§ 1.4 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

ο Πυκνωτής

Ο **πυκνωτής** είναι μία διάταξη που αποτελείται από δύο αγωγούς που διαχωρίζονται από μονωτικό υλικό και χρησιμεύει ως αποθήκη ηλεκτρικού φορτίου και επομένως και ηλεκτρικής ενέργειας.

Οι δύο αγωγοί ονομάζονται **οπλισμοί του πυκνωτή**.

Όταν ο πυκνωτής φορτίζεται οι δύο οπλισμοί, αλληλεπιδρώντας, αποκτούν αντίθετα ηλεκτρικά φορτία $+Q$ και $-Q$ και ως **φορτίο του πυκνωτή** χαρακτηρίζεται η απόλυτη τιμή $|Q|$ του φορτίου ενός από τους δύο οπλισμούς του.

Ο οπλισμός του πυκνωτή με το $+Q$ φορτίο έχει μεγαλύτερη τιμή δυναμικού και ονομάζεται **θετικός(+)** οπλισμός ενώ ο οπλισμός με το $-Q$ φορτίο έχει μικρότερη τιμή δυναμικού και ονομάζεται **αρνητικός(−)**.

Η διαφορά δυναμικού $V_C = V^{(+)} - V^{(-)}$, δηλαδή αυτή που προκύπτει αν από το δυναμικό του θετικού οπλισμού αφαιρέσουμε το δυναμικό του αρνητικού, ονομάζεται **τάση του πυκνωτή**.

Για να φορτίσουμε έναν πυκνωτή συνδέουμε τους οπλισμούς του με τους πόλους μιας ηλεκτρικής πηγής συνεχούς τάσης. Η τάση V_C του πυκνωτή είναι τότε ίση με την πολική τάση V_π της πηγής, δηλαδή $V_C = V_\pi = E$, όπου E η ΗΕΔ της πηγής.

Η χωρητικότητα C ενός πυκνωτή είναι το φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τον κάθε πυκνωτή και για κάθε πυκνωτή έχει τιμή σταθερή, ανεξάρτητη δηλαδή από την τάση και το φορτίο του για τα οποία όμως σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $C = \frac{Q}{V_c}$.

Σε κάθε φορτισμένο πυκνωτή είναι αποθηκευμένη ηλεκτρική ενέργεια – δηλαδή ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο Η.Π του πυκνωτή. Πρόκειται για δυναμική ενέργεια – ενέργεια πεδίου συντηρητικών δυνάμεων – η οποία υπολογίζεται από τη σχέση $U = \frac{1}{2} C V_c^2$ και επειδή $C = \frac{Q}{V_c} \longrightarrow U = \frac{1}{2} Q V_c = \frac{Q^2}{2C}$.

Η ηλεκτρική ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή είναι ίση με το έργο που απαιτείται για τη φόρτισή του.

<u>Προσοχή</u>

Στο συνεχές ρεύμα ο πυκνωτής λειτουργεί ως <u>**διακόπτης**</u>.

<u>Το φαινόμενο της Αυτεπαγωγής.</u>

Ως γνωστόν <u>ηλεκτρομαγνητική επαγωγή</u> ονομάζεται το φαινόμενο της εμφάνισης τάσης στα άκρα αγωγών ή της δημιουργίας Η.Ε.Δ σε αγωγούς όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζουν με το σχήμα τους ή όταν από την επιφάνεια πού σαρώνουν με την κίνησή τους διέρχεται μαγνητική ροή.

<u>**Η αυτεπαγωγή**</u> αποτελεί ειδική περίπτωση του φαινομένου της επαγωγής και ως <u>αυτεπαγωγή ονομάζουμε το φαινόμενο της δημιουργίας Η.Ε.Δ σ' ένα κύκλωμα όταν μεταβάλλεται το ρεύμα που το διαρρέει</u>.

<u>Παρατήρηση</u>

1. Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής εκδηλώνεται ιδιαίτερα έντονα, δηλαδή δίνει μετρήσιμα αποτελέσματα, σε κυκλώματα που, εκτός των άλλων, διαθέτουν και πηνίο.

