. Σύμφωνα με τη σχέση $|A'| = 2A|συν 2\pi x/\lambda|$, όταν δημιουργείται στάσιμο κύμα, το πλάτος της ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου του μέσου εξαρτάται από τη θέση του x.

Επομένως, η γραφική παράσταση της $|A'| = f(x)$ είναι.



9. <u>Σε ένα στάσιμο κύμα, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών, είναι ίση με το μισό του μήκους κύματος λ των ομοίων Α.Κ από τη συμβολή των οποίων προήλθε το στάσιμο κύμα.</u>

<u>Απόδειξη.</u>

Σε ένα στάσιμο κύμα δεσμούς έχουμε στα υλικά σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέση X τέτοια ώστε να είναι $|x| = (2κ+1)\lambda/4$, $κ = 0, 1, 2 \ldots$, όπου λ το μ.κ των Α.Κ που συμβάλλουν.

Επομένως, δυο διαδοχικοί δεσμοί θα βρίσ-

κονται σε θέσεις x_1, x_2 τέτοιες ώστε να εί-
ναι $|x_1| = (2\kappa+1)\lambda/4$ και $|x_2| = [2(\kappa+1)+1]\lambda/4$
αντίστοιχα.

Για την απόσταση d μεταξύ δύο διαδοχι-
κών δεσμών επομένως θα είναι

$$d = |x_2| - |x_1| \longrightarrow$$
$$d = [2(\kappa+1)+1]\lambda/4 - (2\kappa+1)\lambda/4 \longrightarrow$$
$$d = (2\kappa+2+1-2\kappa-1)\lambda/4 \longrightarrow$$
$$d = \lambda/2$$

Ομοίως αποδεικνύεται και για την απόσταση d μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών.

10. Σε ένα στάσιμο κύμα η απόσταση ενός δεσμού από την επόμενη κοιλία είναι ίση με $\lambda/4$, όπου λ το μ.κ των ομοίων Α.Κ από τη συμβολή των οποίων προήλθε το στάσιμο κύμα.

Απόδειξη

Σε ένα στάσιμο κύμα δεσμούς και κοιλίες έχουμε στα υλικά σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέση x τέτοια ώστε να ισχύει ότι $|x|=(2\kappa+1)\lambda/4$ για τους δεσμούς και $|x| = \kappa\lambda/2$ για τις κοιλίες όπου $\kappa=0.1.2...$ και λ το μ.κ των Α.Κ που συμβάλλουν.

Εφόσον στην αρχή των συντεταγμένων είναι μία κοιλία αν στη θέση x_1 όπου $|x_1| = (2\kappa+1)\lambda/4$ βρίσκεται ένας δεσμός η επόμενη κοιλία από το δεσμό αυτό θα βρίσκεται στη θέση x_2 όπου $|x_2| = (\kappa+1)\lambda/2$.

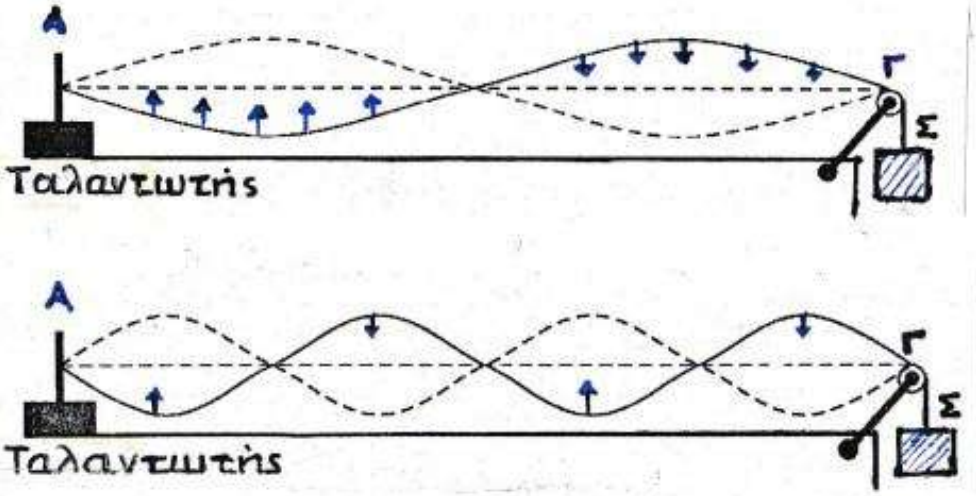
Επομένως, για την απόσταση d ενός δεσμού από την επόμενη κοιλία θα είναι

$$d = |x_2| - |x_1| \longrightarrow$$
$$d = (\kappa+1)\lambda/2 - (2\kappa+1)\lambda/4 \longrightarrow$$
$$d = (2\kappa+2-2\kappa-1)\lambda/4 \longrightarrow$$

$d = \lambda/4$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι για την απόσταση d μίας κοιλίας από τον επόμενο δεσμό είναι $d = \lambda/4$.

