# Συμβολή δύο κυμάτων
## § 2-3, 2-4 στην επιφάνεια υγρού

Θα λέμε ότι δύο ή περισσότερα κύματα **συμβάλλουν** όταν διαδίδονται ταυτόχρονα στο ίδιο ελαστικό μέσο.

**Συμβολή κυμάτων** η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου.

Διαπιστώνεται ότι κατά τη συμβολή δύο ή περισσοτέρων κυμάτων η κίνηση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου, λόγω των διαδιδόμενων κυμάτων, ακολουθεί την **αρχή της επαλληλίας των κινήσεων** σύμφωνα με την οποία

"Όταν σ' ένα ελαστικό μέσο συμβάλλουν δύο ή περισσότερα κύματα, η απομάκρυνση ενός υλικού σημείου του μέσου από τη Θ.Ι του, μία χρονική στιγμή $t$, είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα, την ίδια χρονική στιγμή".

Αυτό σημαίνει ότι δύο κύματα που διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Κάθε κύμα διαδίδεται σαν να μην υπήρχε το άλλο. Η συνεισφορά κάθε κύματος στην απομάκρυνση ενός υλικού σημείου του μέσου από τη Θ.Ι του, λόγω ταλάντωσης, είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη του άλλου κύματος.

Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται μόνο όταν τα κύματα είναι τόσο ισχυρά ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται, π.χ κύματα που δημιουργούνται από μία έκρηξη.

## Παρατηρήσεις

**1.** Ένα κύμα δεν είναι τίποτα περισσότερο από τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου που κινούνται πάνω-κάτω ή πέρα-δώθε με συντεταγμένο τρόπο.

Η συμβολή είναι μία βασική ιδιότητα των κυμάτων και είναι ένα από τα χαρακτηριστικά που διακρίνει τα κύματα από τα σωματίδια.

Αν δύο οντότητες συμβάλλουν αντί να αναπηδούν σε απόσταση η μία από την άλλη, τότε αυτές οι οντότητες είναι κύματα.

**2.** Τα κυματικά φαινόμενα που απαντούν στη φύση είναι αρκετά σύνθετα και ένα σύνθετο κύμα μπορούμε, σε κάθε περίπτωση, να το θεωρήσουμε ως αποτέλεσμα της επαλληλίας ενός αριθμού Α.Κ με επιλεγμένα πλάτη και μήκη κύματος. Αυτός δε είναι και ένας από τους λόγους για τους οποίους μελετούμε τα Α.Κ.

Κατά τη συμβολή δύο ή περισσοτέρων κυμάτων παρατηρούμε ότι:

**α.** σε ορισμένα υλικά σημεία του μέσου το πλάτος ταλάντωσης είναι μεγαλύτερο από το πλάτος ταλάντωσης όλων των άλλων υλικών σημείων του μέσου, οπότε λέμε ότι στα εν λόγω υλικά σημεία έχουμε – συμβαίνει – **ενισχυτική συμβολή ή ενίσχυση**.

**β.** το πλάτος ταλάντωσης σε ορισμένα από τα υλικά σημεία του μέσου είναι μικρότερο ή μηδέν εφόσον παραμένουν ακίνητα, από το πλάτος ταλάντωσης όλων των άλλων υλικών σημείων του μέσου, οπότε λέμε ότι στα εν λόγω υλικά σημεία έχουμε – συμβαίνει – **καταστροφική συμβολή ή απόσβεση**.

**γ.** όλα τα υπόλοιπα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται με ενδιάμεσο πλάτος σε σχέση με το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων όπου έχουμε ενισχυτική και αποσβεστική συμβολή αντίστοιχα.

## Σημείωση

**1.** Δύο πηγές Α.Κ λέμε ότι είναι **σύγχρονες** όταν βρίσκονται διαρκώς σε φάση — $\Delta\Phi = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ — δηλαδή δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα — όρη και κοιλάδες αντίστοιχα — σε όλη τη διάρκεια της εκπομπής τους.

Δύο σύγχρονες πηγές έχουν την ίδια συχνότητα ταλάντωσης — πάλλονται με την ίδια συχνότητα — εκπέμπουν στην ίδια συχνότητα.

Επομένως τα κύματα που δημιουργούνται σ' ένα ελαστικό μέσο από δύο σύγχρονες πηγές έχουν το ίδιο μήκος κύματος — σ' ένα μέσο η ταχύτητα διάδοσης $\upsilon$ των κυμάτων, εφόσον τα διαδιδόμενα κύματα είναι του ιδίου είδους, εγκάρσια ή διαμήκη, είναι η ίδια και επειδή $\upsilon = \lambda \cdot f \leftrightarrow \lambda = \upsilon / f$ θα έχουν και το ίδιο μ.κ —.

**2.** Δύο πηγές Α.Κ λέμε ότι είναι **σύμφωνες ή ότι βρίσκονται σε συμφωνία φάσης** όταν έχουν σταθερή διαφορά φάσης σ' όλη τη διάρκεια της εκπομπής τους. Δύο σύμφωνες πηγές έχουν την ίδια συχνότητα ταλάντωσης.

**3.** Δύο Α.Κ που διαδίδονται σ' ένα ελαστικό μέσο είναι **όμοια** εφόσον είναι του ιδίου είδους, έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια συχνότητα, άρα και το ίδιο μ.κ.

**4.** Στη συνέχεια για λόγους ευκολίας στη μελέτη και την παρουσίαση του φαινομένου της συμβολής δύο Α.Κ θεωρούμε ότι τα συμβαλλόμενα κύματα είναι όμοια.

## Ερώτηση

Να εξηγήσετε σε ποιές περιπτώσεις και με ποιό τρόπο δημιουργείται:

α. ενισχυτική συμβολή (ενίσχυση),

β. καταστροφική συμβολή (απόσβεση),

σε ένα σημείο στην επιφάνεια νερού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο, δύο ομοίων Α.Κ που δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$.