2. <u>**Πηνίο**</u> είναι ένα σύστημα – σύνολο – από κυκλικούς αγωγούς της ίδιας ακτίνας που είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους έτσι ώστε να έχουν τον ίδιο άξονα και τα επίπεδά τους να είναι παράλληλα και να ισαπέχουν.

Όταν ένα πηνίο διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως i στο εσωτερικό του δημιουργείται μαγνητικό πεδίο το οποίο, στην περιοχή περί το κέντρο του πηνίου, είναι ομογενές και έχει μαγνητική επαγωγή $B=K_\mu 4\pi N i/\ell$ η φορά του οποίου καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

— Όταν σε κύκλωμα με πηγή (E,r), αντίσταση R και διακόπτη, κλείσουμε το διακόπτη η ένταση του ρεύματος παίρνει ακαριαία τη μέγιστη τιμή της $I=E/R_{ολ}$.

Όταν όμως το κύκλωμα διαθέτει και πηνίο τότε με το κλείσιμο του διακόπτη η ένταση του ρεύματος δεν παίρνει ακαριαία τη μέγιστη τιμή της, $I=E/R_{ολ}$, αλλά μετά από κάποιο σχετικά μικρό χρονικό διάστημα το οποίο εξαρτάται από τις ωμικές αντιστάσεις του κυκλώματος και τα χαρακτηριστικά του πηνίου.

Το γεγονός αυτό οφείλεται στο φαινόμενο της αυτεπαγωγής και θεωρητικά εξηγείται ως εξής.

Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, η ένταση του ρεύματος είναι μηδέν — $i=0$ —.

Όταν κλείσει ο διακόπτης, έχουμε μεταβολή της έντασης του ρεύματος — $\Delta i = i - 0$ —, άρα και μεταβολή της έντασης του μαγνητικού πεδίου B, στο εσωτερικό του πηνίου — $\Delta B = K_\mu \cdot 4\pi N \Delta i/\ell$ —, έχουμε δηλαδή μεταβολή της μαγνητικής ροής Φ που διέρχεται από τις σπείρες του πηνίου — $\Delta\Phi = N\cdot\Delta B\cdot S$ —.

Η μεταβολή $\Delta\Phi$ της μαγνητικής ροής έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ΗΕΔ από επαγωγή στο πηνίο — $E_{επ} = N\,\Delta\Phi/\Delta t$ — η οποία έχει πολικότητα τέτοια ώστε να "αντιτίθεται" στο αίτιο που την προκαλεί — κανόνας του Lenz —.

[Σημείωση

Δημιουργείται ή εμφανίζεται στο κύκλωμα ΗΕΔ από επαγωγή σημαίνει ότι παρέχεται ηλεκτρική ενέργεια σε ηλεκτρικά φορτία του κυκλώματος – που είναι προϊόν μετατροπής άλλης μορφής ενέργειας που παρέχεται στο κύκλωμα μέσω έργου – που αποκτούν έτσι, εφόσον το κύκλωμα είναι κλειστό, προσανατολισμένη κίνηση, δηλαδή δημιουργούν ηλεκτρικό ρεύμα από επαγωγή – επαγωγικό ρεύμα.]

— Το αίτιο εδώ είναι η αύξηση του ρεύματος, οπότε η Εεπ έχει πολικότητα τέτοια ώστε να "δώσει" ένα δικό της ρεύμα το οποίο να "αντιστέκεται" στην αύξηση του ρεύματος στο κύκλωμα. Η Εεπ δηλαδή δίνει ρεύμα αντίθετης φοράς από το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα λόγω της πηγής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα στο κύκλωμα να μην παίρνει αμέσως τη μέγιστη τιμή του $I = E/R_{ολ}$.

Την Εεπ που εμφανίζεται στο πηνίο την ονομάζουμε ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, γιατί προκαλείται από το μαγνητικό πεδίο του ίδιου του πηνίου, και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση $E_{αυτ} = L|\Delta i|/\Delta t$, όπου L ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.

Προσοχή

1. Η αυτεπαγωγή του πηνίου δεν επηρεάζει την τελική – μέγιστη – τιμή του ρεύματος $I = E/R_{ολ}$, αλλά μόνο το χρόνο που απαιτείται για να πάρει η ένταση του ρεύματος την τελική της τιμή.

