Α. Ζαχαρής

ΚΥΜΑΤΑ §. 2-1, 2-2

Η έννοια "**κύμα**" είναι μία από τις πιό βασικές έννοιες της φυσικής και χρησιμοποιείται για την περιγραφή ενός μεγάλου αριθμού φαινομένων που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα.

Τα κύματα με κριτήριο το μηχανισμό παραγωγής και διάδοσής τους διακρίνονται σε Μηχανικά και Ηλεκτρομαγνητικά.

Στην ενότητα αυτή, εκτός των άλλων, θα μελετήσουμε και μερικά από τα φαινόμενα που είναι κοινά και στα δύο είδη κυμάτων, όπως **η Συμβολή**, **η Ανάκλαση** και **η Διάθλαση**.

Α. Μηχανικά κύματα.

Η θεωρητική μελέτη της διάδοσης των μηχανικών κυμάτων βασίζεται στο μοντέλο **ελαστικό μέσο**, δηλαδή σ' ένα θεωρητικά υπαρκτο υλικό μέσο που παρουσιάζει τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Αποτελείται από ένα συνεχές σύνολο υλικών σημείων τα οποία είναι ταλαντωτές.

2. Είναι ισότροπο, δηλαδή παρουσιάζει προς όλες τις κατευθύνσεις τις ίδιες ιδιότητες.

3. Τα υλικά σημεία από τα οποία αποτελείται αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ελαστικές δυνάμεις, δηλαδή βρίσκονται σε ελαστική σύζευξη.

Στο μοντέλο ελαστικό μέσο, κάθε "σημειακός" ταλαντωτής, εφόσον δεν ενεργοποιείται, βρίσκεται στη θέση ευσταθούς ισορροπίας του. Εάν όμως όλοι οι "σημειακοί" ταλαντωτές του ελαστικού μέσου, όταν ισορροπούν, συμβαίνει να βρίσκονται σε μία ευθεία, το ελαστικό μέσο θεωρείται **γραμμικό**.

Προκειμένου τώρα να συνδέσουμε τις αρκετά αφηρημένες έννοιες – **ελαστικό μέσο** και **γραμμικό ελαστικό μέσο** – με τον κόσμο του συγκεκριμένου μπορούμε να φανταστούμε – να δημιουργήσουμε – μία προσωπική "εναλλακτική" εικόνα για την έννοια ελαστικό μέσο σαν ένα σύνολο μικροσκοπικών σφαιριδίων που συνδέονται μεταξύ τους στο χώρο με όμοια πολύ λεπτά ελατήρια, ενώ για την έννοια γραμμικό ελαστικό μέσο σαν την χορδή μιας κιθάρας.

Δημιουργία μηχανικού κύματος σ'ένα ελαστικό μέσο.

Αν προκληθεί μία διαταραχή σε μία περιοχή ενός ελαστικού μέσου που ηρεμεί – ισορροπεί – τα μόρια του, στην περιοχή που προκλήθηκε η διαταραχή, μετατοπίζονται από τις θέσεις ισορροπίας τους.

Επειδή όμως τα μόρια αυτά αλληλεπιδρούν με τα γειτονικά τους, δέχονται δυνάμεις που τείνουν να τα επαναφέρουν στις αρχικές τους θέσεις ενώ στα γειτονικά τους ασκούν δυνάμεις που τείνουν να τα εκτρέψουν από τη θέση ισορροπίας τους.

Στη συνέχεια καθώς και αυτά μετατοπίζονται αλληλεπιδρούν με τα διπλανά τους που είναι ακίνητα, με συνέπεια και αυτά να μετατοπίζονται κ.ο.κ.

Έτσι – δηλαδή μέσω διαδοχικών αλληλεπιδράσεων των μορίων με τα γειτονικά τους μόρια – η διαταραχή διαδίδεται από μία περιοχή του ελαστικού μέσου στην άλλη και τελικά όλα τα μόρια – τα υλικά σημεία – του ελαστικού μέσου εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση.

Η διάδοση αυτής της διαταραχής στο ελαστικό μέσο ονομάζεται **μηχανικό κύμα**.

Ειδικότερα, ως **μηχανικό κύμα** χαρακτηρίζεται κάθε διαταραχή που διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα σ' ένα υλικό ελαστικό μέσο και κατά τη διάδοσή του μεταφέρεται μηχανική ενέργεια και ορμή χωρίς όμως να συμβαίνει μεταφορά ύλης - μάζας -.

Παρατήρηση.

1. Ο όρος **διαταραχή** έχει γενική σημασία και μπορεί να σημαίνει οποιαδήποτε μεταβολή διάφορων μεγεθών η οποία έχει τα χαρακτηριστικά Α.Α.Τ. Δηλαδή στη φυσική δεχόμαστε ότι κύμα είναι η διάδοση μιας ταλάντωσης.

Η φυσική δε προκειμένου να περιγράψει τις ποικίλες μορφές κυμάτων έχει διευρύνει την έννοια ταλάντωση.

Με την αρχική της σημασία η έννοια αυτή παραπέμπει στην παλινδρομική κίνηση ενός αντικειμένου. Με τη διευρυμένη όμως σημασία της σημαίνει την περιοδική μεταβολή μιας ποσότητας.

Έτσι η διαταραχή μπορεί να είναι η περιοδική:

α. απομάκρυνση των υλικών σημείων ενός ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας τους - π.χ κύμα σε χορδή -.

β. μεταβολή της πίεσης ή της πυκνότητας του αέρα - π.χ ηχητικό κύμα -.

γ. και ταυτόχρονη μεταβολή της έντασης ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου τα οποία είναι αλληλένδετα μεταξύ τους - π.χ το Η/Μ κύμα - κ.τ.λ .

Γενικά, η έννοια **κύμα** χρησιμοποιείται στη φυσική ως διεργασία - μηχανισμός - διάδοσης μιας διαταραχής, έτσι ώστε να μεταφέρεται ενέργεια χωρίς όμως να συμβαίνει μεταφορά ύλης_μάζας_.

2. Κάθε **κύμα** εκπορεύεται από μία **"πηγή"**, διαδίδεται σε κάποιο υλικό μέσο ή στο κενό και είναι δυνατόν να ανιχνευτεί από κάποιον **δέκτη**.

Η πηγή κάθε κύματος είναι ένας ταλαντωτής σε ελεύθερη ή εξαναγκασμένη ταλάντωση ενώ ο ανιχνευτής_δέκτης_είναι επίσης ένας ταλαντωτής ο οποίος ενεργοποιείται από αυτό.

Ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος.

Στα μηχανικά κύματα για να προκαλέσουμε την κυματική διαταραχή πρέπει να δώσουμε ενέργεια σε κάποιο υλικό σημείο του μέσου.

Έτσι το υλικό σημείο_πηγή ενεργοποιείται και εκτελεί, π.χ, αμείωτη ταλάντωση.

Όταν συμβεί αυτό, το υλικό σημείο_πηγή επιδρά στα "γειτονικά" του υλικά σημεία, δηλαδή τους ασκεί δύναμη ή σε άλλη γλώσσα, τους μεταβιβάζει ενέργεια, και έτσι τα "γειτονικά" υλικά σημεία αρχίζουν να εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη συχνότητα της πηγής.

Στη συνέχεια αυτά επιδρούν στα "γειτονικά" τους με τον ίδιο τρόπο, κ.ό.κ.

Έτσι ξεκινάει το ταξίδι της διαταραχής και η κίνηση_άρα και η ενέργεια_μεταφέρεται από υλικό σημείο σε υλικό σημείο του μέσου με πεπερασμένη ταχύτητα που ονομάζεται **ταχύτητα διάδοσης του κύματος**.

Αν σε χρόνο **t** η διαταραχή_το κύμα_διαδίδεται σε απόσταση **x** από την πηγή του κύματος, το πηλίκο $υ = \frac{x}{t}$ ορίζεται ως η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κύμα σ' ένα ελαστικό μέσο **εξαρτάται μόνο** από τις ιδιότητες του μέσου και όχι από το πόσο "ισχυρή" είναι η διαταραχή που δημιουργ χεί η πηχή του κύματος ή από το πόση είναι η συχνότητά της.

Μερικά είδη μηχανικών κυμάτων.

Αν κατά τη διάδοση ενός κύματος τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου:

α. <u>ταλαντώνονται κάθετα</u> στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος τα κύματα ονομάζονται <u>εγκάρσια</u>.

β. <u>ταλαντώνονται παράλληλα</u> στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος τα κύματα ονομάζονται <u>διαμήκη</u>.

γ. <u>ταλαντώνονται τόσο παράλληλα όσο και κάθετα</u> στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, με αποτέλεσμα οι τροχιές τους να είναι κυκλικές, τα κύματα ονομάζονται <u>επιφανειακά</u>.

Παρατήρηση

1. Τα κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια υγρών που βρίσκονται μέσα σε δοχεία μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση εγκάρσια.

2. Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται μόνο στα στερεά ενώ τα διαμήκη και στα στερεά και στα υγρά και στα αέρια.

3. Στα στερεά τα εγκάρσια κύματα κινούνται με μικρότερη ταχύτητα από τα διαμήκη.

Αν κατά τη διάδοση ενός κύματος τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου:

α. <u>κινούνται περιοδικά</u> τα κύματα ονομάζονται **περιοδικά**.

Αυτό συμβαίνει όταν η πηγή του κύματος εκτελεί περιοδική κίνηση.

β. <u>εκτελούν Α.Α.Τ</u> τα κύματα ονομάζονται

<u>αρμονικά.</u>

Αυτό συμβαίνει όταν η πηγή του κύματος εκτελεί Α.Α.Τ.

<u>Παρατήρηση.</u>

Οποιαδήποτε κυματική διαταραχή, όσο πολύπλοκη και αν είναι, μπορεί να αναλυθεί σε ένα σύνολο απλών αρμονικών κυμάτων με επιλεγμένα πλάτη και μήκη κύματος, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το αποτέλεσμα της συμβολής ενός αριθμού απλών αρμονικών κυμάτων.

Το αρμονικό κύμα είναι δηλαδή κάτι σαν "δομικός λίθος" όλων των κυμάτων.

<u>**Περίοδος (Τ) _ Συχνότητα (f)**</u> ενός μηχανικού κύματος ονομάζεται η περίοδος _ η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κατά τη διάδοση του κύματος.

Η συχνότητα ενός κύματος καθορίζεται, αποκλειστικά και μόνο, από την πηγή του κύματος και ισούται πάντοτε με τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής.

<u>**Μήκος κύματος (λ)**</u> ενός κύματος ονομάζεται η απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου.

Σε κάθε κύμα ισχύει ότι $υ = x/t$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό αν στη σχέση $υ = x/t$ είναι $x = λ$ τότε θα είναι και $t = T$.

Επομένως, $υ = λ/T$ και επειδή $f = 1/T$ θα είναι $\boxed{υ = λ \cdot f}$ (1).

Η σχέση (1) ονομάζεται <u>**θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής**</u> (Θ.Ε.Κ).

Από τη Θ.Ε.Κ προκύπτει ότι το μ.κ εξαρτάται τόσο από το μέσο διάδοσης _ από το οποίο εξαρτάται η ταχύτητα _ όσο και από την πηγή του κύματος – από την οποία εξαρτάται η συχνότητα.

<u>**Κυματική εικόνα**</u>: η εικόνα του συνόλου των υλικών σημείων του μέσου που παίρνουν μέρος στη διαδικασία διάδοσης του κύματος όσον αφορά τις θέσεις που βρίσκονται την κάθε χρονική στιγμή.

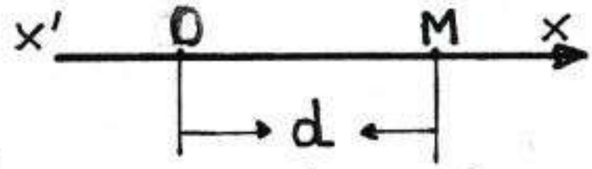
<u>**Στιγμιότυπο κύματος**</u>: η κυματική εικόνα μια ορισμένη χρονική στιγμή.

Κατά τη διάδοση ενός κύματος, η κυματική εικόνα διαρκώς μεταβάλλεται. Όμως, αν φωτογραφήσουμε το μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα δύο χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά μία περίοδο θα βλέπαμε ότι, παρόλο που το κύμα έχει προχωρήσει, η κυματική εικόνα να είναι η ίδια – όλα τα σωματίδια του μέσου, έχοντας εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, να βρίσκονται πάλι στις αρχικές τους θέσεις –.

Επομένως, <u>**περίοδος ενός κύματος** είναι επίσης το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται</u>.

<u>Η μαθηματική περιγραφή Α.Κ.</u>

Ως σύστημα αναφοράς, για τη μαθηματική περιγραφή του Α.Κ, θεωρείται σύστημα αξόνων με αρχή τη Θ.Ι της πηγής του κύματος, έστω Ο, και με άξονα x'x ο οποίος συμπίπτει με τη διεύθυνση διάδοσης.



Ως αρχή για τη μέτρηση του χρόνου θεωρείται μια χρονική στιγμή κατά την οποία η ταλαντούμενη σημειακή πηγή περνάει από τη Θ.Ι Ο με $\upsilon > 0$.

Στην περίπτωση αυτή η ταλάντωση της πηγής του Α.Κ περιγράφεται από την εξίσωση
$y = A\eta\mu\omega t$.

Έστω τώρα ένα υλικό σημείο Μ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται σε απόσταση d από τη Θ.Ι της πηγής Ο κατά τη διεύθυνση διάδοσης.

Η διαταραχή φθάνει στο υλικό σημείο Μ σε χρόνο $t_1 = d/u$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή t, σε κάθε "τώρα" το υλικό σημείο Μ έχει την απομάκρυνση που είχε η πηγή πρίν από χρόνο $t_1 = d/u$.

Η απομάκρυνση αυτή για την πηγή είναι $y = A\eta\mu\omega t$ ενώ για το υλικό σημείο Μ είναι $y = A\eta\mu\omega(t - d/u)$.

Είναι $\omega = 2\pi/T$ και $u = \lambda \cdot f = \lambda/T \rightarrow uT = \lambda$, οπότε $\underline{y = A\eta\mu 2\pi(t/T - d/\lambda)}$ (1).

<u>Όμως, αν x είναι η συντεταγμένη του υλικού σημείου Μ τότε:</u>

1. αν το υλικό σημείο Μ βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα Ox, δηλαδή το κύμα διαδίδεται πρός τη θετική κατεύθυνση, είναι $x > 0$, οπότε $d = |x| = x$ και η (1) γράφεται.

$$\boxed{y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda)} \quad (2).$$

2. αν το υλικό σημείο Μ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Ox', δηλαδή το κύμα διαδίδεται πρός την αρνητική κατεύθυνση, είναι $x < 0$, οπότε $d = |x| = -x$ και η (1) γράφεται

$$\boxed{y = A\eta\mu 2\pi(t/T + x/\lambda)} \quad (3).$$

Οι εξισώσεις (2) και (3) αποτελούν αντίστοιχα, σε κάθε περίπτωση, την εξίσωση του Α.Κ από την οποία προκύπτει η απομάκρυνση y που έχει, λόγω ταλάντωσης, ένα υλικό σημείο του ελαστικού μέσου που έχει συντεταγμένη x, μία ορισμένη χρονική στιγμή t.

Στις παραπάνω εξισώσεις:

α. η γωνία $\phi_M = 2\pi(t/T \pm x/\lambda)$ ονομάζεται **φάση** του υλικού σημείου Μ, ενώ η γωνία $\phi_\Pi = \omega t = 2\pi t/T$ ονομάζεται **φάση** της πηγής.

Σε κάθε περίπτωση είναι **$\phi_M < \phi_\Pi$.**

β. ο παράγοντας Α ονομάζεται **πλάτος** του του Α.Κ και ισούται με το πλάτος της ταλάντωσης της πηγής ή με το πλάτος ταλάντωσης ενός εκάστου υλικού σημείου του μέσου, λόγω του διαδιδόμενου κύματος.

Προσοχή

Επειδή η φάση **φ** ενός υλικού σημείου του μέσου που συμμετέχει στη διαδικασία διάδοσης του κύματος, εξαρτάται από τη συντεταγμένη του **x**, προκύπτει ότι τα υλικά σημεία του μέσου έχουν διαφορετικές φάσεις μία ορισμένη χρονική στιγμή **t**.

Ειδικότερα, κατά τη φορά διάδοσης του κύματος η φάση των υλικών σημείων του μέσου, μία ορισμένη χρονική στιγμή, μειώνεται μέχρι μηδενισμού.

Μηδενική φάση έχει το υλικό σημείο του μέσου, που τη δεδομένη χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται λόγω του διαδιδόμενου κύματος.

Διαφορά φάσης

Για τη διαφορά φάσης, **Δφ**, μία ορισμένη χρονική στιγμή, δύο υλικών σημείων του μέσου με συντεταγμένες x_1 και x_2 αντίστοιχα, όπου $x_1 < x_2$, ισχύει ότι:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 =$$
$$= 2\pi(t/T - x_1/\lambda) - 2\pi(t/T - x_2/\lambda) =$$
$$= 2\pi x_2/\lambda - 2\pi x_1/\lambda =$$
$$= 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda \longrightarrow \boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$$

ή επειδή $\omega = \Delta\phi/\Delta t \longrightarrow \Delta\phi = \omega\Delta t = 2\pi\Delta t/T$ (1), όπου Δt το χρονικό διάστημα προκειμένου το κύμα από το υλικό σημείο x_1 να φτάσει στο x_2.

