Α. Ζιάκαρη

να θυμηθούμε ότι......

1. Ως **λόγος**, στη γλώσσα των μαθηματικών, χαρακτηρίζεται το πηλίκο της διαίρεσης δύο αριθμών και παριστάνεται συμβολικά με ένα κλάσμα στο οποίο αριθμητής είναι ο διαιρετέος και παρονομαστής ο διαιρέτης.

Ένα κλάσμα – ένας λόγος – $\frac{\alpha}{\beta}$, μέσα από την τιμή του – το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή **α** πρός τον παρονομαστή **β** – εκφράζει:

Α. όταν τα **α**, **β** είναι καθαροί αριθμοί, δηλαδή δεν εκφράζουν ποσοτικά ένα φυσικό μέγεθος, <u>το πόσες φορές μπορεί να αφαιρεθεί διαδοχικά, ο παρονομαστής από τον αριθμητή</u> ή όπως λέμε μεταφορικά το πόσες φορές "χωράει" ο παρονομαστής στον αριθμητή.

Β. όταν τα **α**, **β** εκφράζουν ποσοτικά δύο ομοειδή φυσικά μεγέθη, <u>το πόσες φορές μεγαλύτερο ή μικρότερο είναι το μέγεθος **α**, από το μέγεθος **β**</u>, δηλαδή εκφράζει την ποσοτική σχέση που υφίσταται μεταξύ των **α** και **β**.

Γ. όταν τα **α**, **β** εκφράζουν ποσοτικά δύο διαφορετικά φυσικά μεγέθη, <u>την ποσότητα του αριθμητή **α** που αντιστοιχεί στη μονάδα του παρονομαστή **β**.</u>

Π.χ αν **5** πορτοκάλια κοστίζουν **80** λεπτά ο λόγος **80/5 = 16** εκφράζει το πόσα λεπτά κοστίζει το ένα πορτοκάλι – εν προκειμένω 16 λεπτά – ενώ ο λόγος **5/80 = 1/16** εκφράζει το πόσα πορτοκάλια κοστίζουν ένα

Δ. όταν το **α** εκφράζει την τιμή πολλών μονάδων ενός φυσικού μεγέθους και το **β** την τιμή της μιάς μονάδας, <u>το πλήθος των των μονάδων του μεγέθους</u>.

Π.χ αν ένα καρπούζι κοστίζει $\alpha = 160$ λεπτά (η τιμή πολλών κιλών <u>καρπουζιού</u>) ενώ το ένα κιλό καρπουζιού κοστίζει $\beta = 20$ λεπτά, τότε ο λόγος $\alpha/\beta = 160/20 = 8$ εκφράζει το πόσα κιλά είναι το καρπούζι, δηλαδή το πλήθος των μονάδων (κιλών).

2. Δύο μεγέθη **y και x** είναι <u>**ανάλογα**</u>:

<u>α) λεκτικά:</u>

εφόσον <u>όσο</u> μεταβάλλεται το ένα <u>τόσο</u> μεταβάλλεται και το άλλο.

<u>β) στη γλώσσα των μαθηματικών:</u>

εφόσον ο λόγος των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερός (πάντοτε ο ίδιος), δηλαδή ισχύει η σχέση $y/x = \alpha$: σταθ $\longleftrightarrow$ $y = \alpha \cdot x$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ είναι ευθεία γραμμή με εξίσωση $y = \alpha \cdot x$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων η κλίση της οποίας _ ο συντελεστής διεύθυνσης _ ισούται με α.

3. Δύο μεγέθη y και x είναι <u>**αντιστρόφως ανάλογα**</u>:

<u>α) λεκτικά:</u>

εφόσον όσο αυξάνεται το ένα τόσο μειώνεται το άλλο.

<u>β) στη γλώσσα των μαθηματικών:</u>

εφόσον το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό (πάντοτε το ίδιο), δηλαδή ισχύει η σχέση $y \cdot x = \alpha$: σταθ. $\longleftrightarrow$ $y = \alpha / x$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)$ είναι υπερβολή με εξίσωση $y=a/x$.

4. Ως **αναλογία** χαρακτηρίζεται·

α) λεκτικά:
η ισότητα δύο λόγων (κλασμάτων).

β) συμβολικά:
κάθε ισότητα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Μερικές ιδιότητες.

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \longleftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}$$

5. Έστω **Φ** ένα φυσικό μέγεθος του οποίου, κατά τη διάρκεια μιας μεταβολής — ενός φαινομένου —, οι τιμές μεταβάλλονται.

Χαρακτηρίζουμε ως:

α) **Μεταβολή του Φ** τη διαφορά $\Phi_{τελ}-\Phi_{αρχ}$.

Συμβολίζεται με το γράμμα **Δ** συνοδευόμενο από το σύμβολο του μεγέθους που μεταβάλλεται. Π.χ $\Delta u = u_τ - u_α$.

β) **Διαφορά του Φ** τη διαφορά $\Phi_{αρχ}-\Phi_{τελ}$.

γ) **Ρυθμό μεταβολής του Φ** το πηλίκο $\frac{\text{μεταβολή του Φ}}{\text{αντίστοιχο χρονικό διάστημα}}$, δηλαδή το πηλίκο $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Ο ρυθμός μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους εκφράζει το πόσο μεταβάλλεται το μέγεθος (κατά μέσο όρο) στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή σε κάθε δευτερόλεπτο, κατά τη διάρκεια της μεταβολής του στο χρονικό διάστημα Δt.

Παρατηρήσεις

• Αν το χρονικό διάστημα Δt είναι πάρα πολύ μικρό, το πηλίκο $\Delta \Phi / \Delta t$, εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του μεγέθους Φ, ενώ σε διαφορετική περίπτωση τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής.

• <u>Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους Φ, σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ισούται με την κλίση του διαγράμματος της συνάρτησης $\Phi = f(t)$ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.</u>

Εάν η συνάρτηση $\Phi = f(t)$ είναι 1ου βαθμού (γραμμική) το διάγραμμά της είναι ευθεία (ε) η κλίση της οποίας είναι σταθερή και επομένως και ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους Φ θα είναι σταθερός — δηλαδή, η στιγμιαία και η μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής είναι ίσες σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο χρονικό διάστημα Δt.