2. Όταν ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L διαρρέεται από ρεύμα έντασης I, τότε η ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου δίνεται από τη σχέση $U_B = \frac{LI^2}{2}$.

Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Ηλεκτρική ταλάντωση (Η.Τ) ονομάζεται η περιοδική, μέσω ενός ιδανικού πηνίου, εκφόρτιση - φόρτιση ενός πυκνωτή ή,

η περιοδική μετατροπή της ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου ενός πυκνωτή σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου σε ιδανικό πηνίο, που είναι συνδεδεμένο με τους οπλισμούς του πυκνωτή, και αντιστρόφως.

Κύκλωμα LC ονομάζεται ένα κύκλωμα που αποτελείται από έναν πυκνωτή στους οπλισμούς του οποίου είναι συνδεδεμένο, μέσω διακόπτη, ιδανικό πηνίο.

— Έστω ότι σε ιδανικό κύκλωμα LC, δηλαδή σε κύκλωμα LC χωρίς ωμικές αντιστάσεις και χωρίς απώλειες ενέργειας λόγω εκπομπής Η/Μ ακτινοβολίας, ο πυκνωτής τη χρονική στιγμή μηδέν _ $t=0$ _ που κλείνουμε το διακόπτη, έχει φορτίο $|q| = Q$. Αυτό σημαίνει ότι ο ένας οπλισμός του πυκνωτή έχει φορτίο $q = +Q$ _ οπλισμός αναφοράς _ και ο άλλος φορτίο $q = -Q$.

Όταν κλείνουμε το διακόπτη αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Αρχικά η ένταση του ρεύματος είναι μικρή αλλά σταδιακά η τιμή της αυξάνεται.

Αυτό εξηγείται ως εξής.

Κάθε στιγμή στο κύκλωμα, η τάση $V_C = q/C$ του πυκνωτή είναι ίση με την τάση από αυτεπαγωγή $V_L = E_{αυτ} = L\Delta i/\Delta t$ διότι R πηνίου μηδέν, δηλαδή $V_C = V_L$, ενώ το ρεύμα i στο κύκλωμα είναι η συνισταμένη των ρευμάτων i_C και i_L που έχουν αντίθετη φορά.

Αρχικά, όταν ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί λίγο, η τάση V_C είναι μεγάλη, συνεπώς και η τάση V_L έχει μεγάλη τιμή.

Επειδή η V_L "αντιστέκεται" στην αύξηση του ρεύματος η ένταση i στο κύκλωμα αρχικά έχει μικρή τιμή.

Όμως, όσο η εκφόρτιση προχωρά, η ένταση i αυξάνεται, μέχρι να πάρει τη μέχιστη τιμή της τη στιχμή που ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί τελείως $-|i|=I$ όταν $t=T/4-$.

Πιο συγκεκριμένα, τη χρονική στιγμή $t=T/4$ που ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί τελείως $-|q|=0-$, η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα έχει τη μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, τιμή της.

Είναι δηλαδή, $|i| = |-I| = I$.

Κατόπιν το ρεύμα αρχίζει να μειώνεται σταδιακά — χωρίς να αλλάζει φορά, δηλαδή μειώνεται κατ' απόλυτη τιμή — λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου, με αποτέλεσμα ο πυκνωτής να φορτίζεται και πάλι, αλλά με αντίθετη πολικότητα απ' ότι πριν.

Τη χρονική στιγμή $t=T/2$ που μηδενίζεται το ρεύμα στο κύκλωμα το φορτίο του πυκνωτή έχει τη μέγιστη τιμή του $|q|=Q$ και η πολικότητα της τάσης στους οπλισμούς του είναι αντίθετη απ' ότι αρχικά — ο οπλισμός αναφοράς είναι τώρα αρνητικά φορτισμένος —.

Στη συνέχεια το φαινόμενο επαναλαμβάνεται αντίστροφα.

Το κύκλωμα επανέρχεται στην κατάσταση στην οποία βρισκόταν τη χρονική στιγμή $t=0$ που κλείσαμε το διακόπτη, μετά από χρόνο $t=T$.