## Απάντηση

α. Έστω ένα σημείο Σ στην επιφάνεια του νερού που απέχει εξίσου από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ ($r_1 = r_2$).

Επειδή οι πηγές είναι σύγχρονες και παράγουν όμοια κύματα και η απόσταση που διανύουν τα παραγόμενα κύματα μέχρι να φτάσουν στο Σ είναι η ίδια, όταν στο Σ φτάνει "όρος" από τη μία πηγή θα φτάνει "όρος" και από την άλλη.

Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, στο Σ θα δημιουργηθεί "όρος" με διπλάσιο ύψος — το πλάτος ταλάντωσης |Α'| του υλικού σημείου του νερού που βρίσκεται στο Σ θα είναι 2Α (|Α'| = 2Α).

Μετά από χρόνο Τ/2 από τη στιγμή που δημιουργείται "όρος" με διπλάσιο ύψος, στο Σ θα φτάσουν ταυτόχρονα δύο "κοιλάδες".

Έτσι, η "κοιλάδα" που θα δημιουργηθεί στο Σ θα έχει διπλάσιο βάθος (|Α'| = 2Α).

Επομένως, στην περίπτωση αυτή τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά.

Ενισχυτική συμβολή όμως έχουμε και και σε άλλα σημεία στην επιφάνεια του νερού.

Έστω ένα σημείο Σ' στην επιφάνεια του

νερού για το οποίο ισχύει ότι $r_1 - r_2 = \lambda \leftrightarrow r_1 = r_2 + \lambda$. Επομένως, αν ο χρόνος άφιξης στο Σ' του Α.Κ από την πηγή $\Pi_2$ είναι $t$, ο χρόνος άφιξης από την πηγή $\Pi_1$ είναι $t+T$.

Όμως, χρονική διαφορά $T$ στη δημιουργία, άρα και στη διάδοση τους, υπάρχει μεταξύ δύο "ορέων" ή μεταξύ δύο "κοιλάδων".

Έτσι, όταν στο Σ' φτάνει "**όρος**" που προέρχεται από την πηγή $\Pi_2$ ταυτόχρονα φτάνει και "**όρος**" που προέρχεται από την πηγή $\Pi_1$, το οποίο έχει δημιουργηθεί μία περίοδο νωρίτερα, με αποτέλεσμα στο Σ' να δημιουργηθεί "**όρος**" με διπλάσιο ύψος ( $|A'| = 2A$ ).

Μετά από χρόνο $T/2$, από τη στιγμή που δημιουργείται "**όρος**" διπλάσιου ύψους, στο Σ' φτάνουν ταυτόχρονα δύο "**κοιλάδες**" με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί στο $Σ_1$ "**κοιλάδα**" με διπλάσιο βάθος ( $|A'| = 2A$ ).

Το ίδιο συμβαίνει και σε όλα τα σημεία στην επιφάνεια του νερού στα οποία η διαφορά των αποστάσεών τους, $r_1 - r_2$, από τις πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος $\lambda$, δηλαδή, $r_1 - r_2 = N\lambda$, όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

**Β**. Έστω ένα υλικό σημείο Σ στην επιφάνεια του νερού για το οποίο ισχύει ότι $r_1 - r_2 = \lambda/2$, όπου $r_1, r_2$ οι αποστάσεις του από τις πηγές των κυμάτων που δημιουργούνται στην επιφάνεια του νερού. Είναι $r_1 = r_2 + \lambda$.

Επομένως, αν ο χρόνος άφιξης στο Σ του Α.Κ από την πηγή $\Pi_2$ είναι $t$, ο χρόνος άφιξης του Α.Κ από την πηγή $\Pi_1$ θα είναι $t + T/2$.

Όμως, χρονική διαφορά $T/2$ στη δημιουργία, άρα και στη διάδοση τους, υπάρχει μεταξύ ενός "**όρους**" και της αμέσως επόμενης "**κοιλάδας**". Έτσι, όταν στο Σ φτάνει "**όρος**" από την πηγή $\Pi_2$, από την πηγή $\Pi_1$ θα φτάνει "**κοι** λάδα" με αποτέλεσμα, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, τα δύο κύματα να αλληλοαναιρούνται στο Σ.

Στη συνέχεια, και μετά από χρόνο $T/2$, στο Σ, θα φτάσει "κοιλάδα" από την πηγή $Π_2$ και "όρος" από την $Π_1$. Το άθροισμά τους θα είναι και πάλι μηδέν. Το υλικό σημείο Σ παραμένει διαρκώς ακίνητο.

Το ίδιο συμβαίνει σε όλα τα υλικά σημεία, στην επιφάνεια του νερού, στο οποίο η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο πηγές είναι ίση με περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος $\lambda/2$, δηλαδή

$r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2$, όπου $N = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ .

<u>**Γενικά**</u>, αν σ' ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο Α.Κ που βρίσκονται σε φάση, δηλαδή προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές, σ' ένα υλικό σημείο του μέσου θα έχουμε:

**α.** <u>**ενίσχυση**</u> εφόσον σ' αυτό το υλικό σημείο φτάνουν ταυτόχρονα <u>**"όρη"**</u> ή <u>**"κοιλάδες"**</u> των κυμάτων που δημιουργούνται από τις δύο πηγές. Δηλαδή ενίσχυση έχουμε στα υλικά σημεία του μέσου των οποίων οι αποστάσεις $r_1$ και $r_2$ από τις δύο πηγές διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ, δηλαδή εφόσον ισχύει ότι:

$$\boxed{r_1 - r_2 = N\cdot\lambda}\ ,\ \text{όπου}\ N = 0, \pm1, \pm2 \ldots,$$

ή ισοδύναμα για τη διαφορά φάσης $\Delta\phi$ στο σημείο συμβολής των κυμάτων που συμβάλλουν ισχύει ότι:

$$\boxed{\Delta\phi = 2K\pi}\ ,\ \text{όπου}\ K = 0, 1, 2 \ldots .$$

**β.** <u>**απόσβεση**</u> εφόσον σ' αυτό το υλικό σημείο φτάνουν ταυτόχρονα, από τη μία πηγή <u>**"όρος"**</u> και από την άλλη <u>**"κοιλάδα"**</u> των κυμάτων που δημιουργούνται από τις δύο πηγές. Δηλαδή απόσβεση έχουμε στα υλικά σημεία του μέσο των οποίων οι αποστάσεις $r_1$ και $r_2$ από τις δύ πηγές διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος $\lambda/2$, δηλαδή εφόσο ισχύει ότι

$$\boxed{r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2} \quad , \text{ όπου } N=0,\pm1,..$$

ή ισοδύναμα για τη διαφορά φάσης $\Delta\Phi$ στο ση μείο συμβολής των κυμάτων που συμβάλλου ισχύει ότι:

$$\boxed{\Delta\Phi = (2K+1)\pi} \quad , \text{ όπου } K = 0, 1, 2...$$

## Παρατήρηση

**1.** Όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που η πηγή εκπομπής είνα μία αλλά τα κύματα ακολουθούν δύο διαφ ρετικές διαδρομές, διανύοντας αποστάσεις $r_1$ και $r_2$ αντίστοιχα, προκειμένου να φτάσουν στα σημεία συμβολής.

**2.** Αν τα Α.Κ που δημιουργούνται από τις σύγ χρονες πηγές είναι όμοια, δηλαδή έχουν το ίδιο πλάτος $A$, τότε το μέγιστο πλάτος $|A'|$ της τα- λάντωσης στα σημεία ενίσχυσης είναι $2A$, ενώ το ελάχιστο πλάτος ταλάντωσης $|A'|$ στα σημεία απόσβεσης είναι μηδέν _ τα εν λόγω υλικά σημεί είναι ακίνητα _.

**3.** Η αρχή της επαλληλίας στο φαινόμενο της συμβολής των κυμάτων εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση που οι ταλαντώσεις των υλικών σημεί ων του μέσου, που οφείλονται στα κύματα που συμβάλλουν, γίνονται στην ίδια διεύθυνση.

Έτσι, όλα όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα, αλ λά και οι εξισώσεις που περιέχονται στην ενότητ αυτή, και αφορούν τη συμβολή κυμάτων, ισχύου μόνο στην περίπτωση που οι ταλαντώσεις τω υλικών σημείων του μέσου, λόγω των διαδιδόμ νων κυμάτων, γίνονται στην ίδια διεύθυνση.

Επομένως, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις αυτές, Π.Χ., για ηχητικά κύματα που είναι διαμήκη κύματα, παρά μόνο στην περίπτωση που το σημείο συμβολής βρίσκεται στην ευθεία που συνδέει τις δύο πηγές.

**4.** Η μελέτη της συμβολής, όπως παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο, αναφέρεται στην περίπτωση κυμάτων που δημιουργούνται στην επιφάνεια υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο.

Τα κύματα αυτά είναι κατά προσέγγιση εγκάρσια και τα μόρια του υγρού ταλαντώνονται κατά την διάδοση των κυμάτων στην επιφάνειά του, στην ίδια διεύθυνση – κατακόρυφα –.

**5.** Για τη διαφορά φάσης $\Delta\phi$ στο σημείο συμβολής, μία ορισμένη χρονική στιγμή $t$, των κυμάτων που συμβάλλουν ισχύει ότι αν $r_1 > r_2$, όπου $r_1, r_2$ οι αποστάσεις του σημείου συμβολής από τις πηγές των κυμάτων, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \rightarrow$

$$\Delta\phi = 2\pi(t/T - r_2/\lambda) - 2\pi(t/T - r_1/\lambda), \text{ όπου}$$

$t \geq t_1 = r_1/u$. Επομένως,

$$\Delta\phi = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda \text{ , οπότε αν:}$$

**α.** $\underline{r_1 - r_2 = \kappa\cdot\lambda}$, δηλαδή αν στο σημείο συμβολής έχουμε ενίσχυση θα είναι

$\underline{\Delta\phi = 2\kappa\pi}$, όπου $\kappa = 0.1.2 \ldots$.

**β.** $\underline{r_1 - r_2 = (2\kappa+1)\lambda/2}$, δηλαδή αν στο σημείο συμβολής έχουμε απόσβεση θα είναι

$\underline{\Delta\phi = (2\kappa+1)\pi}$.

## Η μαθηματική περιγραφή της συμβολής δύο Α.Κ.

Τα συμπεράσματα, όσον αφορά τη συμβολή δύο ομοίων Α.Κ που διαδίδονται στην επιφάνεια ενός υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο – εγκάρσια Α.Κ –, γίνονται περισσότερο πειο τικά αν μελετήσουμε το φαινόμενο στη γλώσσα των μαθηματικών.

Έστω λοιπόν ότι στην επιφάνεια ενός υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο διαδίδονται δύο όμοια Α.Κ που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$. Έστω επίσης ότι ένα τυχαίο υλικό σημείο $\Sigma$ στην επιφάνεια του υγρού απέχει από τις πηγές των κυμάτων αποστάσεις $r_1$ και $r_2$ αντίστοιχα, όπου $r_1 > r_2$.