Είναι $\Delta t = t_2 - t_1 = x_2/\upsilon - x_1/\upsilon =$
$= (x_2 - x_1)/\upsilon =$
$= \Delta x/\upsilon$, οπότε η (1) γράφεται

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta x}{\upsilon} \longrightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

Παρατήρηση

Όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, για τη μαθηματική περιγραφή Α.Κ, ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κατά τη διάδοση του κύματος δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας, οπότε και το πλάτος Α της Α.Τ των υλικών σημείων του μέσου διατηρείται σταθερό και ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης της πηγής του κύματος.

Γραφική παράσταση Α.Κ.

Η "εξίσωση" αρμονικού κύματος

$$y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda) \quad (1),$$

είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου t και της συντεταγμένης x _ της απόστασης x _ ενός υλικού σημείου του μέσου από την πηγή του κύματος _ την αρχή των συντεταγμένων.

Για το λόγο αυτό δεν είναι δυνατό να παρασταθεί γραφικά σε επίπεδο σχήμα.

Αν όμως η μία από τις δύο μεταβλητές θεωρηθεί σταθερή είναι δυνατή η γραφική της παράσταση.

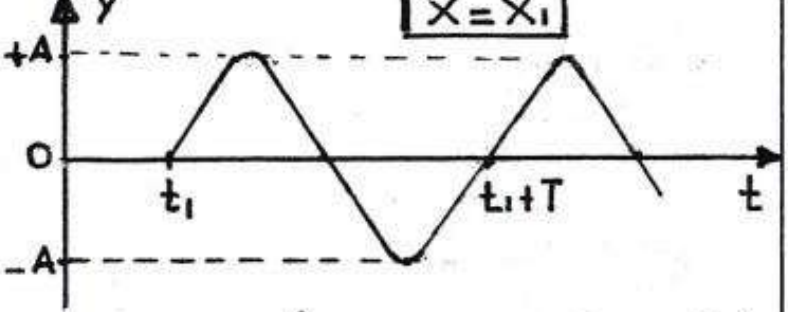
Έτσι αν:

Α. $x = x_1 = \sigma\tau\alpha\theta.$, η (1) γράφεται

$$y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x_1/\lambda),$$

και αναφέρεται σε ένα μόνο υλικό σημείο του μέσου _ αυτό που απέχει από την πηγή απόσταση $x = x_1$ _ και δίνει την απομάκρυνση από τη Θ.Ι του, λόγω ταλάντωσης, του συγκεκριμένου υλικού σημείου συναρτήσει του χρόνου t, όπου $t \geq t_1 = \frac{x_1}{\upsilon}$ — $t_1 = x_1/\upsilon$ είναι το χρονικό διάστημα προκειμένου το κύμα να φτάσει στο υλικό σημείο x_1 —.

Για $t = t_1 \longrightarrow y = 0$,
$t = t_1 + T/4 \longrightarrow y = A$
$t = t_1 + 2T/4 \longrightarrow y = 0$
$t = t_1 + 3T/4 \longrightarrow y = -A$
$t = t_1 + T \longrightarrow y = 0$



Στη συνέχεια η Γ.Π της $y = f(t)$ επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο.

B. <u>$t = t_1 =$ σταθ.</u>, η (1) γράφεται

$$y = A\eta\mu 2\pi\,(t_1/T - x/\lambda),$$

και αναφέρεται στο σύνολο των υλικών σημείων του μέσου που παίρνουν μέρος στη διαδικασία διάδοσης του κύματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 και δίνει την απομάκρυνση καθενός από αυτά από τη Θ.Ι του, λόγω ταλάντωσης, συναρτήσει της απόστασής του από την πηγή του κύματος, όπου $0 \leq x \leq x_1 = \upsilon t_1$ — $x_1 = \upsilon t_1$ είναι η απόσταση διάδοσης του κύματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 —.

Στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα της $y = f(x)$ ονομάζεται <u>**στιγμιότυπο**</u> του κύματος τη χρονική στιγμή t_1.

Το διάγραμμα της $y = f(x)$ για $t = t_1$ — το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = t_1$ — κατασκευάζεται βρίσκοντας την απομάκρυνση y των υλικών σημείων $x = 0$, $x = \lambda/4$, $x = 2\lambda/4$, $x = 3\lambda/4$, $x = \lambda$ σημειώνοντας κατόπιν ότι στη συνέχεια το διάγραμμα της $y = f(x)$ επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο μέχρι και το σημείο $x = x_1 = \upsilon t_1$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Το διάγραμμα της $y = f(x)$, για $t = t_1 =$ σταθ., έχει την ίδια μορφή τόσο για τα <u>εγκάρσια</u> όσο και για τα διαμήκη κύματα.

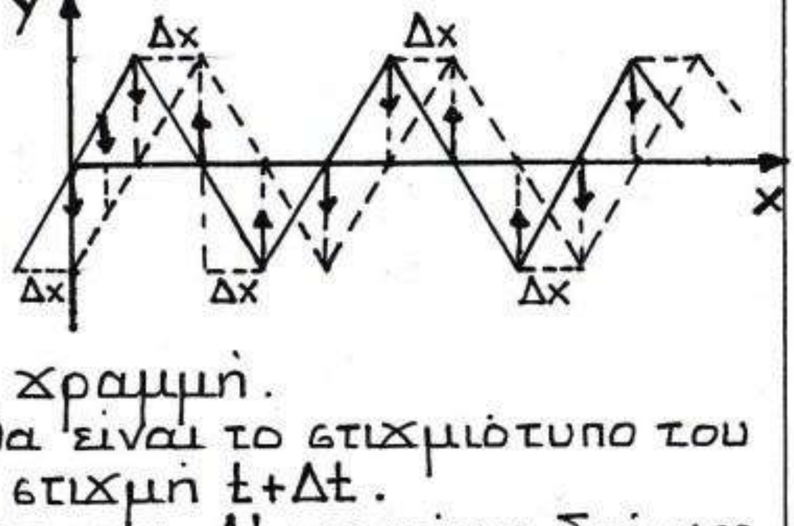
Στην περίπτωση όμως των εγκάρσιων Α.Κ που διαδίδονται σε γραμμικό ελαστικό μέσο – π.χ μία χορδή – το διάγραμμα της $y=f(x)$ έχει τη μορφή που έχει και το γραμμικό ελαστικό μέσο στο οποίο διαδίδεται το κύμα.

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, αποτελεί ένα είδος φωτογραφίας του κύματος. Αποτελεί δηλαδή, στην κυριολεξία πλέον, ένα στιγμιότυπο του κύματος – αποτελεί την εικόνα του ελαστικού μέσου (την κυματική εικόνα) όταν "παγώσουμε" το χρόνο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει όσον αφορά και τα υλικά σημεία ενός ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται ένα εγκάρσιο Α.Κ, που βρίσκονται κατά μήκος μίας ακτίνας διάδοσης.

Αυτός είναι και ο λόγος που το διάγραμμα της $y=f(x)$ ονομάζεται στιγμιότυπο του κύματος.

2. Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε το στιγμιότυπο ενός Α.Κ τη χρονική στιγμή t – πρόκειται για το διάγραμμα με τη συνεχή γραμμή.



Ας δούμε ποιο θα είναι το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$.

Στο χρονικό διάστημα Δt το κύμα διήνυσε απόσταση $\Delta x = \upsilon \Delta t$.

Αυτό σημαίνει ότι ένα τυχαίο υλικό σημείο του μέσου θα έχει τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ την απομάκρυνση που είχε τη χρονική στιγμή t το υλικό σημείο του μέσου που βρίσκεται στην ίδια ακτίνα διάδοσης και σε απόσταση Δx πριν από αυτό.

Επομένως το στιγμιότυπο του Α.Κ τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ θα είναι όπως το διάγραμμα με τη διακεκομένη γραμμή.

Επειδή λοιπόν κάθε υλικό σημείο του μέσου, όσον αφορά την απομάκρυνσή του y από τη Θ.Ι, καθυστερεί χρονικά ενός αμέσως προηγούμενου υλικού σημείου του μέσου που βρίσκεται στην ίδια ακτίνα διάδοσης,

<u>η μετατόπισή του λόγω ταλάντωσης - άρα και η ταχύτητά του - θα έχει, στο διάγραμμα y=f(x) και κατά τον άξονα y, κατεύθυνση προς τη θέση στην οποία βρίσκεται ένα αμέσως προηγούμενο υλικό σημείο του μέσου</u>.

3. Για τη διαφορά φάσης, **Δφ**, μία ορισμένη χρονική στιγμή, δύο υλικών σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα **Α.Κ**, και τα οποία βρίσκονται στην ίδια ακτίνα διάδοσης και σε απόσταση **Δx** ισχύει ότι

$$\Delta\phi = 2\pi \Delta x / \lambda.$$

Έτσι αν $\Delta x = \lambda$ θα είναι $\Delta\phi = 2\pi$.