<u>**Προσοχή:**</u> σταθερότητα ρυθμών μεταβολής έχουμε μόνο στις πρωτοβάθμιες — γραμμικές — συναρτήσεις.

• Όταν $\Phi = a \cdot t + b$, όπου $a \neq 0$, τότε $\Delta \Phi / \Delta t = a$.

Απόδειξη

Σε μία τυχαία χρονική στιγμή t είναι $\Phi = at + b$.

Μετά από χρόνο Δt το μέγεθος Φ μεταβάλλεται κατά $\Delta \Phi$ και τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ για το Φ θα είναι

$$\Phi + \Delta\Phi = a(t+\Delta t) + b = at + a\Delta t + b \longleftrightarrow$$
$$\Phi + \Delta\Phi = a\Delta t + (at+b) = a\Delta t + \Phi \longleftrightarrow$$
$$\Delta\Phi = a \cdot \Delta t \longleftrightarrow \Delta\Phi/\Delta t = a$$

δ. Η μεταβολή στα εκατό (%) του Φ, όταν αυτό μεταβάλλεται κατά $\Delta\Phi$, είναι ίση με $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} \cdot 100\%$.

6. Ο "Νόμος" του εμβαδού.

Έστω ένα φυσικό μέγεθος Φ για το οποίο ισχύει ότι $\Delta\Phi = A \cdot \Delta B \leftrightarrow$ $\Phi - \Phi_o = A(B - B_o)$, όπου A μέγεθος σταθερό. Επομένως, αν για $B_o = 0$ είναι και $\Phi_o = 0$ θα είναι $\Phi = A \cdot B$ (1).

Η σχέση (1) μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε την τιμή του Φ για κάθε τιμή του B.

Αν όμως το μέγεθος A δεν είναι σταθερό, **αλλά μεταβάλλεται σε σχέση με τις τιμές** του B, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1) για να υπολογίσουμε την τιμή του Φ για μια ορισμένη τιμή του B.

Στην περίπτωση αυτή θα εφαρμόσουμε το "**<u>νόμο του εμβαδού</u>**" σύμφωνα με τον οποίο:

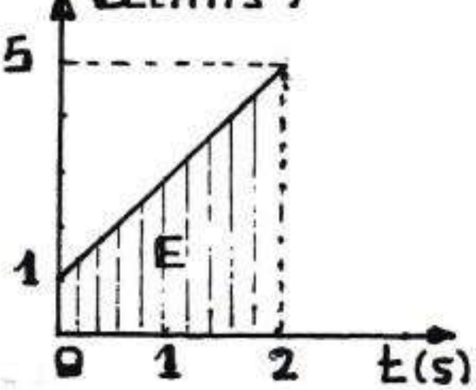
Η τιμή του Φ για μία ορισμένη τιμή του B είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται, στο διάγραμμα της συνάρτησης $A = f(B)$, από τη γραμμή του διαγράμματος και τους άξονες των A και B μέχρι την ορισμένη τιμή του B στον άξονα B.

Π.χ στην ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση ενός υλικού σώματος για την επιτάχυνση α ισχύει ότι $\alpha = \Delta\upsilon/\Delta t \leftrightarrow \Delta\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \leftrightarrow$ $\upsilon - \upsilon_o = \alpha(t - t_o)$, οπότε αν για $t_o = 0$ είναι και $\upsilon_o = 0$ θα είναι $\upsilon = \alpha t$ (1).

Αν η επιτάχυνση α είναι χρονικά σταθερή, δηλαδή η κίνηση είναι Ε.Ο.Επιταχυνόμενη, η σχέση (1) μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ σε μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Αν όμως η επιτάχυνση α δεν είναι χρονικά σταθερή και η τιμή της εξαρτάται από το χρόνο t, η (1) δεν μας δίνει αυτή τη δυνατότητα.

Σ' αυτή την περίπτωση θα εφαρμόσουμε το νόμο του εμβαδού εφόσον φυσικά γνωρίζουμε την εξίσωση της $\alpha = f(t)$.

Έτσι αν, π.χ, $\alpha = 2t+1$ (S.I) από το διάγραμμα της $\alpha = f(t)$ προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 2s$ η ταχύτητα είναι $\upsilon = E = \frac{5+1}{2} \cdot 2\, m/s = 6\, m/s$

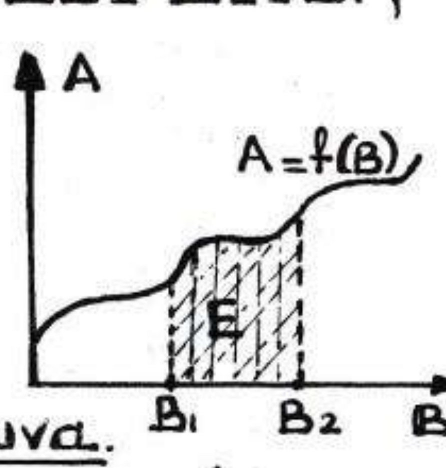


Παρατηρήσεις

α. Αν τμήμα της επιφάνειας που ορίζεται από το "νόμο του εμβαδού" στο διάγραμμα της $A = f(B)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα B τότε το εμβαδόν του τμήματος αυτού, για τον υπολογισμό της τιμής του Φ, θα ληφθεί υπόψιν με αρνητικό πρόσημο.

β. Ανάλογα θα εργαστούμε και στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε μία ορισμένη μεταβολή, $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$, στις τιμές του Φ για μία αντίστοιχη μεταβολή, $\Delta B = B_2 - B_1$, των τιμών του B.