Αν θεωρήσουμε ως χρονική στιγμή $t_0=0$ τη χρονική στιγμή που και οι δύο πηγές βρίσκονται στη Θ.Ι τους και κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση _ οπότε η κίνησή τους περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής $y = A\eta\mu(\omega t)$ _ μία τυχαία χρονική στιγμή $t \geq r_1/u$ το υλικό σημείο $\Sigma$ έχει απομάκρυνση

$y_1 = A\eta\mu 2\pi(t/T - r_1/\lambda)$ και

$y_2 = A\eta\mu 2\pi(t/T - r_2/\lambda)$, λόγω ταλάντωσης εξαιτίας των κυμάτων που προέρχονται από τις πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η απομάκρυνση του $\Sigma$ από τη Θ.Ι του τη χρονική στιγμή $t$ θα είναι

$$y = y_1 + y_2 \longrightarrow$$

$$y = A[\eta\mu 2\pi(t/T - r_1/\lambda) + \eta\mu 2\pi(t/T - r_2/\lambda)] \rightarrow$$

$$\boxed{y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left[2\pi\left(t/T - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)\right]} \quad (1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο παράγοντας $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)$ έχει συγκεκριμένη τιμή η οποία παραμένει σταθερή με το χρόνο για κάθε υλικό σημείο στην επιφάνεια του υγρού ενώ η ποσότητα $\phi' = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$ έχει διαστάσεις τόξου. Επομένως, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$y = A'\eta\mu\phi'$ (2). Έτσι, αν:

**α.** $A' \geq 0 \rightarrow |A'| = A' \xrightarrow{(2)} y = |A'|\eta\mu\phi$ (3), όπου $\phi = \phi'$.

**β.** $A' < 0 \rightarrow |A'| = -A' \rightarrow -|A'| = A' \xrightarrow{(2)}$
$y = -|A'|\eta\mu\phi' = |A'|\eta\mu(\phi'+\pi) \longrightarrow$
$y = |A'|\eta\mu\phi$ (4), όπου $\phi = \phi'+\pi$.

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι το αποτέλεσμα της συμβολής είναι Α.Α.Τ που έχει πλάτος $|A'| = |2A\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(r_1-r_2)/2\lambda|$ (5) και φάση $\phi$ που καθορίζεται από την ποσότητα $\phi' = 2\pi[t/T - (r_1+r_2)/2\lambda]$ αλλά και από το πρόσημο της ποσότητας $A' = 2A\,\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(r_1-r_2)/2\lambda$.

## Παρατηρήσεις

**1.** Στην περίπτωση που και οι δύο πηγές βρίσκονται, τη χρονική στιγμή $t_0=0$, στη Θ.Ι τους και κινούνται πρός τη θετική κατεύθυνση για να ισχύει η σχέση (1) θα πρέπει τα κύματα να συμβάλλουν στο υλικό σημείο Σ, πράγμα που συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t$, όταν και τα δύο κύματα θα έχουν φτάσει στο Σ.

Το κύμα από την πηγή $\Pi_1$ φτάνει στο Σ τη χρονική στιγμή $t_1 = r_1/\upsilon$ ενώ από την πηγή $\Pi_2$ τη χρονική στιγμή $t_2 = r_2/\upsilon$.

Επομένως για να ισχύει η σχέση (1) θα πρέπει, αν π.χ είναι $r_1 > r_2$ οπότε και $t_1 > t_2$, να είναι $t \geq t_1 = r_1/\upsilon$.

**2.** Όπως προκύπτει από τη σχέση (5):

**α.** το πλάτος της Α.Α.Τ ενός υλικού σημείου στο οποίο συμβάλλουν τα Α.Κ γίνεται μέγιστο, δηλαδή σ' αυτό το υλικό σημείο έχουμε ενισχυτική συμβολή – ενίσχυση –, όταν $|A'| = 2A \longrightarrow$

$$\rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\left[2\pi(r_1-r_2)/2\lambda\right]\right| = 1 \rightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(r_1-r_2)/2\lambda = \pm 1 \rightarrow$$
$$2\pi(r_1-r_2)/2\lambda = N\cdot\pi \text{ , όπου } N=0,\pm1,\ldots$$
$$\rightarrow \boxed{r_1-r_2 = N\cdot\lambda} \text{ , όπου } N=0,\pm1,\pm2\ldots,$$
ή όταν $\boxed{|r_1-r_2| = N\cdot\lambda}$ , όπου $N=0, 1, 2\ldots$ .

**β.** Το πλάτος της Α.Α.Τ ενός υλικού σημείου στο οποίο συμβάλλουν τα Α.Κ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή σ' αυτό το υλικό σημείο έχουμε αποσβεστική συμβολή _ απόσβεση _, όταν $|A'|=0 \rightarrow$
$$\left|\sigma\upsilon\nu\left[2\pi(r_1-r_2)/2\lambda\right]\right| = 0 \rightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\left[2\pi(r_1-r_2)/2\lambda\right] = 0 \rightarrow$$
$$2\pi(r_1-r_2)/2\lambda = (2N+1)\pi/2 \text{ , } N=0,\pm1,\ldots$$
$$\rightarrow \boxed{r_1-r_2 = (2N+1)\lambda/2} \text{ , όπου } N=0,\pm1,\pm2\ldots$$
ή όταν $\boxed{|r_1-r_2| = (2N+1)\lambda/2}$ , όπου $N=0.1.2\ldots$

## Αριθμός υπερβολών ενισχυτικής συμβολής και απόσβεσης

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ενός επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $r_1-r_2=\sigma\tau\alpha\theta.$, όπου $r_1, r_2$ οι αποστάσεις αυτών των σημείων από δύο συγκεκριμένα σημεία Α και Β του επιπέδου, είναι υπερβολή με κέντρο συμμετρίας το σημείο Α ή Β, εκτός βεβαίως της περίπτωσης όπου $r_1-r_2=0 \leftrightarrow r_1=r_2$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος δεν είναι υπερβολή αλλά η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Επομένως, τα υλικά σημεία στην επιφάνεια του υγρού στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή, δηλαδή τα υλικά σημεία όπου $r_1 - r_2 = N\lambda \longrightarrow$ $r_1 - r_2 = 2N\lambda/2 =$ σταθ., $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ και τα υλικά σημεία στα οποία έχουμε αποσβεστική συμβολή, δηλαδή τα υλικά σημεία όπου $r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2 =$ σταθ., $N = 0. \pm 1. \pm 2, \ldots$, βρίσκονται πάνω σε υπερβολές που ονομάζονται <u>**κροσσοί ενίσχυσης**</u> και <u>**κροσσοί απόσβεσης**</u> αντίστοιχα.

