Α. Ζαχαρή

§ 1-7 Σύνθεση ταλαντώσεων

Σύνθετη ταλάντωση· κάθε ταλάντωση που είναι αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο η περισσοτέρων ταλαντώσεων — η κίνηση που κάνει ένα σώμα που εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες ταλαντώσεις.

Σύνθεση ταλαντώσεων· η μελέτη μιας σύνθετης ταλάντωσης.

Δύο Α.Α.Τ της ίδιας συχνότητας βρίσκονται:

α. **σε φάση** εφόσον έχουν διαφορά φάσης, $\Delta\phi = 2\kappa\pi$, όπου $\kappa = 0.1.2\ldots$

Όταν δύο Α.Α.Τ βρίσκονται σε φάση όλα τα μεγέθη που τις περιγράφουν — απομάκρυνση, ταχύτητα, επιτάχυνση — παίρνουν ταυτόχρονα τις αντίστοιχες τιμές τους — μέγιστες, ελάχιστες, μηδέν κ.τ.λ.

β. **σε αντίθεση φάσης** εφόσον έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = (2\kappa+1)\pi$, όπου $\kappa = 0.1.2\ldots$

Όταν δύο Α.Α.Τ βρίσκονται σε αντίθεση φάσης όλα τα μεγέθη που τις περιγράφουν έχουν αντίστοιχα, την κάθε χρονική στιγμή, αλγεβρικές τιμές με αντίθετο πρόσημο. Π.χ αν $x_1 = +A_1$ θα είναι $x_2 = -A_2$, αν $\upsilon_1 = +\upsilon_{o(1)}$ θα είναι $\upsilon_2 = -\upsilon_{o(2)}$.

Όταν δύο Α.Α.Τ της ίδιας συχνότητας έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi \neq 2\kappa\pi$, όπου $\kappa = 0.1.2\ldots$ τότε τα μεγέθη που τις περιγράφουν δεν παίρνουν ταυτόχρονα τις αντίστοιχες τιμές τους.

Έτσι, αν κάποια χρονική στιγμή, ένα από τα μεγέθη που περιγράφουν την Α.Α.Τ που προηγείται σε φάση — έχει μεγαλύτερη φάση — έχει μία ορισμένη τιμή το αντίστοιχο μέγεθος της άλλης Α.Α.Τ θα πάρει την αντίστοιχη τιμή τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$, όπου $\Delta t = \Delta\phi . T/2\pi$.

Παράδειγμα

Έστω δύο Α.Α.Τ με εξισώσεις $x_1 = A_1 ημ(ωt)$ και $x_2 = A_2 ημ(ωt + π/2)$ αντίστοιχα.

Οι ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης $Δφ = π/2$. Αυτό σημαίνει ότι αν, π.χ, τη χρονική στιγμή t η απομάκρυνση της ταλάντωσης που προηγείται σε φάση είναι $x_2 = +A_2$ η απομάκρυνση της άλλης θα είναι αντίστοιχα $x_2 = +A_1$ μετά από χρονικό διάστημα $Δt = Δφ.T/2π \rightarrow Δt = T/4$.

Η αρχή της επαλληλίας των κινήσεων.

Όταν ένα σώμα _ υλικό σημείο _ εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις, κάθε μία από αυτές εξελίσσεται _ εκτελείται εντελώς ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία βρίσκεται το κινητό μετά από χρόνο t, είναι η ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα, είτε εκτελούνται διαδοχικά σε χρόνο t η κάθε μία.

Στην περίπτωση της επαλληλίας δύο ή περισσότερων κινήσεων η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κινητού μετά από χρόνο t ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων αντίστοιχα, που θα είχε το κινητό, αν εκτελούσε την κάθε κίνηση ανεξάρτητα από τις άλλες και επί χρόνο t την κάθε μία. Δηλαδή,

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \ldots \ , \ \vec{υ} = υ_1 + υ_2 + \ldots \ , \ \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots$$

Αν τα διανύσματα που προστίθενται είναι συγγραμμικά _ έχουν την ίδια διεύθυνση _ η πρόσθεσή τους ανάγεται στην αλγεβρική πρόσθεση των τιμών τους _ στην πρόσθεση των αλγεβρικών τιμών τους, αφού βεβαίως ορίσουμε κάποια φορά ως θετική.