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε **<u>το μήκος κύματος</u>** <u>ως την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών υλικών σημείων του μέσου που βρίσκονται στην ίδια ακτίνα διάδοσης και έχουν διαφορά φάσης 2π</u>,

δηλαδή έχουν την ίδια απομάκρυνση και κινούνται κατά την ίδια φορά.

Με βάση λοιπόν τα όσα αναφέρθηκαν συμπεραίνουμε ότι η απόσταση δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος, όπως φαίνεται και στο

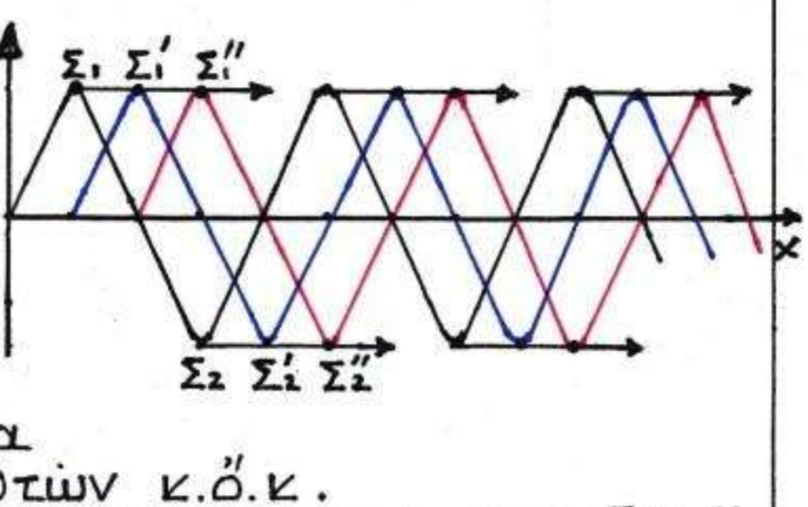
<u>διάγραμμα</u>, είναι ίση με λ.

Επομένως, σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου μία κορυφή θα έχει "μετατοπιστεί" κατά ένα μήκος κύματος.

4. Παρατηρώντας ένα εγκάρσιο Α.Κ που διαδίδεται σ' ένα ελαστικό μέσο κατά μήκος μίας ορισμένης ευθείας – ορισμένης διεύθυνσης, έστω x'x, διαπιστώνουμε ότι σε κάθε τμήμα της x'x που έχει μήκος ίσο με ένα μήκος κύματος λ, πάντοτε υπάρχει ένα υλικό σημείο **Σ_1** του μέσου διάδοσης που βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης **+Α** – υπάρχει, όπως λέμε, ένα <u>**"όρος"**</u> – και ένα άλλο υλικό σημείο **Σ_2** που βρίσκεται σε θέση **−Α** – υπάρχει, όπως λέμε, μία <u>**"κοιλάδα"**</u>.

Όλα τα υπόλοιπα υλικά σημεία του μέσου που καλύπτουν την απόσταση λ έχουν απομακρύνσεις μεταξύ **+Α** και **−Α**.

Την <u>αμέσως</u> επόμενη χρονική στιγμή στην ίδια <u>κατάσταση</u> με τα Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται τα <u>αμέσως γειτονικά</u> τους υλικά σημεία του μέσου διάδοσης, τη μεθεπόμενη τα αμέσως γειτονικά αυτών κ.ό.κ.



Έτσι, αν παρακολουθήσει κανείς την εξέλιξη των πραγμάτων, όσον αφορά **τις** απομακρύνσεις των υλικών σημείων του μέσου λόγω ταλάντωσης κατά τη διάδοση του κύματος, του δημιουργείται η αίσθηση ότι ένα υλικό σημείο του μέσου με απομάκρυνση **+Α** ή **−Α** – δηλαδή ένα "όρος" ή μία "κοιλάδα" – μετακινείται – "περπατάει" – και ότι πίσω από αυτό σε απόσταση **λ** υπάρχει ένα άλλο υλικό σημείο στην ίδια κατάσταση – ένα "όρος" η μία "κοιλάδα" που το ακολουθεί και ότι πίσω από αυτό σε απόσταση 2λ από το πρώτο υπάρχει και ένα άλλο υλικό σημείο που ακολουθεί κ.ό.κ.

Όταν δε λέμε ότι σ' ένα υλικό σημείο του μέσου διάδοσης φτάνουν, κατά τη διάδοση του κύματος – ή ότι από ένα υλικό σημείο του μέσου διέρχονται – π.χ. Ν=5 "όρη" σε χρονικό διάστημα

Δt, αυτό σημαίνει ότι το εν λόγω σημείο θα βρεθεί σε θέση μεγίστης απομάκρυνσης $+A$ 5 φορές στο χρονικό διάστημα Δt.

Αν θυμηθούμε δε ότι σε μία ταλάντωση ο ταλαντωτής βρίσκεται διαδοχικά σε θέση μεγίστης απομάκρυνσης μετά από μία επανάληψη της κίνησής του κάθε φορά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συχνότητα ενός κύματος ισούται με τον αριθμό, των "όρεων" _ αν πρόκειται για εγκάρσιο κύμα _ ή των "πυκνωμάτων" αν πρόκειται για διαμήκες _ που φτάνουν σ' ένα υλικό σημείο του μέσου, κατά τη διάδοση του κύματος, στη μονάδα του χρόνου.

5. Δύο υλικά σημεία ενός ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα Α.Κ θα λέμε ότι βρίσκονται:

α. Σε φάση, εφόσον έχουν διαφορά φάσης, $\Delta\phi = 2\kappa\pi$, όπου $\kappa = 0.1.2.3 \ldots$.

Όταν δύο υλικά σημεία του μέσου βρίσκονται σε φάση έχουν την κάθε χρονική στιγμή, λόγω ταλάντωσης, την ίδια απομάκρυνση, την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση.

Σε δύο διαδοχικά υλικά σημεία του μέσου που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης και είναι σε φάση αντιστοιχεί χρονική διαφορά $\Delta t = T$, απέχουν δηλαδή μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = \lambda^*$, ενώ σε δύο τυχαία υλικά σημεία του μέσου που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης και είναι σε φάση αντιστοιχεί χρονική διαφορά $\Delta t = \kappa T$, απέχουν δηλαδή μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = \kappa\lambda^*$, όπου $\kappa = 0.1.2\ldots$.

β. Σε αντίθεση φάσης, εφόσον έχουν διαφορά φάσης, $\Delta\phi = (2\kappa+1)\pi$, όπου $\kappa = 0.1.2\ldots$.

Όταν δύο υλικά σημεία του μέσου βρίσκονται σε αντίθεση φάσης έχουν την κάθε χρονική στιγμή, λόγω ταλάντωσης, αντίθετες απομακρύνσεις, αντίθετες ταχύτητες και αντίθετες επιταχύνσεις.

Σε δύο διαδοχικά υλικά σημεία του μέσου που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης και είναι σε αντίθεση φάσης αντιστοιχεί χρονική διαφορά $\Delta t = T/2$, απέχουν δηλαδή μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = \lambda/2$*, ενώ σε δύο τυχαία υλικά σημεία του μέσου που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης και είναι σε αντίθεση φάσης αντιστοιχεί χρονική διαφορά $\Delta t = (2k+1)T/2$, απέχουν δηλαδή μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = (2k+1)\lambda/2$*, όπου $k = 0.1.2\ldots$.

γ. <u>Σε διαφορά φάσης π/2</u> εφόσον έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi/2$.

Όταν δύο υλικά σημεία του μέσου βρίσκονται σε διαφορά φάσης π/2 τη χρονική στιγμή, που λόγω ταλάντωσης, η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ενός είναι μέγιστη του άλλου είναι μηδέν και αντιστρόφως. Όταν δε τα δύο αυτά υλικά σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης έχουν χρονική διαφορά $\Delta t = T/4$, απέχουν δηλαδή μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = \lambda/4$*.

---

* αφορά σε κάθε περίπτωση απόσταση θέσεων ισορροπίας που θεωρείται και ως απόσταση των υλικών σημείων μόνο στα εγκάρσια κύματα.

---

6. Αν η ταλάντωση της πηγής ενός Α.Κ περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ τότε:

αν το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά η εξίσωσή του είναι

$$\boxed{y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda + \phi_0/2\pi)}$$

αν το κύμα διαδίδεται κατά την αρνητική φορά η εξίσωσή του είναι

$$\boxed{y = A\eta\mu 2\pi (t/T + x/\lambda + \phi_o/2\pi)}$$

7. Για τη διαφορά φάσης, **Δφ**, ενός υλικού σημείου του μέσου, στο οποίο διαδίδεται ένα Α.Κ, το οποίο απέχει απόσταση **x** από την πηγή του κύματος, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2, όπου $t_2 > t_1$, ισχύει ότι:

$$\Delta\phi = 2\pi (t_2/T - x/\lambda) - 2\pi (t_1/T - x/\lambda) \rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2\pi (t_2 - t_1)/T \rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}.\Delta t}.$$

Α.Ζικμήδη

Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

1. Κάθε υλικό σημείο ενός ελαστικού μέσου το οποίο συμμετέχει στη διαδικασία διάδοσης ενός **Α.Κ** στο μέσο αυτό εκτελεί, λόγω του διαδιδόμενου κύματος, **Α.Α.Τ.**

Για την εν λόγω **Α.Α.Τ** ισχύουν όλα όσα γνωρίζουμε για τις Α.Α.Τ.