## <u>Παρατήρηση</u>

Στις σχέσεις $r_1 - r_2 = N\lambda$ και $r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2$, όπου $N = 0. \pm 1. \pm 2 \ldots$ ή <u>ισοδύναμα</u> στις σχέσεις <u>$|r_1 - r_2| = N\lambda$ (1)</u> και <u>$|r_1 - r_2| = (2N+1)\lambda/2$ (2)</u>, όπου $N = 0, 1, 2, \ldots$ που ισχύουν όταν έχουμε ενισχυτική και αποσβεστική συμβολή αντίστοιχα <u>είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τι σημαίνει το N να έχει μία συγκεκριμένη τιμή, N=0, N=1, N=2, κ.ο.κ.</u>

Έστω ότι Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που συνδέει τις δύο πηγές.

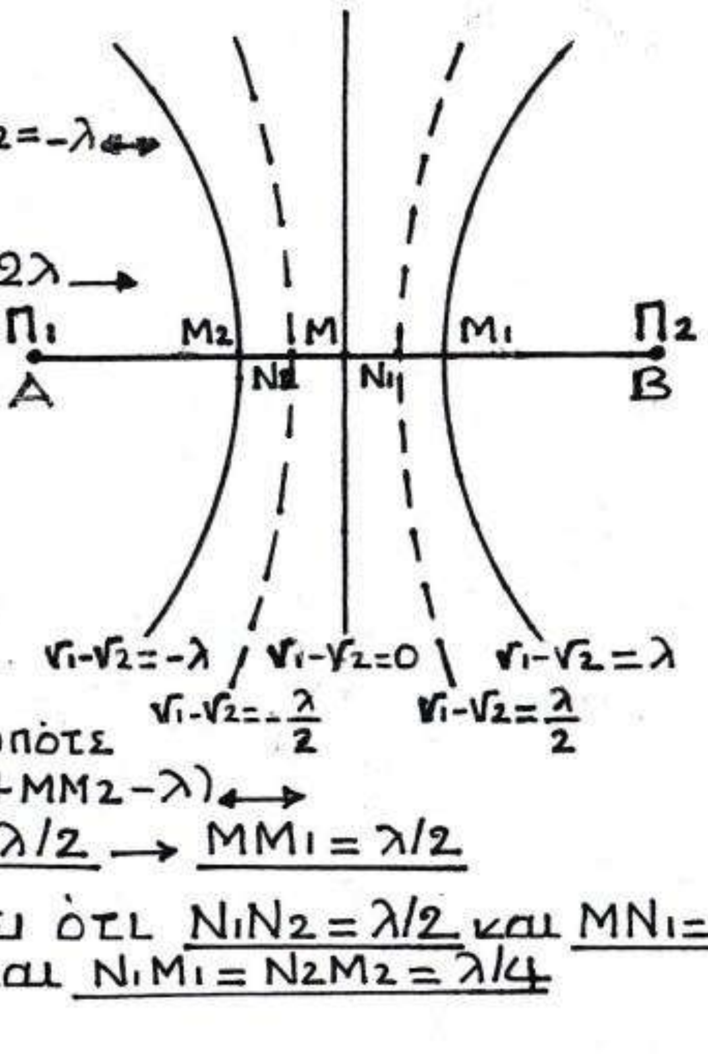
<u>Για $N=0$</u> $\xrightarrow{(1)}$ $r_1 - r_2 = 0 \longleftrightarrow r_1 = r_2$, δηλαδή για N=0 τα σημεία ενίσχυσης είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ και εφόσον τα κύματα που συμβάλλουν αρχίζουν να διαδίδονται ταυτόχρονα για το σημείο Μ λέμε ότι είναι το σημείο του $\Pi_1\Pi_2$ στο οποίο για $1^η$ φορά συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

<u>Για $N=0$</u> $\xrightarrow{(2)}$ $|r_1 - r_2| = \lambda/2 \longleftrightarrow r_1 - r_2 = \pm\lambda/2$, δηλαδή για N=0 τα σημεία απόσβεσης είναι τα σημεία δύο υπερβολών με κέντρα συμμετρίας τα σημεία $\Pi_1$ και $\Pi_2$ οι οποίες τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ στα σημεία $N_1$ και $N_2$ αντίστοιχα και εφόσον τα κύματα που συμβάλλουν αρχίζουν να διαδίδονται ταυτόχρονα για τα σημεία $N_1$ και $N_2$ λέμε ότι είναι τα σημεία του $\Pi_1\Pi_2$ στα οποία για $1^η$ φορά συμβαίνει απο-

βεστική συμβολή.

Για $N=1 \xrightarrow{(1)} |r_1-r_2|=\lambda \leftrightarrow r_1-r_2=\pm\lambda$, δηλαδή για N=1 τα σημεία ενισχυτικής συμβολής είναι τα σημεία δύο υπερβολών με κέντρα συμμετρίας τα σημεία $\Pi_1$ και $\Pi_2$ οι οποίες τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ στα σημεία $M_1$ και $M_2$ αντίστοιχα και εφόσον τα κύματα που συμβάλλουν αρχίζουν να διαδίδονται ταυτόχρονα για τα σημεία $M_1$ και $M_2$ λέμε ότι είναι τα σημεία του $\Pi_1\Pi_2$ στα οποία για 2η φορά συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

Για $N=1 \xrightarrow{(2)} |r_1-r_2|=3\lambda/2 \leftrightarrow r_1-r_2=\pm 3\lambda/2$, δηλαδή......