Δηλαδή, $x = x_1 + x_2 + \ldots$, $υ = υ_1 + υ_2 + \ldots$, $a = a_1 + a_2 + \ldots$.

Όσον αφορά τώρα τις σύνθετες ταλαντώσεις, η κίνηση που προκύπτει από την επαλληλία δύο Α.Α.Τ εξαρτάται γενικά, από τις συχνότητες, τα πλάτη, τη διαφορά φάσης και τις διευθύνσεις των επιμέρους Α.Α.Τ.

Α. Σύνθεση δύο Α.Α.Τ της ίδιας διεύθυνσης που κινούνται γύρω από το ίδιο σημείο _ την ίδια Θ.Ι _ με την ίδια συχνότητα και αρχικές φάσεις $\phi_{o(1)} = 0$ και $\phi_{o(2)} = \phi$.

Έστω ότι ένα σώμα _ υλικό σημείο _ εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ με τα παραπάνω χαρακτηριστικά και εξισώσεις

$$x_1 = A_1 ημωt \quad και \quad x_2 = A_2 ημ(ωt+\phi).$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση x του σώματος κάθε στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2 \longrightarrow$$

$$x = A_1 ημ(ωt) + A_2 ημ(ωt+\phi)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\boxed{x = A ημ(ωt+θ)} \quad (1), \text{ όπου}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συν\phi}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\boxed{εφθ = \frac{A_2 ημ\phi}{A_1 + A_2 συν\phi}} \quad (3), \text{ όπου } 0 \leq θ \leq π$$

Από την (1) προκύπτει ότι το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ γύρω από την ίδια Θ.Ι, τη Θ.Ι των επιμέρους Α.Α.Τ, με την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα, τη διεύθυνση και τη συχνότητα των επιμέρους Α.Α.Τ.

1. <u>**Στην ειδική περίπτωση όπου $\phi = 0$**</u>, είναι $x_1 = A_1 ημ(ωt)$ και $x_2 = A_2 ημ(ωt)$, οπότε η εξίσωση κίνησης της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$x = x_1 + x_2 \longrightarrow x = A_1 ημ(ωt) + A_2 ημ(ωt) \longrightarrow$$

$$x = (A_1 + A_2) ημ(ωt) \longrightarrow \underline{x = A ημ(ωt)} \text{ όπου } A = A_1 + A_2$$

2. <u>**Στην ειδική περίπτωση που $\phi = π$**</u>, είναι

$x_1 = A_1 ημ(ωt)$ και $x_2 = A_2 ημ(ωt+π) \rightarrow$
$x_2 = -A_2 ημ(ωt)$, οπότε η εξίσωση κίνησης της σύνθετης ταλάντωσης είναι $x = x_1 + x_2 \rightarrow$

$$x = A_1 ημ(ωt) - A_2 ημ(ωt) \rightarrow$$

$$\underline{x = (A_1 - A_2) ημ(ωt)}$$ οπότε:

— αν $A_1 > A_2 \leftrightarrow A_1 - A_2 > 0 \rightarrow$

$\underline{x = A ημ(ωt)}$ όπου $\underline{A = A_1 - A_2}$, ενώ

— αν $A_1 < A_2 \leftrightarrow A_1 - A_2 < 0 \leftrightarrow A_2 - A_1 > 0$

$\rightarrow x = -(A_2 - A_1) ημ(ωt) = (A_2 - A_1) ημ(ωt+π)$

$\rightarrow \underline{x = A ημ(ωt+π)}$ όπου $\underline{A = A_2 - A_1}$.

Παρατηρήσεις

1. Απο τη στιγμή που θα βρούμε την εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης – πρόκειται όπως έχουμε αναφέρει για Α.Α.Τ – μπορούμε στη συνέχεια να απαντήσουμε σε οποιοδήποτε ερώτημα παρόμοιο με αυτά πού τίθενται στις Α.Α.Τ.