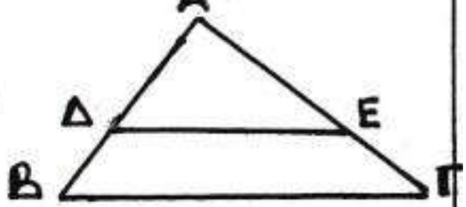
Π.χ στο διπλανό διάγραμμα της $A = f(B)$ θα είναι $\Delta\Phi = E$ όπου E το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



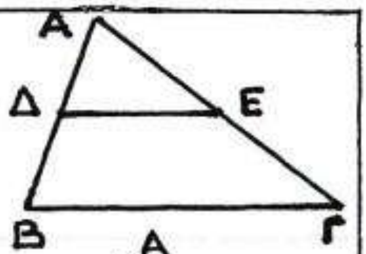
7. Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα.

α. Σε τρίγωνο $\hat{AB\Gamma}$ αν:

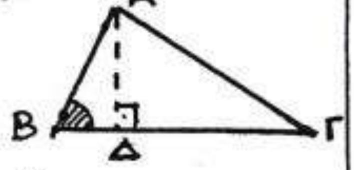
- $\Delta E // B\Gamma \leftrightarrow \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$



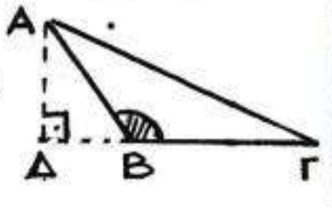
- Δ: μέσο της AB και E: μέσο της $A\Gamma \longleftrightarrow \Delta E =// \frac{B\Gamma}{2}$



- $\hat{B} < 90° \longleftrightarrow$
$(A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 - 2(B\Gamma).(B\Delta).$

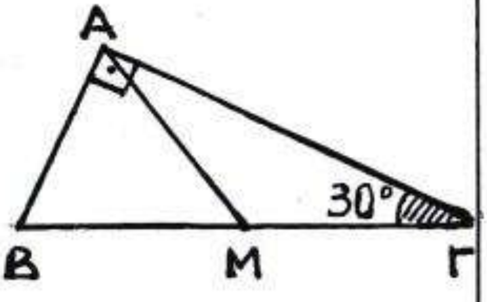


- $\hat{B} > 90° \longleftrightarrow$
$(A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 + 2(B\Gamma).(B\Delta).$



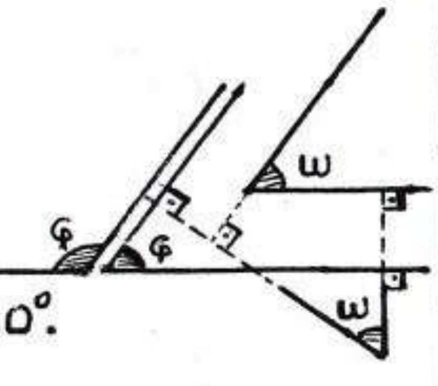
6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\hat{\Gamma}$, όπου $\hat{A} = 1L$, ισχύει ότι:

- $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$
- αν AM: διάμεσος $\longleftrightarrow AM = \frac{B\Gamma}{2}$
- αν $\hat{\Gamma} = 30° \longleftrightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2}$



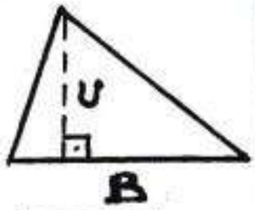
8. Ισότητα γωνιών

Δυο γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες μία προς μία είναι **ίσες ή παραπληρωματικές** — $\hat{\phi} = \hat{\omega}$ ή $\hat{\phi} + \hat{\omega} = 180°$.

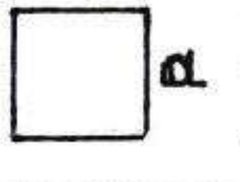


9. Εμβαδά επιπέδων σχημάτων

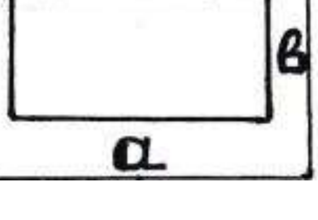
- **Τριγώνου** $\quad E = \frac{B \cdot \upsilon}{2}$