Αποδεικνύεται ότι σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC:

α. η Η.Τ είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου — έχει τα χαρακτηριστικά της Α.Α.Τ — δηλαδή το φορτίο q του οπλισμού αναφοράς του πυκνωτή — το φορτίο q στο κύκλωμα LC — κατά την εκφόρτιση — φόρτιση του πυκνωτή είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου — άρα περιοδική — με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{LC}$, συχνότητα $f = 1/2\pi\sqrt{LC}$ και γωνιακή συχνότητα $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

β. η περίοδος **T** και **η** συχνότητα **f** της Η.Τ εξαρτώνται από τα φυσικά χαρακτηριστικά L και C του κυκλώματος και χαρακτηρίζονται ως <u>ιδιοπερίοδος</u>, <u>ιδιοσυχνότητα</u> του κυκλώματος αντίστοιχα.

γ. αν η χρονική στιγμή που κλείνουμε το διακόπτη – η χρονική στιγμή που αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή – είναι η χρονική στιγμή μηδέν – $t_0=0$ – και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι **$q=+Q$** και **$i=0$** το φορτίο **q** μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$q=Q\eta\mu(\omega t+\pi/2) \text{ ή } \boxed{q=Q\sigma\upsilon\nu\omega t} \quad (1),$$

ενώ η ένταση του ρεύματος **i** στο κύκλωμα μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$i=I\sigma\upsilon\nu(\omega t+\pi/2) \text{ ή } \boxed{i=-I\eta\mu\omega t} \quad (2),$$

όπου **Q, I** η μέγιστη τιμή του μέτρου του φορτίου q και της έντασης του ρεύματος i αντίστοιχα. Δηλαδή <u>$|q|_{max}=Q$</u> και <u>$|i|_{max}=I$.</u>

Είναι $\boxed{I=Q\cdot\omega}$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν οι αλγεβρικές τιμές των μεγεθών **q** και **i** ενώ ως **θετική** θεωρείται η φορά του ρεύματος όταν αυτό κατευθύνεται προς τον οπλισμό του πυκνωτή που τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι θετικά φορτισμένος – οπλισμός αναφοράς –.

<u>Η.Τ και Ενέργεια</u>

<u>Σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC:</u>

α. κατά τη διάρκεια της **Η.Τ** η αρχική ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, **$U_E=Q^2/2C$**, με την εκφόρτισή του ελαττώνεται και μετατρέπεται σταδιακά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, **$U_B=Li^2/2$**.

Όταν ο πυκνωτής εκφορτιστεί εντελώς είναι **$U_E=0$** και όλη η ενέργειά του έχει μεταττραπεί σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο η οποία τώρα έχει αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της $U_{B.max} = LI^2/2$.

Στη συνέχεια αυτή η διαδικασία γίνεται αντίστροφα ενώ η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται διαρκώς.

β. η ολική ενέργεια **E** διατηρείται σταθερή και είναι $E = U_{E.max} = U_{B.max}$: σταθερή $\rightarrow$

$$\boxed{E = Q^2/2C = LI^2/2}$$

Η ολική ενέργεια **E** χαρακτηρίζεται ως <u>ενέργεια ταλάντωσης</u> και ισούται με την ηλεκτρική ενέργεια που προσφέρεται αρχικά στο κύκλωμα κατά την ενεργοποίηση του σε ταλάντωση. Δηλαδή <u>ισούται με την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη είτε στον πυκνωτή είτε στο πηνίο τη χρονική στιγμή ακριβώς πρίν ξεκινήσει η Η.Τ.</u>

γ. σε μία τυχαία χρονική στιγμή **t** κατά τη διάρκεια της Η.Τ, η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή είναι $U_E = q^2/2C$ **(1)**, ενώ η ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι $U_B = Li^2/2$ **(2)**.