Συγκεκριμένα, αν η εξίσωση του διαδιδόμενου Α.Κ είναι η $y = A\eta\mu 2\pi (t/T - x/\lambda)$ οι εξισώσεις για την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση, λόγω ταλάντωσης, ενός υλικού σημείου που απέχει απόσταση x από την πηγή του κύματος, είναι αντίστοιχα

$y = A\eta\mu 2\pi (t/T - x/\lambda)$,

$\upsilon = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu 2\pi (t/T - x/\lambda)$, όπου $\upsilon_o = \omega A$,

$\alpha = -\alpha_o \eta\mu 2\pi (t/T - x/\lambda)$, όπου $\alpha_o = \omega^2 A$.

2. Αν γνωρίζουμε την εξίσωση ενός **Α.Κ** που διαδίδεται σ' ένα ελαστικό μέσο, μπορούμε να βρούμε τα χαρακτηριστικά του αν συγκρίνου με την εξίσωση του συγκεκριμένου Α.Κ με τη γενική μορφή της εξίσωσης που ισχύει για κάθε διαδιδόμενο Α.Κ.

Παράδειγμα

Έστω ότι το Α.Κ έχει εξίσωση $y = 0{,}02 ημ(8πt - 0{,}5πx)$ στο (S.I). Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την εξίσωση $y = Aημ2π(t/T \pm x/λ) = Aημ(2πt/T \pm 2πx/λ)$ που ισχύει για κάθε διαδιδόμενο Α.Κ, προκύπτει ότι:

α. το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση.

β. $A = 0{,}02m$.

γ. $2π/T = 8π \longleftrightarrow 2πf = 8π \longleftrightarrow f = 4Hz$.

δ. $2π/λ = 0{,}5π \longleftrightarrow λ = 4m$.

ε. Επειδή $υ = λ \cdot f \longrightarrow υ = 16 m/s$.

3. Η συχνότητα ενός Α.κύματος εκφράζει τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί στη μονάδα του χρόνου, ένα υλικό σημείο του μέσου στο οποίο διαδίδεται το Α.Κ.

Για την απόσταση όμως που διανύει το κύμα, κατά τη διάδοσή του, σε χρόνο t ισχύει ότι $x = υt \longleftrightarrow υ = x/t$.

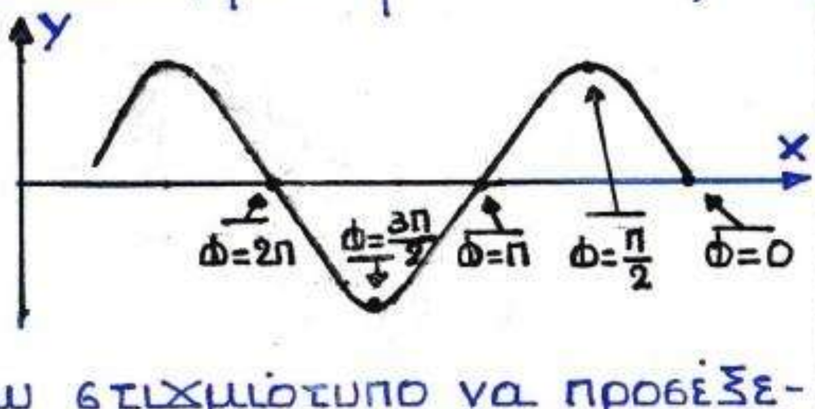
Είναι $υ = λ \cdot f$, οπότε $λ \cdot f = x/t \longleftrightarrow$
$f = (\frac{x}{λ})/t$. Επομένως,

η συχνότητα f εκφράζει τον αριθμό των μηκών κύματος ($x/λ$) που διανύει -ως απόσταση- το κύμα, κατά τη διάδοσή του, στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή,

η συχνότητα εκφράζει τον αριθμό των μηκών κύματος που διέρχονται από ένα σημείο ή φτάνουν σ' ένα σημείο, κατά μήκος σε μία ακτίνα διάδοσης στη μονάδα του χρόνου.

4. Τα υλικά σημεία του μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα Α.Κ έχουν, την κάθε χρονική στιγμή, λόγω ταλάντωσης, διαφορετικές φάσεις.

Μηδενική φάση έχει, μία χρονική στιγμή t, το υλικό σημείο που τη χρονική στιγμή t αρχίζει να ταλαντώνεται λόγω του κύματος που φτάνει σ' αυτό.



Στο παραπάνω στιγμιότυπο να προσέξετε τη φάση, λόγω ταλάντωσης, διαφόρων υλικών σημείων του μέσου που βρίσκονται στην ίδια ακτίνα διάδοσης.

5. Για να βρούμε σε ποιά απόσταση **x** από την πηγή του κύματος _ από τη θέση x=0, έχει φτάσει, κατά τη διάδοσή του, το Α.Κ κάποια χρονική στιγμή t μπορούμε είτε:

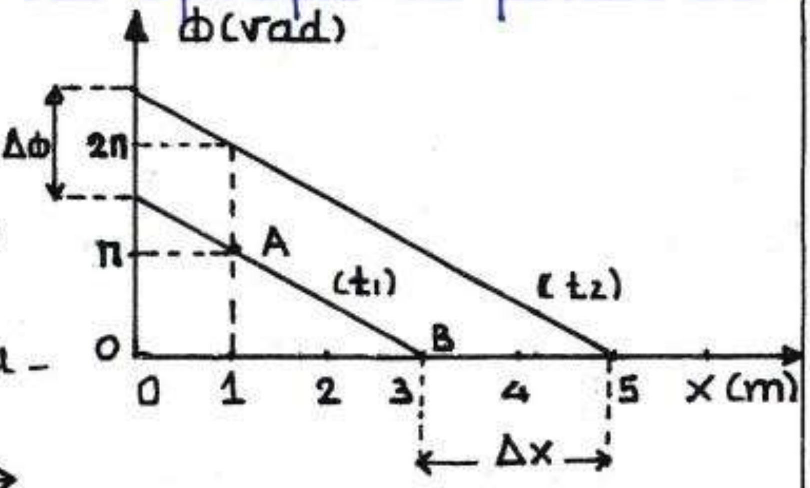
α. να αξιοποιήσουμε τη σχέση $x = υt$,

β. να μηδενίσουμε τη φάση $φ = 2π(t/T - x/λ)$ του κύματος και να λύσουμε ως προς **x**.

6. Αν γνωρίζουμε τη φάση δύο υλικών σημείων του μέσου διάδοσης ενός Α.Κ τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης καταλαβαίνουμε ποια είναι η φορά διάδοσης του κύματος.

"<u>Το κύμα διαδίδεται από το υλικό σημείο με τη μεγαλύτερη φάση προς το υλικό σημείο με τη μικρότερη.</u>"

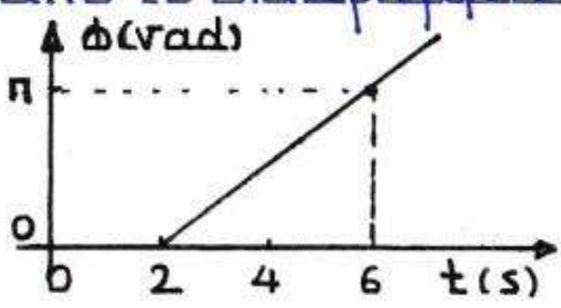
7. Από τη γραφική παράσταση της φάσης φ ενός Α.Κ σε συνάρτηση με την απόσταση x των υλικών σημείων από την πηγή του κύματος, τη γραφική παράσταση της $φ = f(x)$ – από το διάγραμμα κατανομής των φάσεων όπως λέγεται _ μπορούμε να βρούμε το μήκος κύματος λ μέσω της σχέσης $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ από την οποία προκύπτει ότι $\lambda = 2\pi\frac{\Delta x}{\Delta\phi}$.



Στην περίπτωση του διπλανού διαγράμματος είναι
$\lambda = 2\pi\Delta x_{AB}/\Delta\phi_{AB} \longrightarrow$
$\lambda = 2\pi(3-1)/(\pi-0) = 4\,m$.