Π.χ γνωρίζοντας την εξίσωση της απομάκρυνσης μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της σύνθετης Α.Α.Τ.

2. Στην περίπτωση της επαλληλίας δύο Α.Α.Τ της ίδιας διεύθυνσης, όπως και σε κάθε σύνθετη κίνηση με συνιστώσες κινήσεις της ίδιας διεύθυνσης, προκειμένου να βρούμε τη στιγμιαία τιμή της απομάκρυνσης της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της σύνθετης Α.Α.Τ προσθέτουμε αλγεβρικά τις αντίστοιχες στιγμιαίες τιμές των επιμέρους Α.Α.Τ.

Δηλαδή, για την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση της σύνθετης Α.Α.Τ ισχύει ότι κάθε στιγμή είναι $x = x_1 + x_2$, $υ = υ_1 + υ_2$ $α = α_1 + α_2$.

Αντίθετα τα πλάτη των μεγεθών αυτών προστίθενται διανυσματικά θεωρώντας σαν γωνία σαν γωνία των δύο διανυσμάτων τη διαφορά φάσης ϕ των συνιστωσών Α.Α.Τ.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\text{συν}\phi}$,

$\upsilon_0=\sqrt{\upsilon_{01}^2+\upsilon_{02}^2+2\upsilon_{01}\cdot\upsilon_{02}\,\text{συν}\phi}$,

$\alpha_0=\sqrt{\alpha_{01}^2+\alpha_{02}^2+2\alpha_{01}\cdot\alpha_{02}\,\text{συν}\phi}$.

Άσκηση

Να βρείτε τα χαρακτηριστικά της σύνθετης κίνησης ενός σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ με την ίδια διεύθυνση, την ίδια Θ.Ι, την ίδια συχνότητα και διαφορά φάσης: α) $\phi=0$, β) $\phi=\pi$ rad.

Απάντηση

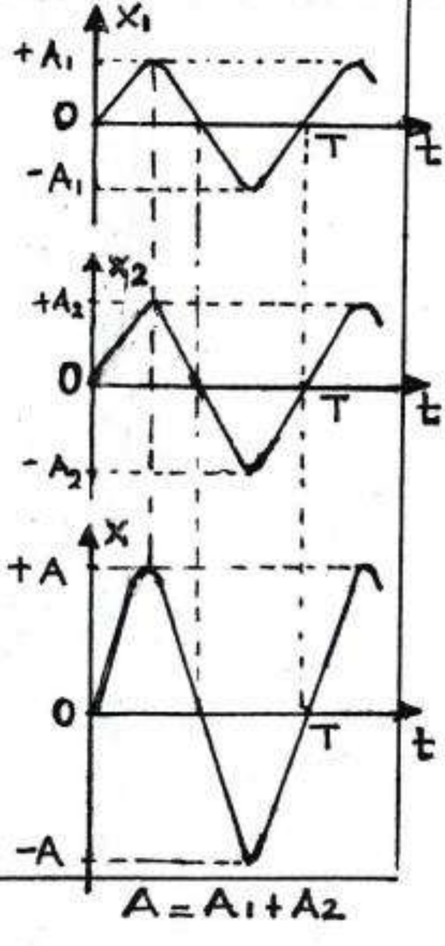
Αν $x_1=A_1\eta\mu(\omega_1 t)$ και $x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\phi)$ είναι οι εξισώσεις κίνησης των επιμέρους Α.Α.Τ η σύνθετη κίνηση θα είναι Α.Α.Τ με την ίδια διεύθυνση την ίδια Θ.Ι και την ίδια συχνότητα με τις επιμέρους Α.Α.Τ.

Για την απομάκρυνση x της συνθετης Α.Α.Τ ισχύει ότι:

$x=A\eta\mu(\omega t+\theta)$ (1), όπου

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\text{συν}\phi}$ (2),

$\varepsilon\phi\theta=A_2\eta\mu\phi/(A_1+A_2\text{συν}\phi)$ (3).