Την ίδια χρονική στιγμή για την ενέργεια ταλάντωσης **E** ισχύει $E = U_E + U_B$ (Α.Δ.Ε), δηλαδή $\boxed{E = q^2/2C + Li^2/2}$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει αντίστοιχα ότι $U_E = (Q^2/2C)\text{συν}^2\omega t \rightarrow$

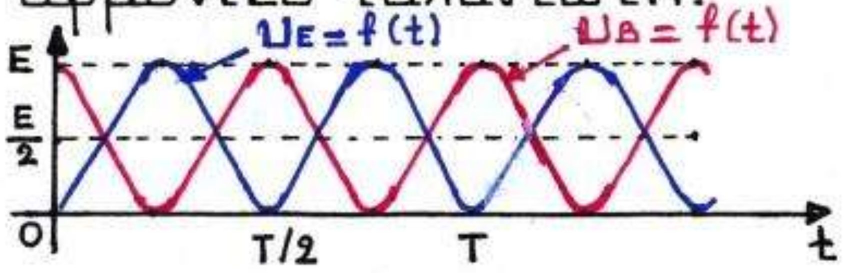
$$\underline{U_E = E\,\text{συν}^2\omega t \geq 0} \quad (3), \text{ και}$$

$$U_B = (LI^2/2)\text{ημ}^2\omega t \rightarrow \underline{U_B = E\,\text{ημ}^2\omega t \geq 0} \quad (4).$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) φαίνεται ότι η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο και αντίστροφα.

Δηλαδή, στο κύκλωμα **LC** έχουμε <u>**ταλάντωση ενέργειας**</u>, σε αναλογία με αυτό που συμβαίνει στον αρμονικό ταλαντωτή.

1.

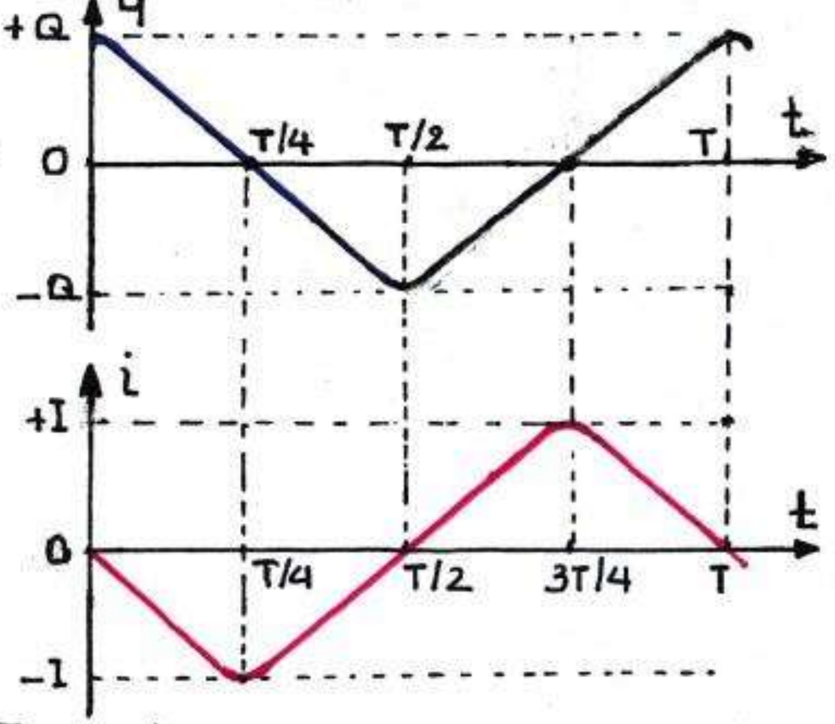


Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων $U_E=f(t)$ και $U_B=f(t)$ προκύπτει ότι η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο με περίοδο $T'=T/2$.

2.

$q = Q\,\text{συν}\,\omega t$

$i = -I\,\text{ημ}\,\omega t$



Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων $q=f(t)$ και $i=f(t)$ σε ιδανικό κύκλωμα LC προκύπτει ότι όταν $q=0$ είναι $i=\pm I$