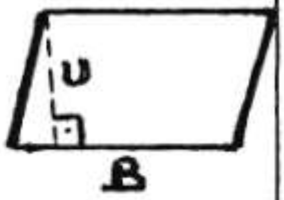
- **Τετραγώνου** $\quad E = a^2$



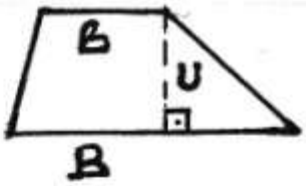
- **Ορθογωνίου** $\quad E = a \cdot b$



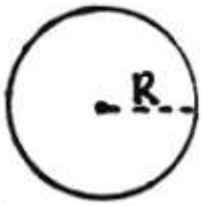
- **Παραλληλογράμμου** $E = B \cdot υ$



- **Τραπεζίου** $E = \frac{B+β}{2} \cdot υ$



- **Κύκλου** $E = π \cdot R^2$

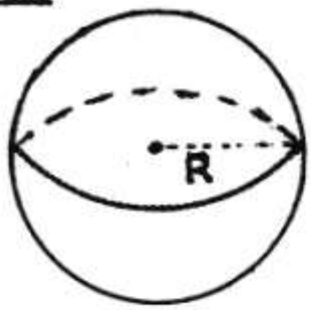


10. Εμβαδά – Όγκοι στερεών

- **Σφαίρα**

$E = 4πR^2$

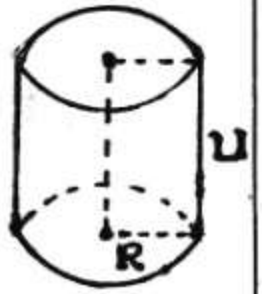
$V = \frac{4}{3}πR^3$



- **Κύλινδρος**

$E = 2πR \cdot υ$

$V = πR^2 \cdot υ$

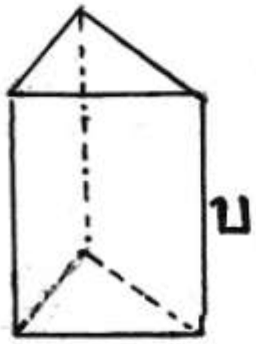


- **Ορθό Πρίσμα**

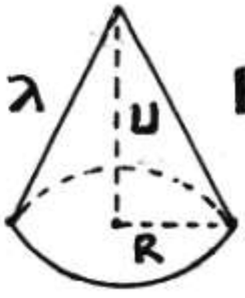
$E_{παρ} = Π_B \cdot υ$

$E = E_{παρ} + 2E_B$

$V = E_B \cdot υ$



- **Κώνος**



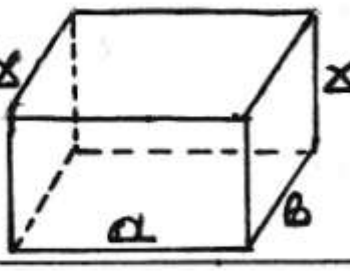
$E_{παρ} = π \cdot R \cdot λ$

$V = \frac{1}{3}πR^2 \cdot υ$

- **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**

$E = 2αβ + 2αγ + 2βγ$

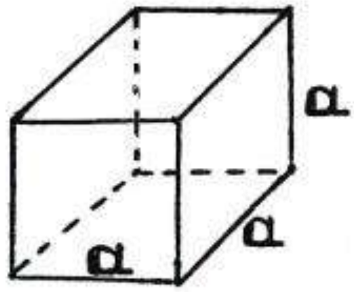
$V = α \cdot β \cdot γ$



• <u>Κύβος</u>

$E = 6\alpha^2$

$V = \alpha^3$



11. <u>Λογάριθμοι — Ορισμός - ιδιότητες</u>

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\boxed{\log_\alpha \theta = x \longleftrightarrow \alpha^x = \theta}$$

$$\log_\alpha 1 = 0 \quad , \quad \log_\alpha \alpha = 1 \quad , \quad \log_\alpha \alpha^x = x$$

$$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

$$\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$$

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta \quad , \quad \alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$$

Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε $\log_\alpha \theta_1 = \log_\alpha \theta_2 \longleftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

<u>Σημείωση</u>

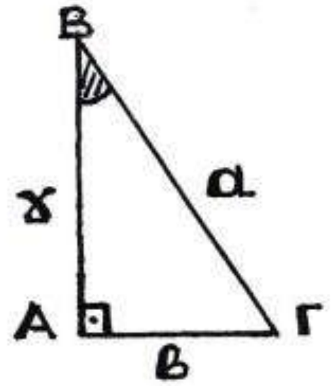
Αν $\alpha = 10$ οι λογάριθμοι λέγονται <u>δεκαδικοί</u> — σύμβολο $\log$ αντί $\log_{10}$.

Αν $\alpha = e = \lim_{\nu \to \infty}(1 + 1/\nu)^\nu = 2.718280\ldots$ οι λογάριθμοι λέγονται **νεπέρειοι** — σύμβολο $\ln$ αντί $\log_e$.

12. <u>Χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις.</u>

α. <u>Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1L$) ισ-</u>

χύει ότι:



$$\eta\mu\hat{B} = \frac{\beta}{\alpha} \longleftrightarrow \beta = \alpha \cdot \eta\mu\hat{B}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\gamma}{\alpha} \longleftrightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\beta}{\gamma} \longleftrightarrow \beta = \gamma \cdot \varepsilon\varphi\hat{B}$$

β. Για κάθε γωνία θ ισχύουν οι σχέσεις:

$$-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1$$

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \quad , \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta$$

$$\eta\mu^2\theta = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$$

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
ημθ	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	−1	0
συνθ	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1	0	1
εφθ	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

γ. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος_διαφοράς γωνιών.

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

δ. Άθροισμα – διαφορά ημ/νων – συν/νων

$$ημA + ημB = 2ημ\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}$$

$$ημA - ημB = 2ημ\frac{A-B}{2}συν\frac{A+B}{2}$$

$$συνA + συνB = 2συν\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}$$

$$συνA - συνB = 2ημ\frac{B-A}{2}ημ\frac{A+B}{2}$$

ε. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο.