Είναι

$AM_1-BM_1=\lambda$, $AM_2-BM_2=-\lambda \leftrightarrow$

$BM_2-AM_2=\lambda$ +

$AM_1-AM_2+BM_2-BM_1=2\lambda \rightarrow$

$M_1M_2+M_1M_2=2\lambda \leftarrow$

$2M_1M_2=2\lambda \leftrightarrow$

$\underline{M_1M_2=\lambda}$.

Είναι

$AM-AM_2=MM_2 \rightarrow$

$MM_2=AB/2-AM_2$ (1),

$BM_2-AM_2=\lambda \leftrightarrow$

$AM_2=BM_2-\lambda=$

$=AB/2+MM_2-\lambda$, οπότε

$\xrightarrow{(1)} MM_2=AB/2-(AB/2+MM_2-\lambda) \leftrightarrow$

$2MM_2=\lambda \leftrightarrow \underline{MM_2=\lambda/2} \rightarrow \underline{MM_1=\lambda/2}$

Ομοίως προκύπτει ότι $\underline{N_1N_2=\lambda/2}$ και $\underline{MN_1=\lambda/4}$ $\rightarrow \underline{MN_2=\lambda/4}$, οπότε και $\underline{N_1M_1=N_2M_2=\lambda/4}$

## Θέμα

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $\Pi_1$ και $\Pi_2$ δημιουργούν στην ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο όμοια Α.Κ με μήκος κύματος $\lambda = 2m$. Αν οι πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 8m$, να βρείτε:

**α.** τον αριθμό των γραμμών ενισχυτικής συμβολής που δημιουργούνται μεταξύ των $\Pi_1$ και $\Pi_2$.

**β.** τον αριθμό των υπερβολών απόσβεσης μεταξύ των $\Pi_1$ και $\Pi_2$.

## Απάντηση

Έστω σημείο Κ του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που απέχει απόσταση $d_1$ από το σημείο $\Pi_1$ και απόσταση $d_2$ από το σημείο $\Pi_2$.


**α.** Ενισχυτική συμβολή στο Κ έχουμε εφόσον είναι $d_1 - d_2 = N\lambda$, όπου $N = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ .

Είναι $d_1 = d - d_2$, οπότε

$d - d_2 - d_2 = N\lambda \leftrightarrow$

$d - 2d_2 = N\lambda \leftrightarrow$

$d_2 = d/2 - N\lambda/2 \rightarrow$

$d_2 = 4 - N$.

Είναι $0 < d_2 < d \rightarrow 0 < 4 - N < 8 \leftrightarrow$

$-4 < N < 4$. Επομένως,

$N = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, δηλαδή υπάρχουν 7 γραμμές ενισχυτικής συμβολής μεταξύ των $\Pi_1$ και $\Pi_2$

**β.** Απόσβεση στο Κ έχουμε εφόσον είναι

$d_1 - d_2 = (2N+1)\lambda/2$, όπου $N = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

Είναι $d_1 = d - d_2$, οπότε

$d - 2d_2 = (2N+1)\lambda/2 \leftrightarrow$

$d_2 = d/2 - (2N+1)\lambda/4 \longrightarrow$

$d_2 = 3.5 - N$. Είναι $0 < d_2 < d \rightarrow$

$0 < 3.5 - N < 8 \leftrightarrow$

$-4.5 < N < 3.5$. Επομένως,

$N = 0. \pm1. \pm2. \pm3. -4$, δηλαδή υπάρχουν 8 υπερβολές απόσβεσης μεταξύ των $\Pi_1$ και $\Pi_2$.

# Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

**1.** Το αποτέλεσμα της συμβολής, σε ένα υλικό σημείο στην ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο, δύο όμοιων **Α.Κ** που δημιουργούνται στην επιφάνεια του υγρού από δύο σύγχρονες πηγές, είναι **Α.Α.Τ** που έχει πλάτος $|A'| = 2A\,|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(r_1-r_2)/2\lambda|$ και φάση $\phi$ που καθορίζεται τόσο από την ποσότητα $2\pi[t/T - (r_1+r_2)/2\lambda]$ όσο και από το πρόσημο του όρου $\sigma\upsilon\nu[2\pi(r_1-r_2)/2\lambda]$.

Το πλάτος $|A'|$ της (σύνθετης) **Α.Α.Τ** του εν λόγω υλικού σημείου μπορούμε να το βρούμε αν γνωρίζουμε το πλάτος $A$ των Α.Κ:

**α.** τη διαφορά, $\Delta r = r_1 - r_2$, των αποστάσεων του υλικού σημείου από τις πηγές των Α.Κ και το μ.κ $\lambda$.

**β.** και τη διαφορά φάσης, $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$, των δύο Α.Κ στο υλικό σημείο συμβολής.

**γ.** τη συχνότητα $f$ και τη διαφορά των χρόνων άφιξης $\Delta t = t_1 - t_2$ κάθε **Α.Κ** στο υλικό σημείο συμβολής.

## Απόδειξη

**α.** Προκύπτει άμεσα από τη σχέση
$|A'| = 2A\,|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(r_1-r_2)/2\lambda|$ **(1)**.

**β.** Είναι $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 \longrightarrow$

$$\Delta\phi = 2\pi(t/T - r_1/\lambda) - 2\pi(t/T - r_2/\lambda) \longrightarrow$$

$$\Delta\phi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda \longrightarrow$$

$$\Delta\phi/2 = 2\pi(r_2 - r_1)/2\lambda \xrightarrow{(1)}$$

$$|A'| = 2A\,|\sigma\upsilon\nu\,\Delta\phi/2|.$$

**γ.** Αν $t_1, t_2$ είναι οι χρόνοι άφιξης στο σημείο συμβολής των Α.Κ από τις πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$ αντίστοιχα θα είναι $r_1 = u t_1$ και $r_2 = u t_2$.