Αν η γραφική παράσταση της $\phi=f(x)$ αφορά δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 τότε μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος μέσω των σχέσεων
$\omega = \Delta\phi/\Delta t \longrightarrow \underline{2\pi f = \Delta\phi/\Delta t}$ και $\underline{\upsilon = \Delta x/\Delta t}$,
και επειδή $=\lambda\cdot f \longleftrightarrow \lambda = \upsilon/f$ μπορούμε να υπολογίσουμε και το μήκος κύματος.

8. Από τη γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο _ από το διάγραμμα της $\phi = f(t)$ _ μπορούμε να βρούμε την κυκλική συχνότητα ω, άρα και την συχνότητα, μέσω της σχέσης $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ $\longrightarrow \underline{2\pi f = \Delta\phi/\Delta t}$.



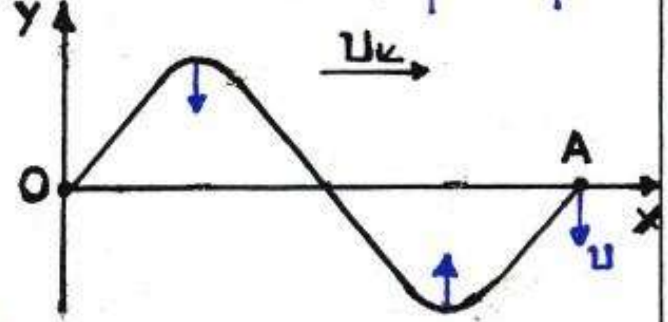
Στην περίπτωση του παραπάνω διαγράμματος είναι
$\omega = (\pi-0)/(6-2) \longrightarrow 2\pi f = \pi/4 \longleftrightarrow f = 0.125\,Hz$.

9. Όπως αναφέρθηκε ήδη η εξίσωση που περιγράφει ένα Α.Κ με αρχική φάση $\phi_0 \neq 0$ είναι της μορφής $y = A\eta\mu 2\pi(t/T \pm x/\lambda + \phi_0/2\pi)$

Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση που περιγράφει την Α.Α.Τ της πηγής του κύματος πού βρίσκεται στη θέση $x=0$ είναι

$y = A ημ(2πt/T + φ_0)$.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε υλικό σημείο του μέσου διάδοσης αρχίζει να ταλαντώνεται από τη Θ.Ι του, όταν το κύμα φτάνει σ'αυτό, με αρχική φάση $φ_0$.



Για να καταλάβουμε τι σημαίνει αυτό ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα Α.Κ του οποίου η πηγή βρίσκεται στη θέση $x=0$.

Αν το Α.Κ έχει αρχική φάση $φ_0 = π$ rad σημαίνει ότι και η πηγή του κύματος έχει αρχική φάση $φ_0 = π$ rad, δηλαδή ότι η πηγή του κύματος είχε αρχίσει να ταλαντώνεται από τη Θ.Ι της κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση _ με αρχική ταχύτητα $υ<0$.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε υλικό σημείο του μέσου διάδοσης, θα αρχίζει να ταλαντώνεται από τη Θ.Ι του, όταν το κύμα φτάνει σ'αυτό, πρός την αρνητική κατεύθυνση, και επομένως και το κύμα τη στιγμή που φτάνει σ'αυτό θα έχει φάση π rad.

Στην περίπτωση αυτή για να βρούμε σε ποια απόσταση x από την πηγή του κύματος _ από τη θέση $x=0$ _ έχει φτάσει κατά τη διάδοσή του το Α.Κ κάποια χρονική στιγμή t, αρκεί να θέσουμε στην εξίσωση της φάσης όπου $φ = φ_0$, στο παράδειγμά μας όπου $φ = π$ rad και να λύσουμε ως προς x. Το ίδιο βέβαια θα κάνουμε για να βρούμε ποια χρονική στιγμή το κύμα φτάνει σε κάποιο υλικό σημείο που βρίσκεται σε απόσταση x από την πηγή του κύματος.

<u>Θέμα 1º</u>

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης ϕ υλικού σημείου Μ ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται Α.Κ, που απέχει απόσταση x_1 από την πηγή του κύματος, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση.

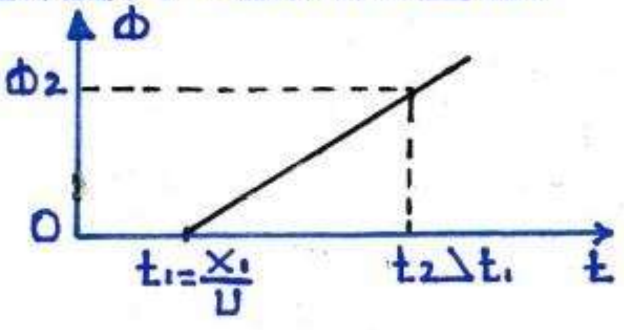
Στην $\phi = f(t)$ είναι

$\phi = 2\pi t/T - 2\pi x_1/\lambda$ (1), όπου $t \geq x_1/\upsilon$ _ $t_1 = x_1/\upsilon$ είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται προκειμένου το κύμα να φτάσει στο Μ, t_1 είναι η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο Μ. Έτσι,

όταν $t = t_1 = x_1/\upsilon \xrightarrow{(1)} \phi_1 = 0$

$t = t_2 > t_1 \xrightarrow{(1)} \phi_2 = 2\pi t_2/T - 2\pi x_1/\lambda > \phi_1$

Η (1) είναι 1ου βαθμού ως προς t. Επομένως η Γ.Π της $\phi = f(t)$ είναι ευθεία γραμμή όπως στο σχήμα.



Θέμα 2ο

Να κατασκευάσετε τη Γ.Π της φάσης ϕ των υλικών σημείων ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται Α.Κ, τη χρονική στιγμή t_1 όπου το κύμα φτάνει στο υλικό σημείο M_1 που απέχει απόσταση $x_1 = 2\lambda$ από την πηγή του κύματος _ το διάγραμμα της κατανομής των φάσεων τη χρονική στιγμή t_1 _ σε συνάρτηση με την απόστασή τους από την πηγή του κύματος. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε και το διάγραμμα κατανομής των φάσεων τη χρονική στιγμή t_2 όπου το κύμα φτάνει στο υλικό σημείο M_2 που βρίσκεται στη θέση $x_2 = 3\lambda$.

Απάντηση

Στην $\phi = f(x)$ είναι

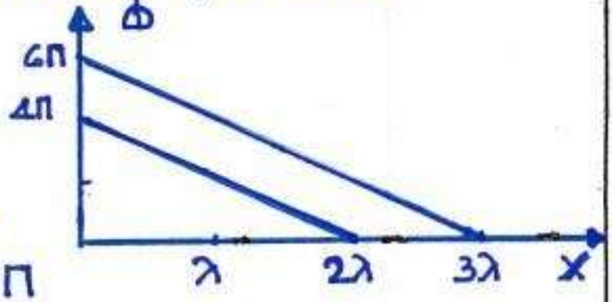
$\phi_1 = 2\pi t_1/T - 2\pi x/\lambda$, όπου $0 \leq x \leq x_1 = 2\lambda$.

Είναι $t_1 = x_1/u = 2\lambda/u = 2T$, οπότε

$\phi_1 = 4\pi - 2\pi x/\lambda$ (1).

Για $x = 0 \xrightarrow{(1)} \phi_1 = 4\pi$

$x = x_1 = 2\lambda \xrightarrow{(1)} \phi_1 = 0$



Η (1) είναι 1ου βαθμού ως προς x. Επομένως η Γ.Π της $\phi_1 = f(x)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα όπως στο σχήμα.

Είναι $\phi_2 = 2\pi t_2/T - 2\pi x/\lambda$, όπου $0 \leq x \leq x_2 = 3\lambda$, και $t_2 = x_2/u = 3\lambda/u = 3T$, οπότε

$\phi_2 = 6\pi - 2\pi x/\lambda$ (2).

Για $x = 0 \xrightarrow{(2)} \phi_2 = 6\pi$

$x = x_2 = 3\lambda \xrightarrow{(2)} \phi_2 = 0$.

Η Γ.Π της $\phi_2 = f(x)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα //λο πρός το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί στη Γ.Π της $\phi_1 = f(x)$.

Θέμα 3ο

(Ε.2009) Η εξίσωση ενός χραμμικού Α.Κ που διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x'x είναι:

$y = 0.4\,ημ 2\pi(2t - 0.5x)$ (S.I).

Αν η πηχή του κύματος βρίσκεται στη θέση x=0 και αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κινούμενη πρός τη θετική κατεύθυνση, να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 11/8$ s.

Απάντηση

Συχκρίνοντας την εξίσωση $y = 0.4\,ημ 2\pi(2t - 0.5x)$ με την εξίσωση $y = A\,ημ 2\pi(t/T - x/\lambda)$ που ισχύει για διαδιδόμενο Α.Κ κατά μήκος ενός άξονα x'x, προκύπτει ότι:

$A = 0.4$m , $T = 1/2 = 0.5$s και $\lambda = 2$m.