$ημ(2κπ+θ) = ημθ$, $συν(2κπ+θ) = συνθ$

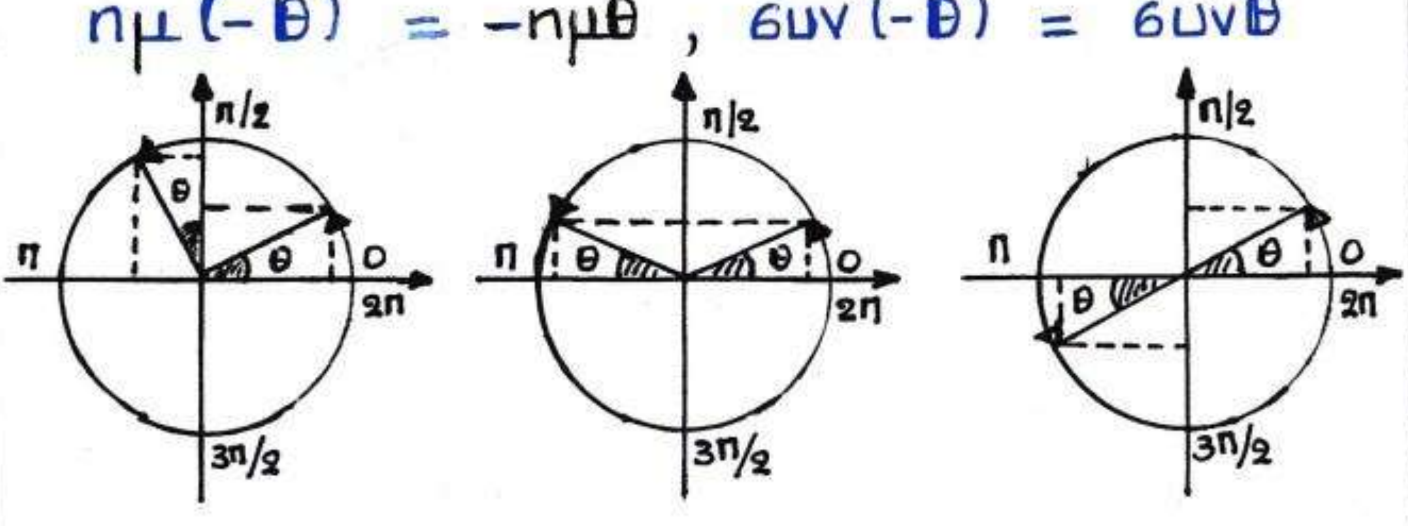
$ημ(π/2-θ) = συνθ$, $συν(π/2-θ) = ημθ$

$ημ(π/2+θ) = συνθ$, $συν(π/2+θ) = -ημθ$

$ημ(π-θ) = ημθ$, $συν(π-θ) = -συνθ$

$ημ(π+θ) = -ημθ$, $συν(π+θ) = -συνθ$

$ημ(-θ) = -ημθ$, $συν(-θ) = συνθ$



στ. Τριγωνομετρικές εξισώσεις

- $ημx = ημθ \longleftrightarrow x = 2κπ + θ$ ή $x = 2κπ + π - θ$
- $συνx = συνθ \longleftrightarrow x = 2κπ \pm θ$

• $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \longleftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$, όπου

$\kappa = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$ σε κάθε περίπτωση.

Παρατηρήσεις

1. Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις $\eta\mu x = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ έχουν λύση μόνο όταν $\alpha \in [-1, 1]$. Αδύνατες σε κάθε άλλη περίπτωση.

2. Αν $\eta\mu x = 1 = \eta\mu\pi/2 \longleftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi/2$

$\eta\mu x = -1 = \eta\mu 3\pi/2 \longleftrightarrow x = 2\kappa\pi + 3\pi/2$

$\eta\mu x = 0 = \eta\mu 0 \longleftrightarrow x = \kappa\pi$

$\eta\mu x = 1/2 = \eta\mu\pi/6 \longleftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi/6$ ή $x = 2\kappa\pi + 5\pi/6$

$\sigma\upsilon\nu x = \pm 1 \longleftrightarrow x = \kappa\pi$

$\sigma\upsilon\nu x = 0 \longleftrightarrow x = (2\kappa+1)\pi/2$ κ.ο.κ.,

όπου $\kappa \in Z$ σε κάθε περίπτωση.

13. Κλίση ευθείας

Ως **κλίση** ευθείας (ε) ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται το πηλίκο της διαφοράς των κατακόρυφων συντεταγμένων προς τη διαφορά των οριζόντιων συντεταγμένων δύο σημείων της ευθείας.

$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y(A,B)}{\Delta x(A,B)} = \alpha$$

Ο α χαρακτηρίζεται ως <u>συντελεστής διεύθυνσης</u> της ευθείας.

Είναι $\alpha = \varepsilon\varphi\omega$, όπου <u>$\omega$ η γωνία κλίσεως</u> της ευθείας, δηλαδή η γωνία που προκύπτει αν με αφετηρία ένα σημείο του άξονα $x'x$ κινηθούμε κατά την ορθή φορά μέχρις ότου συναντήσουμε την ευθεία (ε).

Προσοχή

Κάθε ευθεία έχει σταθερή κλίση, δηλαδή η κλίση μιας ευθείας είναι η ίδια σε κάθε σημείο της ευθείας.

Μία καμπύλη γραμμή όμως δεν έχει σταθερή κλίση (μία κλίση), όπως μία ευθεία, αλλά σε κάθε σημείο της η κλίση είναι διαφορετική.

Την κλίση μιας καμπύλης σ' ένα σημείο της μπορούμε να τη βρούμε αν φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό και βρώ την κλίση της εφαπτομένης. Δηλαδή, η κλίση μιας καμπύλης σ' ένα σημείο της ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο αυτό.

Γενικότερα η κλίση μιας ευθείας η μιας καμπύλης σ' ένα σημείο τους ισούται με την τιμή, στο σημείο αυτό, της παραγώγου της συναρτήσεως η οποία έχει ως γραφική παράσταση την εν λόγω ευθεία η καμπύλη.

14. Γραφικές παραστάσεις (Γ.Π) συναρτήσεων

A. $\boxed{f(x) = \alpha : \text{σταθ}}$

Γ.Π ευθεία με εξίσωση $y = \alpha$ η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $(0, \alpha)$.

B. $\boxed{f(x) = \alpha x + \beta}$, όπου $\alpha \neq 0$.

Γ.Π ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ η οποία αν $\beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες, ενώ αν $\beta = 0$ (οπότε $y = \alpha x$) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Σε κάθε περίπτωση η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω για την οποία ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha$, δηλαδή η κλίση της ευθείας – ο συντελεστής διεύθυνσης ισούται με α

Έστω ευθείες $\varepsilon_1 . \varepsilon_2$ με εξισώσεις αντίστοιχα $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$

Αν $\alpha_1 = \alpha_2 \longleftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1 \longleftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Γ. $\boxed{f(x) = \alpha x^2}$

Γ.Π παραβολή με εξίσωση $y = \alpha x^2$, κορυφή το σημείο $O(0.0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$, δηλαδή τον άξονα yy' (άρτια).

Αν $\alpha > 0 \longrightarrow$ ελάχιστο $y = 0$ για $x = 0$.

$\alpha < 0 \longrightarrow$ μέγιστο $y = 0$ για $x = 0$.

Δ. $\boxed{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

Γ.Π παραβολή με εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, κορυφή το σημείο $K(-\beta/2\alpha, -\Delta/4\alpha)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\beta/2\alpha$.