α. Όταν $\phi=0$,

από την (2) $\longrightarrow A=A_1+A_2$ και από την (3) $\longrightarrow \varepsilon\phi\theta=0 \longrightarrow \theta=\kappa\pi$, όπου $\kappa=0,1,2\ldots$

Από τις γραφικές παραστάσεις των $x_1=f(t)$, $x_2=f(t)$ και $x=f(t)$ προκύπτει ότι $\theta=0$. Δηλαδή η εξίσωση της συνθετης Α.Α.Τ είναι

$x=(A_1+A_2)\,\eta\mu(\omega t)$.

β. Όταν $\phi=\pi$ rad, δηλαδή όταν $x_1=A_1\eta\mu(\omega t)$ και $x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\pi)$

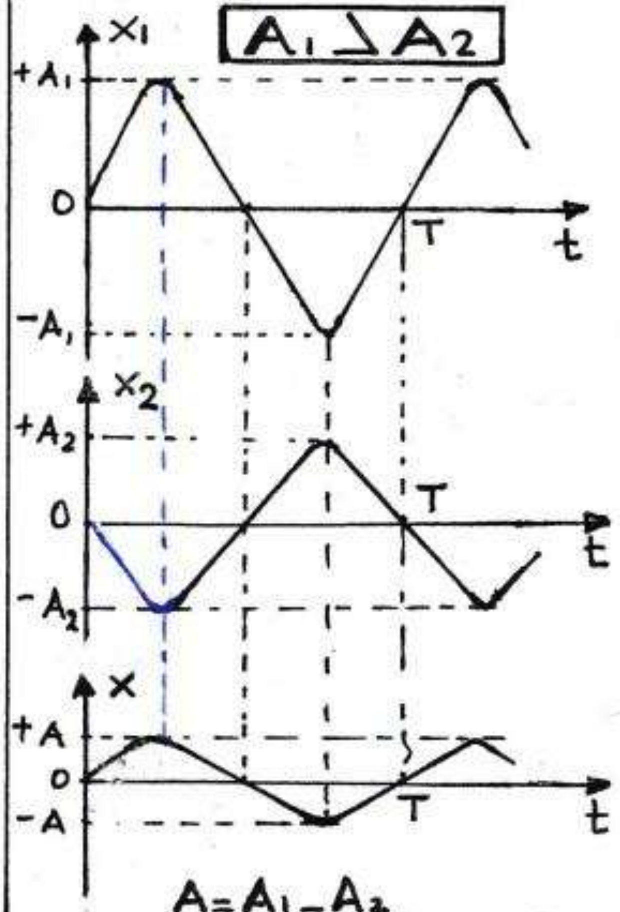
από την (2) $\rightarrow A = |A_1 - A_2|$ και από την (3) $\rightarrow$ $\varepsilon\varphi\theta = 0$, οπότε $\theta = \kappa\pi$, όπου $\kappa = 0.1.2\ldots$.

Από τις γραφικές παραστάσεις των $x_1 = f(t)$, $x_2 = f(t)$, $x = f(t)$ προκύπτει ότι:

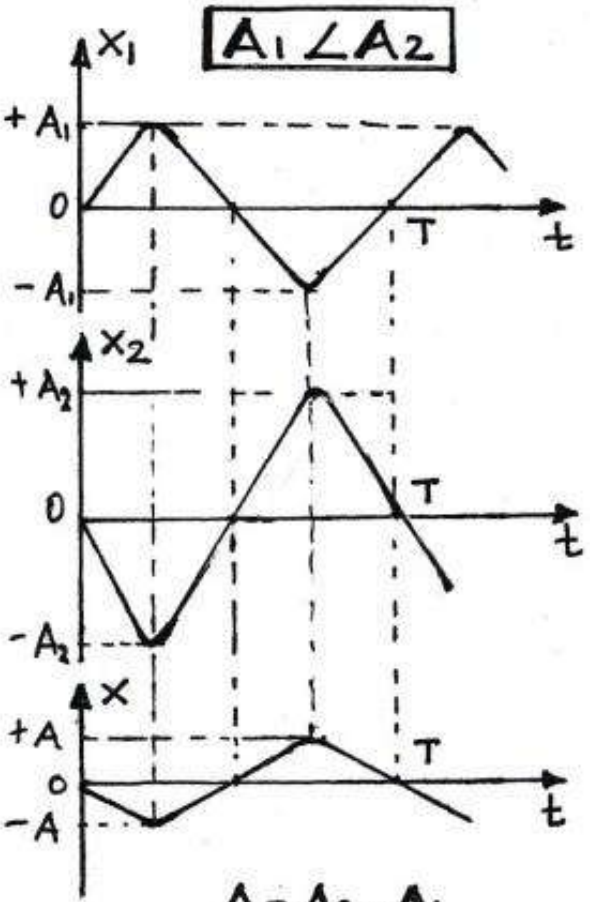
1. Αν $A_1 > A_2$ τότε $A = A_1 - A_2$ και $\theta = 0$, οπότε $\underline{x = (A_1 - A_2)\,\eta\mu(\omega t)}$