Στάσιμα κύματα σε χορδή



Ο ταλαντωτής δημιουργεί τρέχον Α.Κ στη χορδή. Όταν η κυματική διαταραχή συναντήσει το σημείο στήριξης Γ της χορδής, η χορδή ασκεί σ' αυτό δύναμη **F**. Το σημείο στήριξης ασκεί στη χορδή δύναμη **−F**. Η δύναμη **−F** δημιουργεί στη χορδή ένα ανακλώμενο τρέχον Α.Κ που κινείται πρός την αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό.

Έτσι το Α.Κ που δημιουργεί ο ταλαντωτής και το όμοιό του Α.Κ που προκύπτει από την ανάκλαση συμβάλλουν με αποτέλεσμα για **ορισμένες συχνότητες** να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή.

Το υλικό σημείο Γ της χορδής είναι ακίνητο. Στην περίπτωση λοιπόν που δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή:

1. Αν το υλικό σημείο **Α** είναι ελεύθερο το στάσιμο κύμα θα δημιουργηθεί με δεσμό κίνησης στο **Γ** και κοιλία κίνησης στο Α.

Για να δημιουργηθεί όμως στάσιμο κύμα θα πρέπει για το μήκος L της χορδής να ισχύει ότι $L=(2k+1)\lambda/4$, όπου $k=1.2.....$ ο αριθμός των ατράκτων που σχηματίζονται. Άρα $\lambda=4L/(2k+1)$.

Επειδή όμως για δεδομένη χορδή η ταχύτητα διάδοσης υ ενός τρέχοντος κύματος είναι συγκεκριμένη _ $\upsilon=\sqrt{F/\mu}$, όπου F η τάση της χορδής και μ η γραμμική της πυκνότητα _ για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή θα πρέπει οι τιμές της συχνότητας f να είναι συγκεκριμένες _ $\upsilon=\lambda f \leftrightarrow f=\upsilon/\lambda \rightarrow f=\upsilon(2k+1)/4L$ _. Δηλαδή, η δημιουργία στάσιμου κύματος αποτελεί φαινόμενο **<u>συντονισμού</u>**.

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα που δημιουργείται είναι η $\underline{y=2A\text{συν}(2\pi x/\lambda)\text{ημ}(2\pi t/T)}$ (1) $\rightarrow$ $y=A'\text{ημ}(2\pi t/T)$, όπου $A'=2A\text{συν}(2\pi x/\lambda)$.

Στην (1) ως αρχή για τη μέτρηση του χρόνου θεωρείται η χρονική στιγμή που ο ταλαντωτής βρίσκεται στη Θ.Ι του και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ενώ ως αρχή για τη μέτρηση των αποστάσεων _ θέση $x_o=0$ _ η θέση του σημείου Α ή γενικότερα η θέση μιας κοιλίας. Στην (1) για $x=0$ έχουμε κοιλία _ $A'=2A$ _.

2. <u>Αν το υλικό σημείο Α είναι ακίνητο</u> _ όπως, π.χ, συμβαίνει σε μία χορδή μουσικού οργάνου _ το στάσιμο κύμα θα δημιουργηθεί με δεσμό κίνησης στα δύο άκρα Α και Γ.

Για να δημιουργηθεί όμως στάσιμο κύμα θα πρέπει για το μήκος L της χορδής να ισχύει $L=k\lambda/2$ με $k=0,1,2...$ ο αριθμός των ατράκτων που σχηματίζονται.

Και στην περίπτωση αυτή, στάσιμο κύμα δημιουργείται _ για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω _ μόνο για ορισμένες συχνότητες των Α.Κ από τη συμβολή των οποίων προέρχεται το στάσιμο κύμα.