Επομένως,

$$|A'| = 2A|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(\upsilon t_1 - \upsilon t_2)/2\lambda| =$$
$$= 2A|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi(t_1 - t_2)\upsilon/2\lambda| \xrightarrow{\upsilon=\lambda\cdot f}$$
$$\underline{|A'| = 2A|\sigma\upsilon\nu\, \pi f\cdot\Delta t}.$$

**2.** Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι κάθε υλικό σημείο, στη ηρεμη επιφάνεια ενός υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο, στο οποίο συμβάλλουν δύο Α.Κ που δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές, εκτελεί σύνθετη Α.Α.Τ, οπότε για την κίνησή του ισχύουν όσα γνωρίζουμε τόσο για τη σύνθεση δύο Α.Α.Τ της ίδιας συχνότητος όσο και για τις Α.Α.Τ γενικότερα.

Π.χ, αν τα Α.Κ που συμβάλλουν είναι όμοια για το πλάτος $|A'|$ της σύνθετης Α.Α.Τ που εκτελεί το υλικό σημείο της επιφάνειας του υγρού στο οποίο συμβάλλουν τα Α.Κ ισχύει ότι $|A'| = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\sigma\upsilon\nu\Delta\phi}$, όπου $\Delta\phi$ η διαφορά φάσης των δύο Α.Κ στο σημείο συμβολής.

Είναι $A^2 + A^2 + 2AA\sigma\upsilon\nu\Delta\phi =$

$$= 2A^2 + 2A^2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi =$$
$$= 2A^2(1 + \sigma\upsilon\nu\Delta\phi) =$$
$$= 4A^2\sigma\upsilon\nu^2\Delta\phi/2 \longrightarrow$$
$$|A'| = \sqrt{4A^2\sigma\upsilon\nu^2\Delta\phi/2} \longrightarrow$$
$$\underline{|A'| = 2A|\sigma\upsilon\nu\Delta\phi/2)}$$

**3.** Από την εξίσωση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου στην περιοχή όπου συμβάλλουν δύο όμοια Α.Κ, μπορούμε να βρούμε τη θέση του υλικού σημείου.

Για το σκοπό αυτό συγκρίνουμε την εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου με τη γενική μορφή της εξίσωσης για την απομάκρυνση ενός υλικού σημείου στην περιοχή συμβολής.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν το μ.κ των Α.Κ που συμβάλλουν είναι

$\lambda = 1m$ και η εξίσωση απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Σ στην περιοχή συμβολής είναι

$$y = 0.2\,συν3\pi\,ημ(8\pi t - 13\pi) \quad (S.I),$$

συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με τη γενική μορφή της εξίσωσης απομάκρυνσης που ισχύει για κάθε υλικό σημείο στην περιοχή συμβολής,

$$y = 2A\,συν[2\pi(r_1 - r_2)/2\lambda]\cdot ημ2\pi[t/T - (r_1 + r_2)/2\lambda]$$

προκύπτει ότι:

$$2\pi(r_1 - r_2)/2\lambda = 3\pi \longrightarrow r_1 - r_2 = 3 \quad (1) \text{ και}$$

$$r_1 + r_2 = 13 \quad (2).$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι $r_1 = 8m$ και $r_2 = 5m$.

Η θέση του Σ συμπίπτει με τη θέση τ κοινών σημείων των κύκλων $(Π_1, 8m)$ και $(Π_2, 5m)$

4. Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης_ταλάντωσης_ ενός υλικού σημείου Σ στο οποίο συμβάλλουν δύο Α.Κ που δημιουργούνται από δύο πηγές $Π_1$ και $Π_2$, οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται_να εκπέμπουν_ ταυτόχρονα, θα πρέπει να έχουμε υπόψιν ότι στην κίνηση του Σ διακρίνουμε τρεις φάσεις.

Έτσι, αν $t_1, t_2$ είναι ο χρόνος άφιξης στο Σ των Α.Κ που συμβάλλουν και $r_1, r_2$, όπου $r_1 < r_2$, οι αποστάσεις του Σ από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα, θα είναι

$$t_1 = r_1/\upsilon < r_2/\upsilon = t_2, \text{ οπότε:}$$

**α.** Για $t < t_1$, το υλικό σημείο Σ παραμένει ακίνητο, διότι δεν έχει φτάσει σ' αυτό κανένα κύμα. Επομένως, θα είναι $\underline{y = 0}$.

Να υπενθυμίσουμε ότι ως χρονική στιγμή μηδέν θεωρείται η χρονική στιγμή που αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα οι δύο πηγές.

**β.** Για $t_1 \leq t < t_2$ το υλικό σημείο Σ εκτελεί Α.Α.Τ αποκλειστικά και μόνο λόγω του κύματος που φτάνει σ' αυτό από την πηγή $Π_1$. Επομένως, Θα είναι $y = y_1 = A\eta\mu 2\pi(t/T - r_1/\lambda)$

**γ.** Για $t \geq t_2$ το υλικό σημείο Σ εκτελεί σύνθετη Α.Α.Τ λόγω και των δύο Α.Κ που φτάνουν σ' αυτό – συμβάλλουν σ' αυτό. Επομένως, θα είναι

$$y = y_1 + y_2 \longrightarrow$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu[2\pi(r_1 - r_2)/2\lambda] \cdot \eta\mu 2\pi(t/T - (r_1 + r_2)/2\lambda].$$

## Παράδειγμα

Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $\Pi_1$ και $\Pi_2$ αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ δημιουργώντας στην επιφάνεια ενός υγρού που βρίσκεται μέσα σ' ένα δοχείο, όμοια Α.Κ.

Ένα υλικό σημείο Σ στην επιφάνεια του υγρού απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις $r_1 = \lambda$ και $r_2 = 2\lambda$ αντίστοιχα, όπου λ το μ.κ των διαδιδόμενων Α.Κ.