2. Αν $A_1 < A_2$ τότε $A = A_2 - A_1$ και $\theta = \pi\,rad$. οπότε $\underline{x = (A_2 - A_1)\,\eta\mu(\omega t + \pi)}$.

3. Αν $A_1 = A_2$ τότε $A = 0$, δηλαδή το σώμα είναι συνέχεια ακίνητο.



$A = A_1 - A_2$



$A = A_2 - A_1$

Προαιρετικά για όσους/ες θέλουν κάτι περισσότερο.

Απόδειξη των σχέσεων (1), (2), (3).

Είναι $x = x_1 + x_2 \rightarrow$

$x = A_1\,\eta\mu(\omega t) + A_2\,\eta\mu(\omega t + \varphi) \rightarrow$

$$x = A_1 ημ(ωt) + A_2 [ημ(ωt)συνφ + συν(ωt)ημφ]$$
$$\rightarrow x = A_1 ημ(ωt) + A_2 ημ(ωt)συνφ + A_2 συν(ωt)ημφ$$
$$\rightarrow x = (A_1 + A_2 συνφ)ημ(ωt) + A_2 συν(ωt)ημφ \rightarrow$$
$$\rightarrow x = (A_1 + A_2 συνφ)\left[ημ(ωt) + \frac{A_2 ημφ συν(ωt)}{A_1 + A_2 συνφ}\right]$$

Αν θέσουμε όπου

$\underline{A_2 ημφ / (A_1 + A_2 συνφ) = εφθ}$,

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x = (A_1 + A_2 συνφ)[ημ(ωt + εφθ συν(ωt)] =$$
$$= \frac{(A_1 + A_2 συνφ)[ημ(ωt)συνθ + ημθ συν(ωt)]}{συνθ} \rightarrow$$
$$x = \frac{A_1 + A_2 συνφ}{συνθ} \cdot ημ(ωt + θ) \rightarrow$$
$$\underline{x = Aημ(ωt + θ)}, \text{ όπου } A = \frac{A_1 + A_2 συνφ}{συνθ} \quad (1).$$

Είναι $εφθ = ημθ/συνθ \rightarrow εφ^2θ = ημ^2θ/συν^2θ \rightarrow$

$$εφ^2θ = (1 - συν^2θ)/συν^2θ \rightarrow συν^2θ = 1/(1 + εφ^2θ)$$

και επειδή $εφθ = A_2 ημφ/(A_1 + A_2 συνφ) \rightarrow$

$$συν^2θ = 1/\left[1 + \frac{A_2^2 ημ^2φ}{(A_1 + A_2 συνφ)^2}\right] \rightarrow$$
$$συνθ = (A_1 + A_2 συνφ)/\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συνφ}$$
$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συνφ} = \frac{A_1 + A_2 συνφ}{συνθ} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) $\rightarrow$

$$\underline{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συνφ}}\,.$$

Β. Σύνθεση δύο Α.Α.Τ της ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο – την ίδια Θ.Ι – , με διαφορετικές συχνότητες, το ίδιο πλάτος και αρχικές φάσεις μηδέν.