Προσοχή

Στην περίπτωση αυτή, αν ως αρχή για τη μέτρηση των αποστάσεων θέλουμε να πάρουμε το ένα άκρο όπου υπάρχει δεσμός, η σχέση (1) χρειάζεται τροποποίηση ώστε για $x=0$ να δίνει δεσμό. Τότε θα είναι

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda + \pi/2)\,\eta\mu(2\pi t/T).$$

Στάσιμα ηχητικά κύματα σε σωλήνα.

Αν δημιουργηθεί ένα αρμονικό ηχητικό κύμα στο ανοιχτό άκρο ενός σωλήνα, το άλλο άκρο του οποίου είναι κλειστό, το κύμα ανακλάται στο κλειστό άκρο και επιστρέφει.

Από τη συμβολή των δύο κυμάτων _του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου_ είναι δυνατό να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.

Στην περίπτωση που δημιουργηθεί στάσιμο κύμα θα έχουμε δεσμό κίνησης στο κλειστό άκρο και κοιλία κίνησης στο ανοιχτό άκρο του σωλήνα. Επομένως, για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα θα πρέπει για το μήκος L του σωλήνα να ισχύει ότι $L=(2K+1)\lambda/4$, όπου $K=0.1.2...$ ο αριθμός των ατράκτων που σχηματίζονται και λ το μ.κ του τρέχοντος ηχητικού κύματος.

Όταν, μέσα στο σωλήνα, δημιουργηθεί στάσιμο κύμα ο ήχος ακούγεται πιο δυνατά _η ένταση του ήχου γίνεται μέγιστη_.

Παρατήρηση

Οι διάφοροι ήχοι που παράγονται από τα πνευστά μουσικά όργανα οφείλονται στη δημιουργία στάσιμων κυμάτων στον ηχητικό τους σωλήνα.

Ενέργεια και στάσιμα κύματα

Στα στάσιμα κύματα δε μεταφέρεται ενέργεια από ένα σημείο του μέσου σε άλλο διότι,

1. στο στάσιμο κύμα υπάρχουν υλικά σημεία που παραμένουν πάντοτε ακίνητα – οι δεσμοί – με συνέπεια η ενέργεια που είχαν τα επιμέρους κύματα, η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο κύμα, να εγκλωβίζεται ανάμεσα στους δεσμούς – δεν μπορεί να "**περάσει**" από τους δεσμούς που είναι συνέχεια ακίνητοι.

2. στο στάσιμο κύμα η ενέργεια ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου διατηρείται σταθερή αφού είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους της ταλάντωσής του – στο στάσιμο κύμα το πλάτος της ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου είναι σταθερό με τιμές μεταξύ **0** και 2Α –.

Επομένως, σ' ένα στάσιμο κύμα, η ενέργεια παραμένει "**στάσιμη**", παρόλο που εναλλάσσεται μεταξύ της κινητικής ενέργειας – όταν τα υλικά σημεία του μέσου διέρχονται από τη Θ.Ι τους – και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας – όταν τα υλικά σημεία τό μέσου είναι στιγμιαία ακίνητα σε θέση μέγιστης της απομάκρυνσης.

Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω προκύπτει ότι **το** στάσιμο κύμα είναι μία κατάσταση διαφορετική από αυτή που ονομάσαμε κύμα. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για μία ιδιόμορφη ταλάντωση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου.

Το στάσιμο κύμα δεν είναι κύμα.

Α. Ζ[illegible]

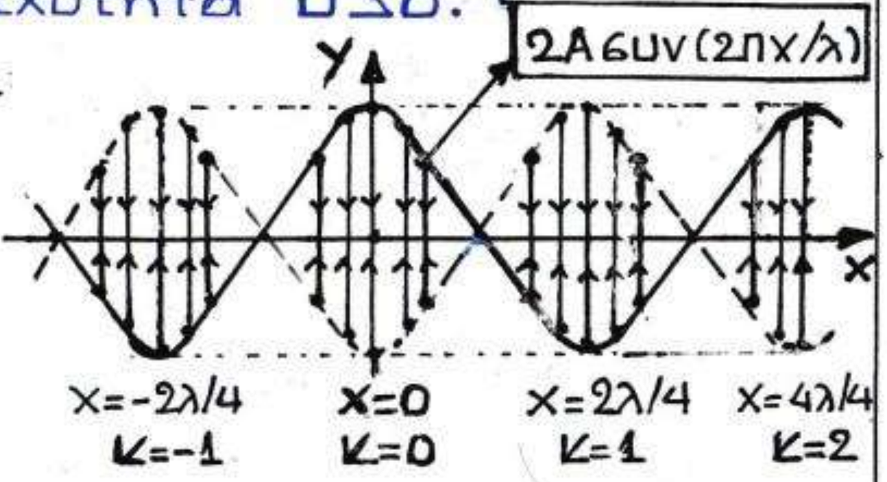
Βασικές παρατηρήσεις
για την επίλυση ασκήσεων

1. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$y = 2A\,συν(2πx/λ) \cdot ημ(2πt/T)$$

ισχύει εφόσον ως αρχή των συντεταγμένων – ως αρχή για τον προσδιορισμό της θέσης x ενός υλικού σημείου – είναι μία κοιλία, – δηλαδή υλικό σημείο του μέσου που, λόγω συμβολής, ταλαντώνεται με πλάτος 2A – η οποία τη χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από τη Θ.Ι της με ταχύτητα υ>0.

Στο διάγραμμα βλέπουμε τις τροχιές, λόγω ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου και τις ατράκτους που δημιουργούνται.



2. Σε ένα στάσιμο κύμα η περιοχή μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ονομάζεται <u>άτρακτος</u> του στάσιμου κύματος.

Σε κάθε άτρακτο υπάρχει και μία κοιλία του στάσιμου κύματος και γι' αυτό το λόγο κάθε άτρακτος χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό κ που προκύπτει από τη σχέση $x = κλ/2 = 2κλ/4$ μέσω της οποίας προσδιορίζουμε τις θέσεις των κοιλιών του στάσιμου κύματος

3. Σε ένα στάσιμο κύμα για να βρούμε τη θέση ενός υλικού σημείου με συγκεκριμένο πλάτος ταλάντωσης λύνουμε την εξίσωση του πλάτους και στη γενική λύση θέτουμε το κ της ατράκτου στην οποία βρίσκεται το υλικό σημείο.

Παράδειγμα

Να βρείτε ποιό είναι η θέση του $5^{ου}$ υλικού σημείου από την αρχή των αξόνων και προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x που έχει πλάτος ίσο με A.

Απάντηση

Σε ένα στάσιμο κύμα ένα υλικό σημείο ταλαντώνεται με πλάτος $|A'| = 2A|συν(2πx/λ)|$.

Εφόσον $|A'| = A \longrightarrow$

$2A\,|συν(2πx/λ)| = A \longrightarrow$

$συν(2πx/λ) = \pm 1/2 \longrightarrow$

$2πx/λ = κπ \pm π/3\ ,\ κ = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Σε κάθε άτρακτο και προς τις δύο κατευθύνσεις από την αρχή των αξόνων υπάρχουν δύο υλικά σημεία με πλάτος ταλάντωσης A εκτός από την άτρακτο με $κ=0$ όπου υπάρχει ένα υλικό σημείο με αυτό το πλάτος πρός κάθε κατεύθυνση.

Επομένως, το $5^{ο}$ υλικό σημείο από την αρχή των αξόνων και προς τη θετική κατεύθυνση θα βρίσκεται στην άτρακτο με $κ=2$. Στην ίδια άτρακτο βρίσκεται επίσης και το $4^{ο}$ υλικό σημείο με πλάτος A.

Για το $5^{ο}$ υλικό σημείο ισχύει ότι
$2πx/λ = 2π + π/3 \longrightarrow x = 7λ/6$.

Για το $4^{ο}$ υλικό σημείο ισχύει ότι
$2πx/λ = 2π - π/3 \longrightarrow x = 5λ/6$.

4. Κάθε υλικό σημείο στην περιοχή συμβολής ενός στάσιμου κύματος εκτελεί Α.Α.Τ και επομένως θα έχει ταχύτητα και επιτάχυνση λόγω ταλάντωσης.

Αν η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι
$y = 2A\,συν(2πx/λ)\,ημ(2πt/T)$

η εξίσωση της ταχύτητας είναι
$\upsilon = 2A\omega\,\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t/T)$, όπου
$\upsilon_0 = 2A\omega|\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)|$.

η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι
$\alpha = -2A\omega^2\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\,\eta\mu(2\pi t/T)$, όπου
$\alpha_0 = 2A\omega^2|\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)|$.

5. Το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος.

Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή t_1 αντικαθιστούμε στην εξίσωση του στάσιμου κύματος την τιμή της συγκεκριμένης χρονικής στιγμής. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το διάγραμμα της $y=f(x)$.