(Δ= η διακρίνουσα $\beta^2 - 4\alpha\gamma$)

Αν $\alpha > 0 \longrightarrow$ ελάχιστο $y = -\Delta/4\alpha$ για $x = -\beta/2\alpha$

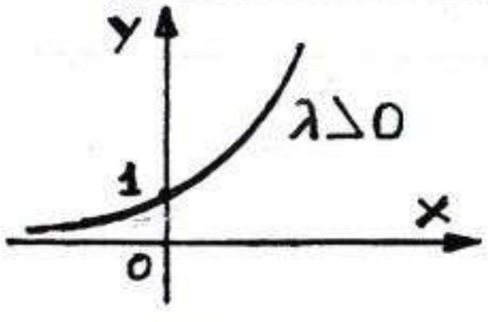
$\alpha < 0 \longrightarrow$ μέγιστο $y = -\Delta/4\alpha$ για $x = -\beta/2\alpha$

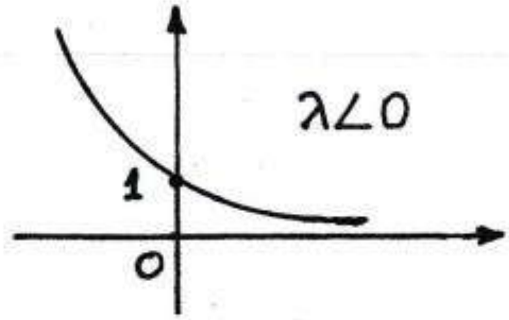
Ε. $\boxed{f(x) = \alpha/x}$

Γ.Π ισοσκελής υπερβολή (2 κλάδοι) με εξίσωση $y = \alpha/x$, κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0.0)$ (περιττή) και ασύμπτωτες τους τέσσερις ημιάξονες.

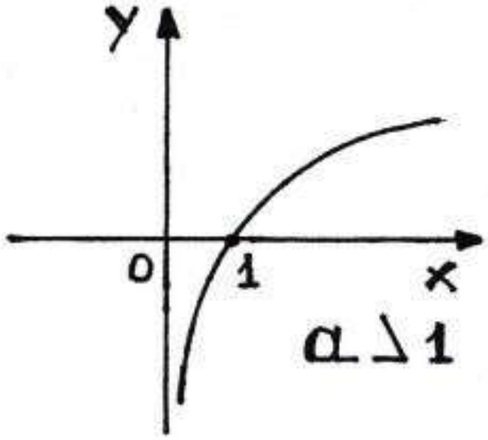
Αν $\alpha > 0 \rightarrow$ 2 κλάδοι στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο. Αν $\alpha < 0$ — —//— 2ο και 4ο —//—

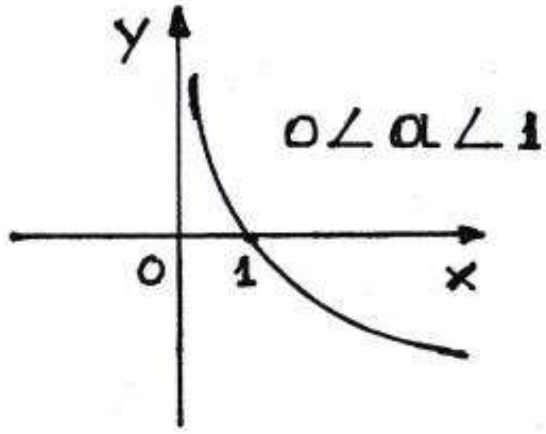
ΣΤ. $\boxed{f(x) = e^{\lambda \cdot x}}$, όπου $e = 2.718\ldots\ldots$





Ζ. $\boxed{f(x) = \log_a x}$





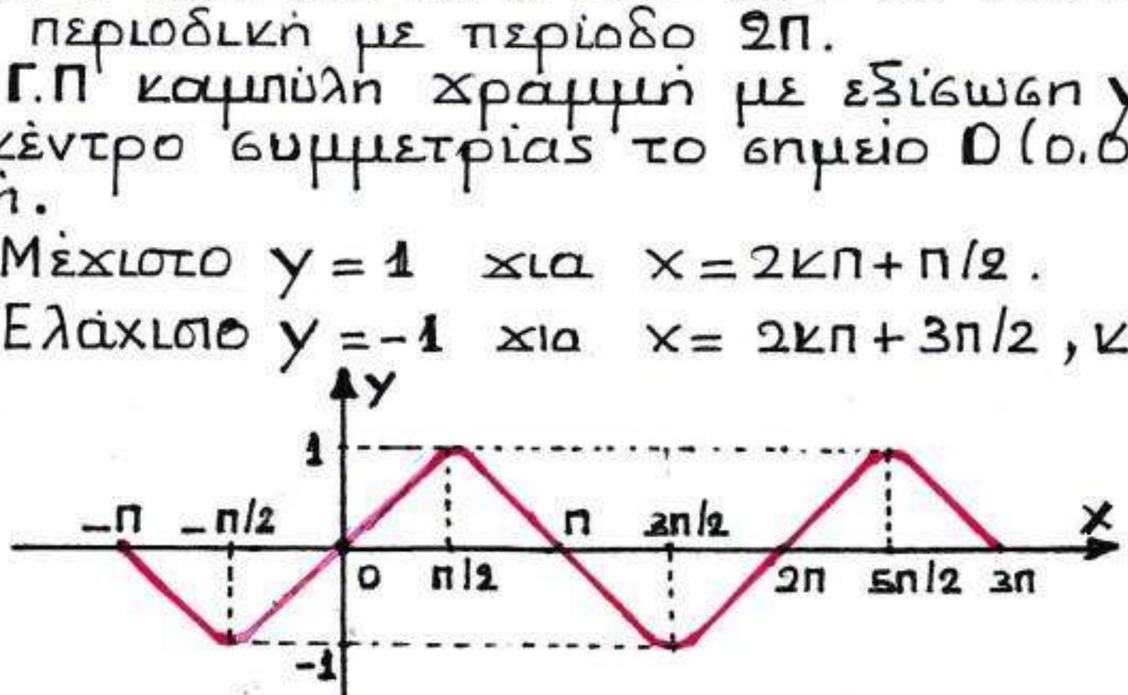
Η. $\boxed{f(x) = \eta\mu x}$

Η f έχει Π.Ο το R και Π.Τ το [-1.1] και είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Γ.Π καμπύλη γραμμή με εξίσωση $y = \eta\mu x$ και κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0,0)$_περιττή.