Έστω ότι ένα σώμα – υλικό σημείο – εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ με τα παραπάνω χαρακτηριστικά και εξισώσεις

$x_1 = A\eta\mu(\omega_1 t)$ και $x_2 = A\eta\mu(\omega_2 t)$, όπου $\omega_1 \simeq \omega_2$.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων η απομάκρυνση x του σώματος κάθε στιγμή θα είναι

$x = x_1 + x_2 \longrightarrow$

$x = A\eta\mu(\omega_1 t) + A\eta\mu(\omega_2 t) \longrightarrow$

$$\boxed{x = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t} \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) φαίνεται ότι η κίνηση του σώματος είναι πολύπλοκη.

Στην περίπτωση όμως που οι δύο επιμέρους συχνότητες διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους και ταυτόχρονα η διαφορά των συχνοτήτων είναι αρκετά μικρή σε σχέση με τις επιμέρους συχνότητες δηλαδή $|f_1-f_2| \ll f_1 \simeq f_2$, ο παράγοντας

$$\boxed{A' = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Delta\Phi}{2}}$$

στη σχέση (1) μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο πολύ πιο αργά, δηλαδή με πολύ μεγαλύτερη περίοδο, έστω T_π, από τον παράγοντα $\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$ ο οποίος μεταβάλλεται με περίοδο T.

Είναι $T_\pi = 2T_1T_2/(T_2-T_1)$ και

$T = 2T_1T_2/(T_1+T_2)$, $T \simeq T_2$, οπότε $T_\pi \gg T$.

Αυτό έχει σάν αποτέλεσμα ο παράγοντας A' στη διάρκεια μιας περιόδου T να παραμένει πρακτικά σταθερός. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η απόλυτη τιμή του $|A'|$ αποτελεί το "πλάτος" της σύνθετης ταλαντωτικής κίνησης.

Ο παράγοντας $\eta\mu[(\omega_1+\omega_2)\cdot t/2]$ μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο με γωνιακή συχνότητα $\bar{\omega} = (\omega_1+\omega_2)/2 \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$

Επομένως η σχέση (1) μπορεί να γραφεί

$$\boxed{x = |A'|\,\eta\mu(\bar{\omega}t)} \quad (2).$$

Η σχέση (2) περιγράφει μια ιδιόμορφη ταλάντωση που έχει περίπου την ίδια συχνότητα με τις επιμέρους ταλαντώσεις.

Το **"πλάτος"** $|A'|$ αυτής της ιδιόμορφης ταλάντωσης μεταβάλλεται αρχά με το χρόνο από **0** έως **2A**, με περίοδο $T_\delta = T_\Pi/2 \longrightarrow T_\delta = T_1 \cdot T_2 / |T_1 - T_2|$ _ εφόσον ο παράγοντας A' μεταβάλλεται από $-2A$ έως $+2A$ _.

Οι περιοδικές μεταβολές _ αυξομειώσεις _ του "πλάτους" της συνισταμένης ταλάντωσης ονομάζονται **διακροτήματα**.

Παρατηρήσεις

1. Το "πλάτος" $|A'|$ της συνισταμένης ταλάντωσης παίρνει την τιμή **0** όταν οι επιμέρους ταλαντώσεις βρίσκονται σε αντίθεση φάσης _ $\Delta\phi = (2K+1)\pi$, $K = 0.1.2...$ _ ενώ την τιμή $2A$ όταν βρίσκονται σε φάση _ $\Delta\phi = 2K\pi$, $K = 0.1.2..$ _.

Αυτό που συμβαίνει, καθώς ο χρόνος κυλά, είναι ότι, ενώ αρχικά _ τη χρονική στιγμή $t=0$ _ οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις βρίσκονται σε φάση _ $\Delta\phi = 0$ _ σταδιακά δημιουργείται μεταξύ τους μία διαφορά φάσης. Έτσι, τη χρονική στιγμή, έστω t_1, έχουν διαφορά φάσης π rad _ βρίσκονται πλέον σε αντίθεση φάσης _ τη χρονική στιγμή, έστω $t_2 > t_1$, έχουν διαφορά φάσης 2π rad _ βρίσκονται πάλι σε φάση _ και αυτό συνεχίζεται περιοδικά με συχνότητα f_Π, όπου f_Π η συχνότητα μεταβολής του παράγοντα A'.