Παράδειγμα

Έστω στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση $y=2A\,\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\,\eta\mu(2\pi t/T)$.

Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 7T/4$.

Να θεωρήσετε ως χρονική στιγμή μηδέν τη χρονική στιγμή που τα δύο κύματα, από τη συμβολή των οποίων δημιουργείται το στάσιμο κύμα, αρχίζουν να συμβάλλουν στην αρχή των αξόνων καθώς διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Απάντηση.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 7T/4$ η περιοχή συμβολής εκτείνεται από τη θέση $x_1 = -\upsilon t_1$ έως τη θέση $x_2 = \upsilon t_1$.

Είναι $\upsilon = \lambda\cdot f = \lambda/T$, οπότε $x_1 = -7\lambda/4$ και $x_2 = 7\lambda/4$.

Είναι $y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T)$ (1).

Για $t = t_1 = 7T/4 \rightarrow \eta\mu(2\pi t/T) = \eta\mu(7\pi/2) = -1$

$\xrightarrow{(1)} y = -2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)$.

Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος

είναι το διάγραμμα της $y=f(x)$ στην οποία $y=-2A\,συν(2\pi x/\lambda)$ (2), όπου $-7\lambda/4 \le x \le 7\lambda/4$.

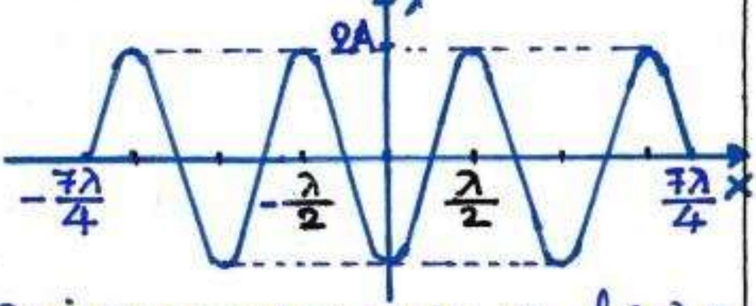
Για $x=0 \xrightarrow{(2)} y=-2A$

$x=\lambda/4 \xrightarrow{(2)} y=0$

$x=2\lambda/4 \xrightarrow{(2)} y=2A$

$x=3\lambda/4 \xrightarrow{(2)} y=0$

$x=\lambda \xrightarrow{(2)} y=-2A$



Στη συνέχεια το διάγραμμα της $y=f(x)$ επαναλαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο.

6. Στην επιφανειακή συμβολή δύο ομοίων Α.Κ που δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ είναι δυνατόν να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από τις Θ.Ι των δύο πηγών.

Αν οι δύο πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα το σημείο συνάντησης των δύο Α.Κ θα είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$.

Στην περίπτωση που δημιουργηθεί στάσιμο κύμα οι κοιλίες του στάσιμου κύματος ταυτίζονται με τα σημεία τομής των γραμμών ενίσχυσης – υπερβολών και μεσοκαθέτου – με το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$. Το ίδιο συμβαίνει με τους δεσμούς και τις υπερβολές απόσβεσης.

Δηλαδή στο μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος δημιουργείται κοιλία του στάσιμου κύματος.

Προαιρετικά

για όσους/όσες θέλουν κάτι περισσότερο.

Άλλες μορφές της εξίσωσης στάσιμου κύματος.

Η γενική μορφή της εξίσωσης που περιγράφει ένα στάσιμο κύμα που δημιουργείται από τη συμβολή δύο ομοίων Α.Κ τα οποία διαδίδονται στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις είναι η

$$y = 2A\text{συν}(2\pi x/\lambda + \phi_o)\cdot\text{ημ}(2\pi t/T + \phi_o') \quad (1),$$

όπου x η θέση ενός υλικού σημείου του μέσου ως προς σύστημα αξόνων με αρχή _θέση $x=0$_ ένα σημείο του μέσου και άξονα $x'x$ που συμπίπτει με τη διεύθυνση διάδοσης των Α.Κ.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι κάθε υλικό σημείο του μέσου εκτελεί Α.Α.Τ με πλάτος $|A'| = 2A|\text{συν}(2\pi x/\lambda + \phi_o)|$ και φάση Φ που εξαρτάται τόσο από τον όρο $\phi' = 2\pi t/T + \phi_o'$ όσο και από το πρόσημο του όρου $A' = 2A\,\text{συν}(2\pi x/\lambda + \phi_o)$.