Μέγιστο $y = 1$ για $x = 2\kappa\pi + \pi/2$.

Ελάχιστο $y = -1$ για $x = 2\kappa\pi + 3\pi/2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



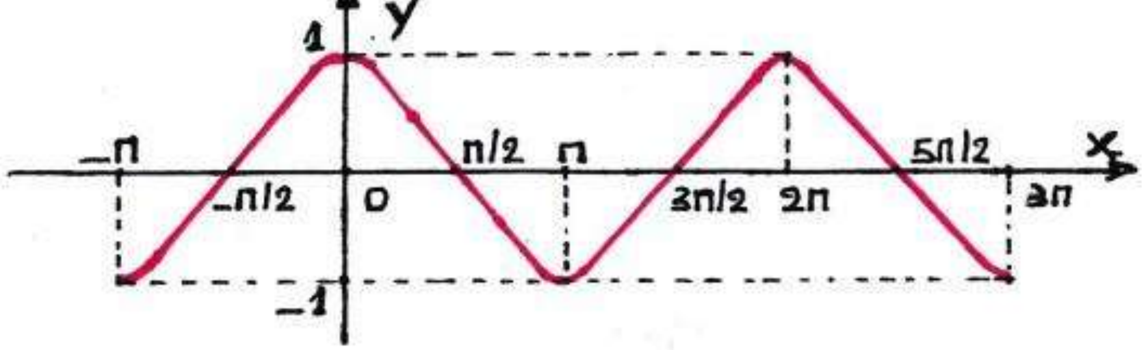
Θ. $\boxed{f(x) = συνx}$

Η f έχει Π.Ο το R και Π.Τ το [-1,1] και είναι περιοδική με περίοδο 2π.

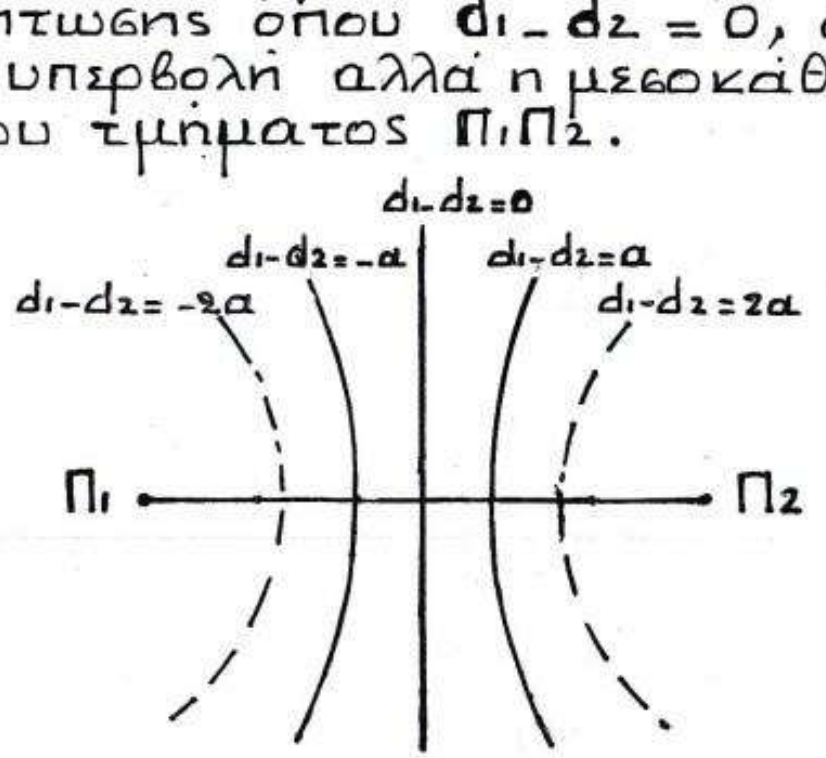
Γ.Π καμπύλη γραμμή με εξίσωση y=συνx και άξονα συμμετρίας τον y'y – άρτια.

Μέχιστο y = 1 για x = 2κπ

Ελάχιστο y = -1 για x = (2κ+1)π, κ∈Z.



Ι. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων μιας επιφάνειας για τα οποία ισχύει ότι <u>$d_1 - d_2 = α$: σταθερή</u>, όπου d_1, d_2 οι αποστάσεις αυτών των σημείων από δύο συγκεκριμένα σημεία $Π_1$ και $Π_2$ της επιφάνειας, είναι υπερβολή με κέντρο συμμετρίας το σημείο $Π_1$ ή $Π_2$, εκτός βέβαια της περίπτωσης όπου $d_1 - d_2 = 0$, οπότε ο Γ.Τ δεν είναι υπερβολή αλλά η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$.



15. Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\omega x + \phi) + \kappa \quad \acute{\eta}$$

$$f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x + \phi) + \kappa$$

<u>Τι μας δείχνουν τα $\alpha, \omega, \phi, \kappa$;</u>

α. Το α έχει σχέση με τα ακρότατα της f. Ειδικότερα αν $\alpha \in R$ τότε:

<u>$f_{max} = |\alpha| + \kappa$</u> ενώ <u>$f_{min} = -|\alpha| + \kappa$</u>

β. Το ω έχει σχέση με την περίοδο T της f. Ισχύει ότι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \longleftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

<u>**Προσοχή**</u>

Η περίοδος T μας δείχνει το διάστημα στο οποίο η f επαναλαμβάνει τη γραφική της παράσταση ενώ το ω – η κυκλική συχνότητα – μας δείχνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται η γραφική της παράσταση σε διάστημα με πλάτος 2π.

γ. Το ϕ μας δείχνει την "<u>οριζόντια μετατόπιση</u>" της $f_1(x) = \alpha\eta\mu\omega x$ ή $f_1(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega x$

δεξιά κατά ϕ αν $\phi < 0$,

αριστερά κατά ϕ αν $\phi > 0$.