Να περιγράψετε την κίνηση του Σ και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $y$ από τη Θ.Ι του συναρτήσει του χρόνου $t$, λόγω των διαδιδόμενων Α.Κ.

## Απάντηση

Έστω $\upsilon$ η ταχύτητα διάδοσης και $t_1, t_2$ ο χρόνος άφιξης στο Σ αντίστοιχα, των διαδιδόμενων Α.Κ.

Είναι $t_1 = r_1/\upsilon = \lambda/\upsilon = T$, $t_2 = r_2/\upsilon = 2\lambda/\upsilon = 2T$, όπου $T$ η περίοδος των Α.Κ.

Επομένως, $t_1 < t_2$.

Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t < t_1$ το Σ είναι ακίνητο διότι κανένα από τα διαδιδόμενα Α.Κ δεν έχει φτάσει σ' αυτό.

Στο χρονικό διάστημα $t_1 \leq t < t_2$ το Σ εκτελεί Α.Α.Τ, λόγω του διαδιδόμενου κύματος από την πηγή $\Pi_1$, με πλάτος – συχνότητα ταλάντωσης το πλάτος Α και την συχνότητα $f$ του διαδιδόμενου Α.Κ.

<u>Στο χρονικό διάστημα</u> $t \geq t_2$ το Σ εκτελεί Α.Α.Τ λόγω της συμβολής σ' αυτό των διαδιδόμενων Α.Κ από τις πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$.

Είναι $r_2 - r_1 = 2\lambda - \lambda = \lambda$. Επομένως η συμβολή των κυμάτων στο Σ είναι ενισχυτική.

Συνεπώς το υλικό σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος 2Α και συχνότητα f, όπου Α το πλάτος και f η συχνότητα των ομοίων Α.Κ που συμβάλλουν στο Σ.

Σύμφωνα λοιπόν με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, στη συνάρτηση $y=f(t)$ για το Σ, όταν:

όταν: $t < t_1$ είναι $\underline{y=0 \ (1)}$,

$t_1 \leq t < t_2$ είναι $y = A\eta\mu 2\pi(t/T - r_1/\lambda) \rightarrow$

$y = A\eta\mu 2\pi(t/T - 1) \longrightarrow$

$\underline{y = A\eta\mu 2\pi t/T \ (2)}$.

$t \geq t_2$ είναι $y = 2A\sigma\upsilon\nu[2\pi(r_1 - r_2)/2\lambda] \cdot$

$\cdot \eta\mu 2\pi(t/T - (r_1 + r_2)/2\lambda]$

$\longrightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu\pi\,\eta\mu 2\pi(t/T - 3/2)$

$\underline{y = 2A\eta\mu 2\pi t/T \ (3)}$.

Επομένως,

για $t = t_1 = T \xrightarrow{(2)} y = 0$

$t = t_1 + T/4 = 5T/4 \xrightarrow{(2)} y = A$

$t = t_1 + 2T/4 = 6T/4 \xrightarrow{(2)} y = 0$

$t = t_1 + 3T/4 = 7T/4 \xrightarrow{(2)} y = -A$

$t = t_1 + T = 2T \xrightarrow{(2)} y = 0$,

ενώ

για $t = t_2 = 2T \xrightarrow{(3)} y = 0$

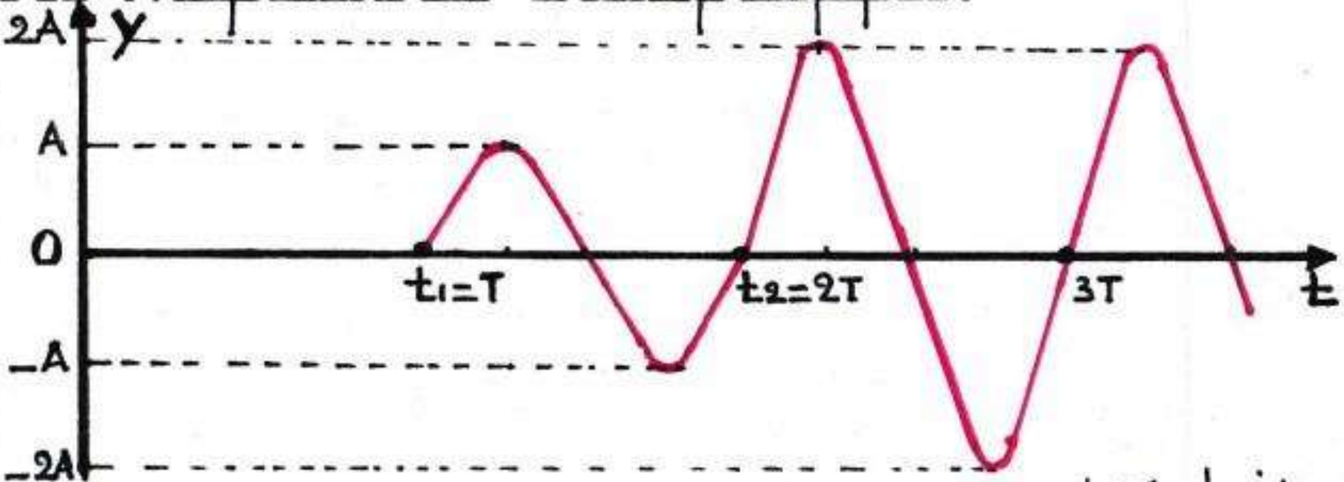
$t = t_2 + T/4 = 9T/4 \xrightarrow{(3)} y = 2A$

$t = t_2 + 2T/4 = 10T/4 \xrightarrow{(3)} y = 0$

$t = t_2 + 3T/4 = 11T/4 \xrightarrow{(3)} y = -2A$

$t = t_2 + T = 3T \xrightarrow{(3)} y = 0$

Στη συνέχεια η ΓΠ της $y=f(t)$ επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο, οπότε θά είναι όπως στο παρακάτω διάγραμμα.




Α. Τζαφτής