1. Αν θεωρήσουμε ότι στην αρχή των αξόνων _θέση $x=0$_ υπάρχει κοιλία του στάσιμου κύματος τότε για $x=0$ θα είναι $|A'| = 2A \rightarrow$

$$2A|\text{συν}\,\phi_o| = 2A \rightarrow$$

$$\text{συν}\,\phi_o = \pm 1 \rightarrow$$

$\phi_o = 0$ ή $\phi_o = \pi$ rad, οπότε η (1) γράφεται $y = 2A\text{συν}(2\pi x/\lambda)\,\text{ημ}(2\pi t/T + \phi_o')$ (2)

ή $y = 2A\,\text{συν}(2\pi x/\lambda + \pi)\,\text{ημ}(2\pi t/T + \phi_o') \rightarrow$

$y = -2A\text{συν}(2\pi x/\lambda)\,\text{ημ}(2\pi t/T + \phi_o') \rightarrow$

$y = 2A\text{συν}(2\pi x/\lambda)\,\text{ημ}(2\pi t/T + \phi_o' + \pi)$ (3).

α. Αν ισχύει η σχέση (2) τότε η εξίσωση της Α.Α.Τ που εκτελεί η κοιλία του στάσιμου κύματος που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων είναι $y = 2A\,\text{ημ}(2\pi t/T + \phi_o')$, ενώ η εξίσωση της ταχύτητάς της, λόγω ταλάντωσης, είναι $u = u_o\text{συν}(2\pi t/T + \phi_o')$, όπου $u_o = \omega 2A \rightarrow u_o = 2A\cdot 2\pi/T = 4A\pi/T$.

Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η κοιλία της

αρχής των αξόνων περνάει από τη Θ.Ι της με $\upsilon > 0$ τότε για $t=0$ θα είναι $y=0$ και $\upsilon = +\upsilon_0$, οπότε θα είναι

$$\eta\mu\phi_0' = 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\phi_0' = 1 \longrightarrow$$

$\phi_0' = 0$ rad, οπότε η (2) γράφεται

$$\underline{y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\,\eta\mu(2\pi t/T)}$$

β. Αν ισχύει η σχέση (3) τότε για $x=0 \rightarrow$

$y = 2A\eta\mu(2\pi t/T + \phi_0' + \pi)$, οπότε και

$\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(2\pi t/T + \phi_0' + \pi)$.

Επομένως, αν για $t=0$ είναι $y=0$ και $\upsilon = +\upsilon_0 \longrightarrow$

$$\eta\mu(\phi_0'+\pi) = 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu(\phi_0'+\pi) = 1 \longrightarrow$$

$$\eta\mu\phi_0' = 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\phi_0' = -1 \longrightarrow$$

$\phi_0' = \pi$ rad, οπότε η (3) γράφεται

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\,\eta\mu(2\pi t/T + \pi + \pi) \rightarrow$$

$$\underline{y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\,\eta\mu(2\pi t/T)}$$

Τελικά, στην περίπτωση που ως αρχή των αξόνων θεωρήσουμε σημείο του μέσου όπου υπάρχει κοιλία του στάσιμου κύματος η οποία τη χρονική στιγμή $t=0$ περνάει από τη Θ.Ι της με $\upsilon > 0$ η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι

$$\boxed{y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\,\eta\mu(2\pi t/T)}$$

2. Αν θεωρήσουμε ότι στην αρχή των αξόνων – θέση $x=0$ – υπάρχει κοιλία του στάσιμου κύματος τότε για τις εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας λόγω Α.Α.Τ της εν λόγω κοιλίας, όπως δείξαμε παραπάνω, ισχύει ότι:

α. $y = 2A\eta\mu(2\pi t/T + \phi_0')$ και

$\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(2\pi t/T + \phi_0')$

Επομένως,

αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η κοιλία της αρχής των αξόνων βρίσκεται σε θέση μεγίστης απομάκρυνσης — θέση $y=+2A$ — τότε θα είναι $y=+2A$ και $\upsilon=0$, οπότε

$$\eta\mu\varphi'_o = 1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi'_o = 0 \longrightarrow$$

$$\varphi'_o = \pi/2 \text{ rad} \xrightarrow{(2)}$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T + \pi/2) \longrightarrow$$

$$\underline{y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\sigma\upsilon\nu(2\pi t/T)}$$

β. $y = 2A\eta\mu(2\pi t/T + \varphi'_o + \pi)$ και
$\upsilon = \upsilon_o\sigma\upsilon\nu(2\pi t/T + \varphi'_o + \pi)$.