2. **Περίοδο (T_δ) των διακροτημάτων** ονομάζουμε το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών θεωρητικών μεγιστοποιήσεων ή μηδενισμών του "πλάτους" της σύνθετης ταλάντωσης.

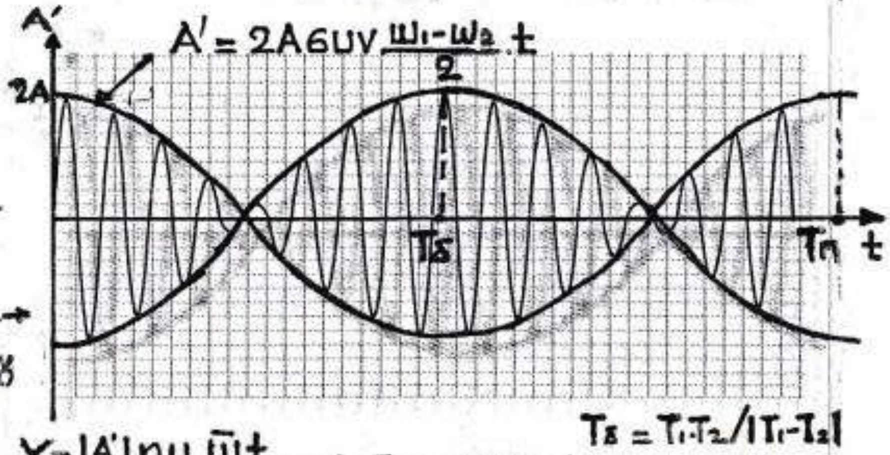
Σημείωση: όταν λέμε θεωρητικών μεγιστοποιήσεων ή μηδενισμών εννοούμε ότι εκείνη τη στιγμή το σώμα πx που εκτελεί τη σύνθετη ταλάντωση δε βρίσκεται οπωσδήποτε στην ακραία θέση της ταλάντωσής του ή στη **Θ.Ι** του.

Είναι $T_\delta = t_2 - t_1$, όπου t_1, t_2 δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές $t_2 > t_1$ στις οποίες το "πλάτος" $|A'| = 2A|συν\frac{ω_1-ω_2}{2}t|$ μηδενίζεται ή μεγιστοποιείται.

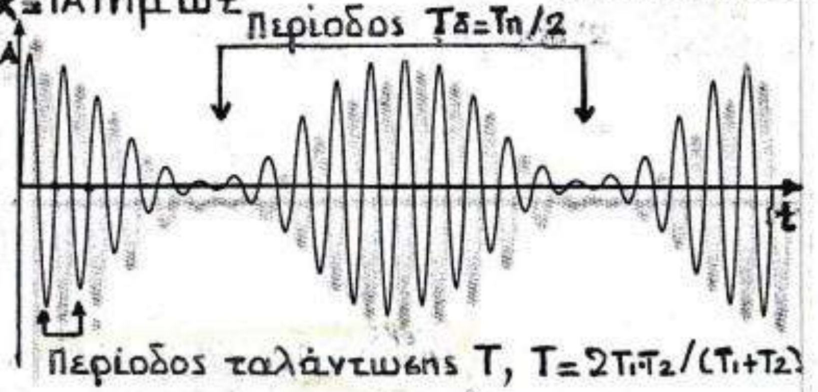
α. Το "πλάτος" μηδενίζεται όταν: $συν[(ω_1-ω_2)t/2]=0$, και αυτό συμβαίνει όταν:

$|ω_1-ω_2|\cdot t/2 = (2k+1)π/2 \rightarrow$

$|ω_1-ω_2|\cdot t = (2k+1)π$, όπου $k=0,1,2\ldots$.



Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι αυτές για τις οποίες ισχύει:



$|ω_1-ω_2|\cdot t_1 = (2k+1)π \rightarrow$

$t_1 = (2kπ+π)/|ω_1-ω_2|$

και

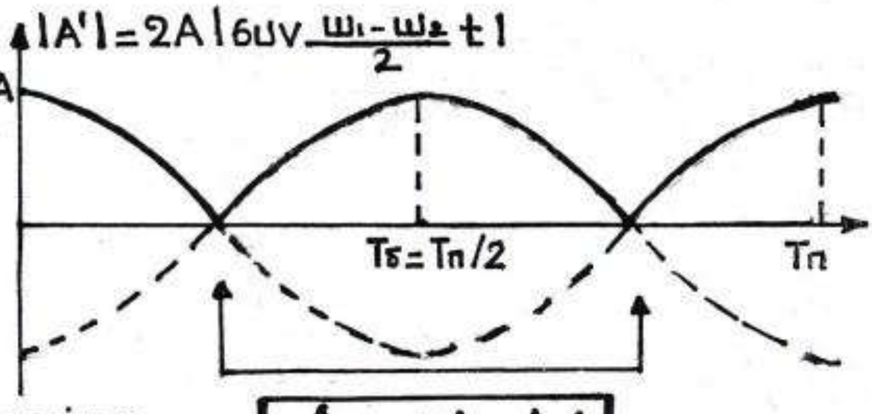
$|ω_1-ω_2|\cdot t_2 = [2(k+1)+1]π \rightarrow$

$t_2 = (2kπ+3π)/|ω_1-ω_2|$

Επομένως

$T_δ = t_2 - t_1 \rightarrow$

$T_δ = 2π/|ω_1-ω_2| \rightarrow$



$\boxed{T_δ = \frac{1}{|f_1-f_2|}}$, οπότε $\boxed{f_δ = |f_1-f_2|}$

β. Το "πλάτος" $|A'|$ γίνεται μέγιστο όταν:

$συν[(ω_1-ω_2)t/2] = \pm 1$, και αυτό συμβαίνει όταν: $|ω_1-ω_2|\cdot t/2 = kπ \rightarrow$

$|ω_1-ω_2|\cdot t = 2kπ$, $k=0,1,2\ldots$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι αυτές για τις οποίες ισχύει:

$$|\omega_1-\omega_2|\cdot t_1 = 2\kappa\pi \rightarrow$$

$$\underline{t_1 = 2\kappa\pi/|\omega_1-\omega_2|} \quad \text{και}$$

$$|\omega_1-\omega_2|\cdot t_2 = 2(\kappa+1)\pi \rightarrow$$

$$\underline{t_2 = (2\kappa\pi+2\pi)/|\omega_1-\omega_2|}$$

Επομένως

$$T_\delta = t_2-t_1 \rightarrow T_\delta = 2\pi/|\omega_1-\omega_2| \rightarrow$$

$$\boxed{T_\delta = \frac{1}{|f_1-f_2|}} \text{, οπότε } \boxed{f_\delta = |f_1-f_2|}$$

Χ. Το "πλάτος" $|A'|$ μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο από **0** έως **2A** με περίοδο $T_\delta = T_\pi/2$, όπου T_π η περίοδος των μεταβολών του παράγοντα $A' = 2A\,\text{συν}[(\omega_1-\omega_2)t/2]$.

Είναι $\omega_\pi = |\omega_1-\omega_2|/2 \rightarrow$

$$2\pi/T_\pi = |2\pi f_1-2\pi f_2|/2 \rightarrow$$

$$1/T_\pi = |f_1-f_2|/2 \rightarrow$$

$$T_\pi = 2/|f_1-f_2| \rightarrow$$

$$T_\delta = 1/|f_1-f_2| \text{, οπότε } f_\delta = |f_1-f_2|.$$

Προσοχή

Η περίοδος T_δ και η συχνότητα f_δ δεν πρέπει να συγχέονται αντίστοιχα με την περίοδο **T** και τη συχνότητα **f** της συνισταμένης ταλαντωτικής κίνησης για τις οποίες ισχύει ότι:

$$T = 2T_1\cdot T_2/(T_1+T_2) \simeq T_1 \simeq T_2$$

$$f = (f_1+f_2)/2 \simeq f_1 \simeq f_2.$$

Α. Ζιάτπώη