Είναι $\upsilon=\lambda\cdot f=\lambda/T \rightarrow \upsilon=4m/s$.

Τη χρονική στιγμή $t_1=11/8\,s$ το κύμα έχει φτάσει μέχρι το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x_1=\upsilon t_1=4\cdot 11/8\,m=11/2\,m=5.5m$

Στη συνάρτηση $y=f(x)$ είναι

$y=0.4\,\eta\mu\,2\pi(2t-0.5x)$, οπότε η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=11/8\,s$ είναι

$$y=0.4\,\eta\mu\,2\pi(2\cdot 11/8-0.5x) \leftrightarrow$$

$$y=0,4\,\eta\mu(11\pi/2-\pi x) \quad (1), \text{ όπου } 0\le x\le 5.5m$$

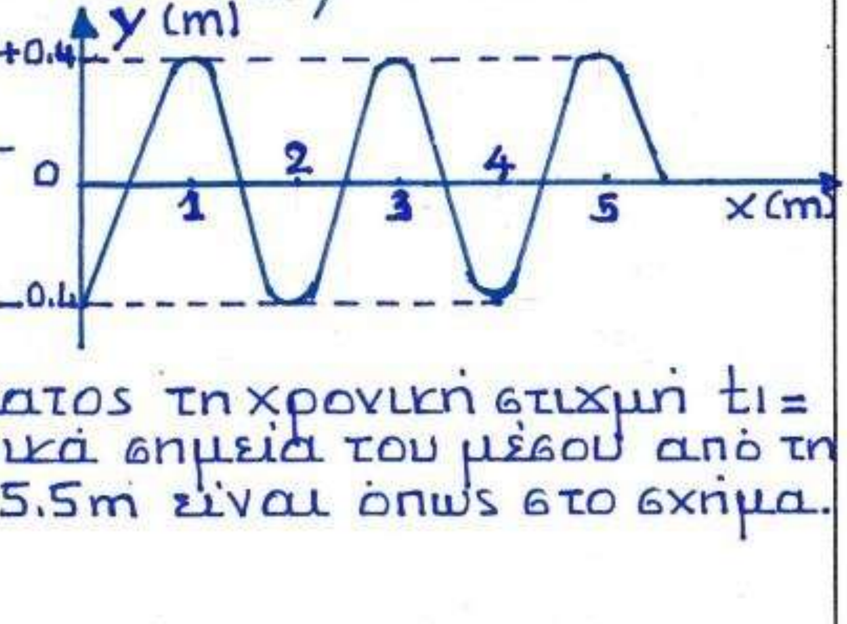
Άρα, για $x=0 \xrightarrow{(1)} y=-0.4m$

$x=\lambda/4=0.5m \xrightarrow{(1)} y=0$

$x=\lambda/2=1m \xrightarrow{(1)} y=0.4m$

$x=3\lambda/4=1.5m \xrightarrow{(1)} y=0$

$x=\lambda=2m \xrightarrow{(1)} y=-0.4m$.



Στη συνέχεια η Γ.Π της (1) – της $y=f(x)$ – επαναλαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο μέχρι την τιμή $x=5.5m$.

Έτσι, το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=11/8\,s$ για τα υλικά σημεία του μέσου από τη θέση $x=0$ έως $x=5.5m$ είναι όπως στο σχήμα.

Θέμα 4ο

Αν M_1, M_2 είναι δύο υλικά σημεία ενός ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα Α.Κ τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα διάδοσης και Φ_1, Φ_2 οι φάσεις αυτών των υλικών σημείων αντίστοιχα μία ορισμένη χρονική στιγμή t να αποδείξετε ότι:

"αν $\Phi_1 > \Phi_2$ το κύμα διαδίδεται με φορά από το υλικό σημείο M_1 προς το M_2 ενώ αν $\Phi_1 < \Phi_2$ από το M_2 προς το M_1."

Απόδειξη

Είναι $\phi_1 = 2\pi(t/T - x_1/\lambda)$,
$\phi_2 = 2\pi(t/T - x_2/\lambda)$, όπου x_1, x_2 οι αποστάσεις των M_1, M_2 αντίστοιχα από την πηγή του κύματος. Επομένως,

$$\phi_1 - \phi_2 = -2\pi(x_1 - x_2)/\lambda.$$

α. Αν $\phi_1 > \phi_2 \leftrightarrow \phi_1 - \phi_2 > 0 \rightarrow$

$$-2\pi(x_1 - x_2)/\lambda > 0 \leftrightarrow$$
$$x_1 - x_2 < 0 \leftrightarrow$$
$$x_1 < x_2$$

Επομένως, το κύμα διαδίδεται από το M_1 προς το M_2 διότι τη χρονική στιγμή t το M_1 βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από την πηγή του κύματος απ' ότι το M_2.

Δηλαδή, μέχρι τη χρονική στιγμή t το κύμα, κατά τη διάδοσή του, πρώτα περνάει από το M_1 και μετά φτάνει στο M_2.

β. Με τον ίδιο τρόπο.

Θέμα 5ο

Σ' ένα ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα Α.Κ.

Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης $\Delta\phi$ ενός υλικού σημείου του μέσου, που απέχει απόσταση x από την πηγή του κύματος, δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 με $t_2 > t_1$.

Απάντηση

Ένα υλικό σημείο του μέσου, λόγω του διαδιδόμενου κύματος, εκτελεί Α.Α.Τ με εξίσωση την εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda)$ που περιγράφει το διαδιδόμενο κύμα. Επομένως,

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 =$$
$$= 2\pi(t_2/T - x/\lambda) - 2\pi(t_1/T - x/\lambda) =$$
$$= 2\pi(t_2 - t_1)/T \longrightarrow$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t.$$

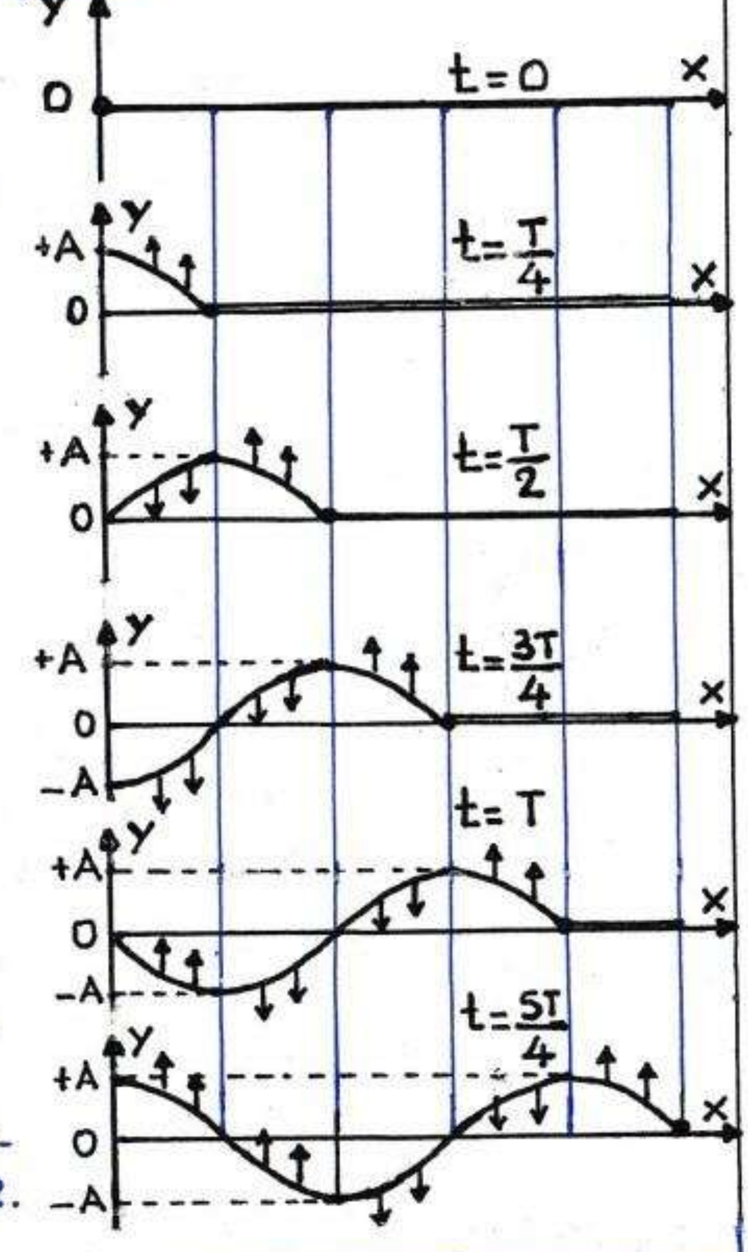
Θέμα 6ο

Ένα υλικό σημείο O ενός ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση $x=0$, αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ τη χρονική στιγμή $t_0=0$ κινούμενο πρός τη θετική κατεύθυνση.