δ. Το κ μας δείχνει την "<u>κατακόρυφη μετατόπιση</u>" της $f_1(x) = \alpha\eta\mu\omega x$ ή $f_1(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega x$

προς τα πάνω κατά κ αν $\kappa > 0$

προς τα κάτω κατά κ αν $\kappa < 0$.

<u>**Παράδειγμα**</u>

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $f(t) = \eta\mu(t + \pi/2) + 1$.

<u>**Λύση**</u>

Είναι $\omega = 1\ rad/s$ και επειδή $T = 2\pi/\omega \rightarrow T = 2\pi/1 = 2\pi\ s$.

Είναι $f_{max} = 1+1 = 2$ και $f_{min} = -1+1 = 0$.

1ος τρόπος

Η γραφική παράσταση της $f(t)$ θα κατασκευασθεί σταδιακά, οπότε θα κατασκευάσουμε:

α. τη Γ.Π της $f_1(t) = ημt$ παίρνοντας τέσσερις τιμές για το t — $t_1 = 0$, $t_2 = T/4$, $t_3 = 2T/4$ και $t_4 = 3T/2$ — και βρίσκοντας τις αντίστοιχες τιμές της $f_1(t)$.

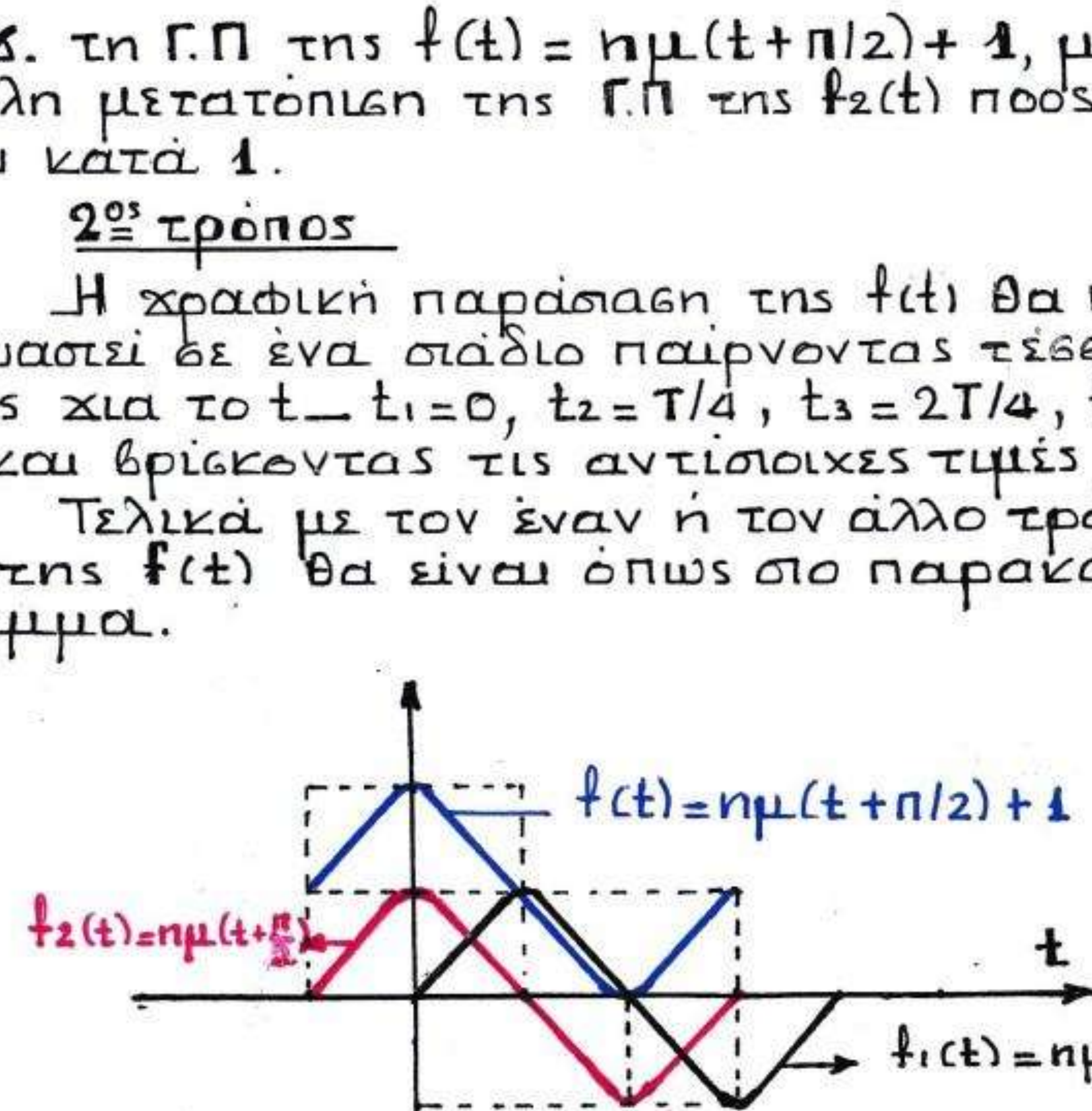
β. τη Γ.Π της $f_2(t) = ημ(t+\pi/2)$, με παράλληλη μετατόπιση της Γ.Π της $f_1(t)$ προς τα αριστερά κατά $\pi/2$.

γ. τη Γ.Π της $f(t) = ημ(t+\pi/2) + 1$, με παράλληλη μετατόπιση της Γ.Π της $f_2(t)$ προς τα πάνω κατά 1.

2ος τρόπος

Η γραφική παράσταση της $f(t)$ θα κατασκευασθεί σε ένα στάδιο παίρνοντας τέσσερις τιμές για το t — $t_1 = 0$, $t_2 = T/4$, $t_3 = 2T/4$, $t_3 = 3T/4$ — και βρίσκοντας τις αντίστοιχες τιμές της $f(t)$.

Τελικά με τον έναν ή τον άλλο τρόπο η Γ.Π της $f(t)$ θα είναι όπως στο παρακάτω διάγραμμα.



Α. Ζια[illegible]