Επομένως, αν για $t=0$ είναι $y=+2A$ και $\upsilon=0$ θα είναι

$$\eta\mu(\varphi'_o+\pi) = 1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu(\varphi'_o+\pi) = 0 \longrightarrow$$

$$\eta\mu\varphi'_o = -1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi'_o = 0 \longrightarrow$$

$$\varphi'_o = 3\pi/2 \text{ rad} \xrightarrow{(3)}$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T + \pi + 3\pi/2) \longrightarrow$$

$$\underline{y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\sigma\upsilon\nu(2\pi t/T)}$$

Τελικά, αν ως αρχή των αξόνων θεωρήσουμε σημείο του μέσου όπου υπάρχει κοιλία του στάσιμου κύματος η οποία τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης — θέση $y=+2A$ — η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι:

$$\boxed{y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\sigma\upsilon\nu(2\pi t/T)}$$

3. Αν θεωρήσουμε ότι στην αρχή των αξόνων — θέση $x=0$ — υπάρχει δεσμός του στάσιμου κύματος τότε για $x=0$ θα είναι $|A'|=0$

$$\longrightarrow 2A|\sigma\upsilon\nu\varphi_o| = 0 \longrightarrow$$

$\varphi_o = \pi/2$ ή $\varphi_o = 3\pi/2$ rad, οπότε η (1) γράφεται $y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda + \pi/2)\eta\mu(2\pi t/T + \varphi'_o)$

$$\longrightarrow y = -2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T + \varphi'_o) \longrightarrow$$

$$\underline{y = 2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T + \varphi'_o + \pi)} \quad (4).$$

ή $y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda + 3\pi/2)\eta\mu(2\pi t/T + \phi_0') \rightarrow$

$\underline{y = 2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T + \phi_0')}$ (5).

Οι εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας, λόγω Α.Α.Τ για την πρώτη μετά την αρχή των συντεταγμένων κοιλία — θέση $x = \lambda/4$ — θα είναι:

α. Αν ισχύει η σχέση (4) $\longrightarrow$

$y = 2A\eta\mu(2\pi t/T + \phi_0' + \pi)$ και

$\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(2\pi t/T + \phi_0' + \pi)$.

Επομένως, αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η κοιλία αυτή περνάει από τη Θ.Ι της — θέση $y=0$ — με ταχύτητα $\upsilon > 0$ για $t=0$ θα είναι $y=0$ και $\upsilon = +\upsilon_0 \longrightarrow$

$\eta\mu(\phi_0' + \pi) = 0$ και $\sigma\upsilon\nu(\phi_0' + \pi) = 1 \longrightarrow$

$\eta\mu\phi_0' = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi_0' = -1 \longrightarrow$

$\phi_0' = \pi \text{ rad} \xrightarrow{(4)}$

$y = 2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T + \pi + \pi) \longrightarrow$

$\underline{y = 2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T)}$

β. Αν ισχύει η (5) $\longrightarrow$

$y = 2A\eta\mu(2\pi t/T + \phi_0')$ και

$\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(2\pi t/T + \phi_0')$.

Επομένως, αν για $t=0$ είναι $y=0$ και $\upsilon = +\upsilon_0 \longrightarrow \eta\mu\phi_0' = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi_0' = 1 \longrightarrow$

$\phi_0' = 0 \text{ rad} \xrightarrow{(5)}$

$\underline{y = 2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T)}$.

Τελικά, αν ως αρχή των αξόνων θεωρήσουμε σημείο του μέσου όπου υπάρχει δεσμός του στάσιμου κύματος και ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η πρώτη μετά τον δεσμό αυτό κοιλία περνάει από τη Θ.Ι της με $\upsilon > 0$ η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι.

$$\boxed{y = 2A\eta\mu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T)}$$

4. Ομοίως προκύπτει ότι αν ως αρχή των αξόνων θεωρήσουμε σημείο του μέσου όπου υπάρχει δεσμός του στάσιμου κύματος και ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η πρώτη μετά το δεσμό αυτό κοιλία βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης $y=+2A$ η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι,

$$\boxed{y = 2A\,\eta\mu(2\pi x/\lambda)\,\sigma\upsilon\nu(2\pi t/T)}$$

Δ. Σταθάκη