Αν το O αποτελεί την πηγή ενός Α.Κ που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του κύματος αυτού τις χρονικές στιγμές $t_0=0$, $t_1=T/4$, $t_2=T/2$, $t_3=3T/4$, $t_4=T$ και $t_5=5T/4$.

Απάντηση.

Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της πηγής O είναι η $y=A\eta\mu 2\pi t/T$ ενώ του Α.Κ που δημιουργείται είναι η $y=A\eta\mu 2\pi(t/T-x/\lambda)$.



Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο του κύματος όταν:

1. $t_0=0$ είναι $y=0$, _έναρξη ταλάντωσης της πηγής_ ενώ $x_0=0$.

2. $t_1=T/4$ είναι $y=A\eta\mu 2\pi(1/4-x/\lambda)$ (1), ενώ μέχρι την t_1 το κύμα προχώρησε κατά $x_1=ut_1=uT/4=\lambda/4$, οπότε στην (1) είναι $0\leq x\leq\lambda/4$.

Για $x=0 \xrightarrow{(1)} y=A$

$x=\lambda/4 \xrightarrow{(1)} y=0$

3. $t_2=T/2$ είναι $y=A\eta\mu 2\pi(1/2-x/\lambda)$ (2), ενώ μέχρι την t_2 το κύμα προχώρησε κατά $x_2=ut_2=uT/2=\lambda/2$, οπότε στη (2) είναι $0\leq x\leq\lambda/2$.

Για $x=0 \xrightarrow{(2)} y=0$

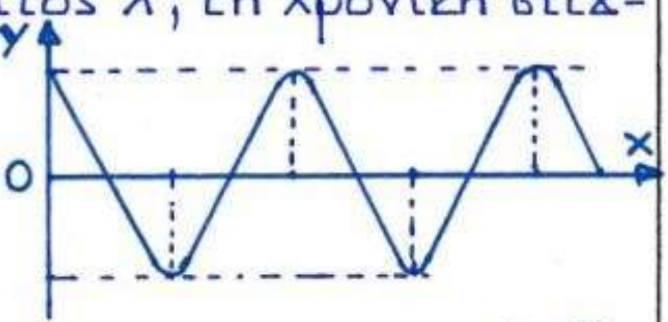
$x=\lambda/4 \xrightarrow{(2)} y=A$

$x=\lambda/2 \xrightarrow{(2)} y=0$

4. $t_3=3T/4$ είναι $y=A\eta\mu 2\pi(3/4-x/\lambda)$ (3),....
.... κ.ό.κ.

Θέμα 7ο

Το στιγμιότυπο ενός γραμμικού Α.Κ, με περίοδο Τ και μήκος κύματος λ, τη χρονική στιγμή t_1, φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Να αποδώσετε γραφικά την κατανομή των φάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_1, δηλαδή να σχεδιάσετε το διάγραμμα της $\phi=f(x)$.

Απάντηση

Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο του Α.Κ είναι η $y=A\eta\mu 2\pi(t_1/T-x/\lambda)$.

Επομένως στη $\phi=f(x)$ είναι $\phi=2\pi(t_1/T-x/\lambda)$ $\leftrightarrow \phi=(2\pi/T)t_1-(2\pi/\lambda)x$ (1).

Το κύμα μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1=9\lambda/4$.

Είναι $x_1=\upsilon t_1 \leftrightarrow t_1=x_1/\upsilon \rightarrow$

$t_1=(9\lambda/4)/\lambda\cdot T \leftrightarrow t_1=9T/4\,s$.

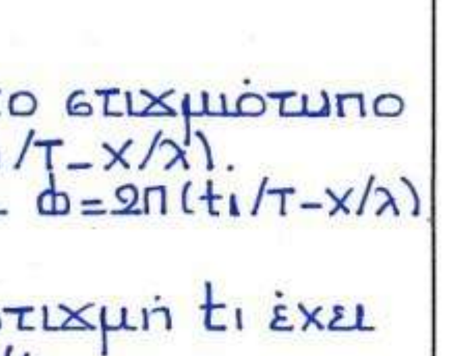
Για $t_1=9T/4$ η (1) γράφεται

$\phi=(2\pi/T)(9T/4)-(2\pi/\lambda)x \leftrightarrow$

$\underline{\phi=9\pi/2-(2\pi/\lambda)x}$ (2), όπου $0\le x\le 9\lambda/4$.

Για $x=0 \xrightarrow{(2)} \phi=9\pi/2$

$x=9\lambda/4 \xrightarrow{(2)} \phi=0$



Η (2) είναι 1ου βαθμού ως προς x. Επομένως, η Γ.Π της $\phi=f(x)$ θα είναι όπως στο σχήμα.

Θέμα 8ο

Σε γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα Α.Κ. Η εξίσωση που περιγράφει το διαδιδόμενο Α.Κ είναι η $y = \eta\mu 2000\pi(t-1)$ (S.I), ενώ ένα υλικό σημείο, έστω Μ, του μέσου διάδοσης βρίσκεται σε απόσταση $x = 2m$ από την πηγή του κύματος.

Να βρείτε ποιά χρονική στιγμή το Μ περνάει για χιλιοστή φορά, καθώς ταλαντώνεται λόγω του διαδιδόμενου κύματος, από τη θέση ισορροπίας του. Θεωρείστε ως χρονική στιγμή $t=0$ τη χρονική στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση της πηγής του κύματος.

Απάντηση

Σε κάθε περίοδο το Μ περνάει από τη Θ.Ι του 2 φορές, οπότε για να περάσει για χιλιοστή φορά πρέπει να περάσει χρόνος $\Delta t = 500T$ (1) από τη στιγμή που αρχίσει να ταλαντώνεται.

Είναι $y = \eta\mu 2000\pi(t-1) \longrightarrow$
$$y = \eta\mu 2\pi(1000t - 1000) \quad (2).$$

1ος τρόπος

Σε κάθε περίοδο όμως η φάση μεταβάλλεται κατά 2π, οπότε για τη φάση ϕ του Μ κατά τη χιλιοστή διέλευσή του από τη Θ.Ι του θα είναι $\phi = 500 \cdot 2\pi = 1000\pi$ rad.

Από τη (2) $\longrightarrow \phi = 2000\pi(t-1)$, οπότε θα είναι $2000\pi(t-1) = 1000\pi \longleftrightarrow$
$$2(t-1) = 1 \longleftrightarrow \underline{t = 1.5s}$$

2ος τρόπος

Συγκρίνοντας την (2) με την εξίσωση που περιγράφει κάθε διαδιδόμενο Α.Κ $y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda)$ προκύπτει ότι:

$T = 1/1000 = 10^{-3}s$ και $x/\lambda = 1000$

Το κύμα φτάνει στο σημείο Μ τη χρονική t_1, όπου $t_1 = x/u = x/\lambda \cdot T = (x/\lambda)T = 1s$.

Επομένως, το υλικό σημείο Μ περνάει χιλιοστή φορά από τη Θ.Ι του τη χρονική στιγ. $t = t_1 + \Delta t \xrightarrow{(1)} \Delta t = 500 \cdot 1/1000 = 0.5\,s$,
οπότε $t = 1 + 0.5 \longrightarrow \underline{t = 1.5\,s}$.

Θέμα 9ο

Η εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση ενός Α.Κ σ' ένα γραμμικό ελαστικό μέσο σ' ένα ελαστικό μέσο κατά μήκος μιας ακτίνας διάδοσης – είναι η $y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$.

Να εξηγήσετε τι εκφράζουν τα μεγέθη $2\pi/T$ και $2\pi/\lambda$ στην εξίσωση αυτή.

Απάντηση.

Είναι $\Delta\phi = 2\pi \cdot \Delta x/\lambda$, όπου $\Delta\phi$ η διαφορά φάσης μια ορισμένη χρονική στιγμή t, δύο υλικών σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το Α.Κ τα οποία βρίσκονται στην ίδια ακτίνα διάδοσης και απέχουν μεταξύ τους απόσταση Δx. Επομένως,

$\Delta\phi/\Delta x = 2\pi/\lambda$.

Δηλαδή, το μέγεθος $2\pi/\lambda$ εκφράζει το πόσο μεταβάλλεται η φάση, των υλικών σημείων του μέσου, ανά μονάδα μήκους την κάθε χρονική στιγμή.

Είναι $\Delta\phi = 2\pi \cdot \Delta t/T$, όπου $\Delta\phi$ η διαφορά φάσης, λόγω ταλάντωσης, ενός υλικού σημείου του μέσου που απέχει απόσταση x από την πηγή του κύματος δύο χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 > t_1$, οπότε $\Delta t = t_2 - t_1$. Επομένως,

$\Delta\phi/\Delta t = 2\pi/T$.

Δηλαδή, το μέγεθος $2\pi/T$ εκφράζει το πόσο μεταβάλλεται η φάση ενός υλικού σημείου του μέσου στη μονάδα του χρόνου – το ρυθμό μεταβολής της φάσης –.

Α. Ζιαμπή