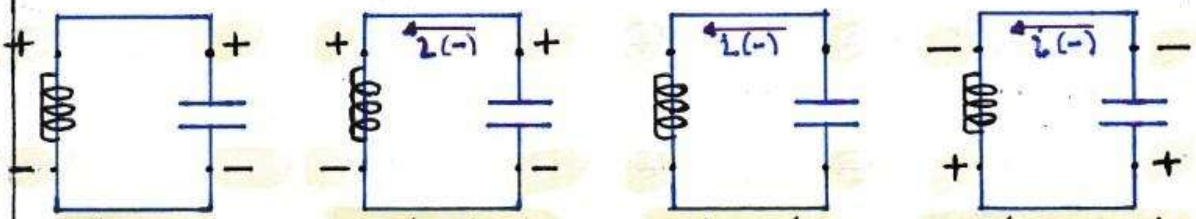
3. <u>Η διαφορά φάσης $\Delta\phi$</u> μεταξύ των μεγεθών $i = -I\text{ημ}\omega t = I\text{ημ}(\omega t+\pi)$ και $q = Q\text{συν}\omega t \rightarrow$ $q = Q\text{ημ}(\omega t+\pi/2)$ είναι $\Delta\phi = (\omega t+\pi) - (\omega t+\pi/2) \rightarrow$ $\Delta\phi = \pi/2$.

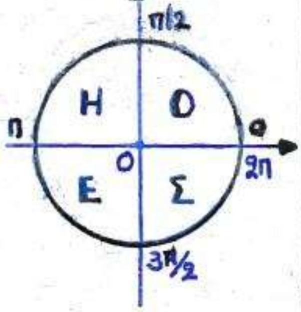
Δηλαδή, η ένταση προηγείται του φορτίου κατά $\pi/2$ που αντιστοιχεί σε μία χρονική διαφορά Δt που η ένταση προηγείται του φορτίου για την οποία ισχύει,

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi}\Delta\phi = \frac{T}{2\pi}\frac{\pi}{2} \longrightarrow \Delta t = T/4$$

10. ## ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑ LC

$$q = Q\,\text{συν}(\omega t)$$
$$i = -I\,\text{ημ}(\omega t)$$
$$\boxed{I = \omega Q}$$





$t = 0$

$q = +Q$
$i = 0$
$U_E = Q^2/2C$
$U_B = 0$

$0 < t < T/4$

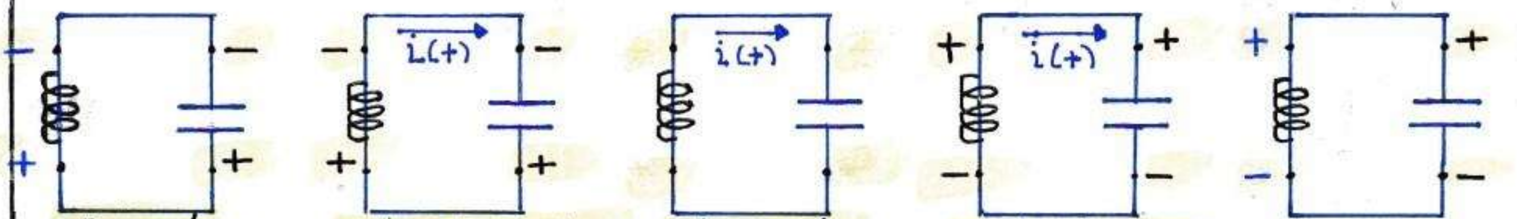
$0 < |q| < Q,\ q > 0$
$0 < |i| < I,\ i < 0$
$U_E = q^2/2C$
$U_B = Li^2/2$
i(-)

$t = T/4$

$q = 0$
$i = -I$
$U_E = 0$
$U_B = LI^2/2$
i(-)

$T/4 < t < T/2$

$0 < |q| < Q,\ q < 0$
$0 < |i| < I,\ i < 0$
$U_E = q^2/2C$
$U_B = Li^2/2$
i(-)



$t = T/2$

$q = -Q$
$i = 0$
$U_E = Q^2/2C$
$U_B = 0$

$T/2 < t < 3T/4$

$0 < |q| < Q,\ q < 0$
$0 < |i| < I,\ i > 0$
$U_E = q^2/2C$
$U_B = Li^2/2$
i(+)

$t = 3T/4$

$q = 0$
$i = +I$
$U_E = 0$
$U_B = LI^2/2$
i(+)

$3T/4 < t < T$

$0 < |q| < Q,\ q > 0$
$0 < |i| < I,\ i > 0$
$U_E = q^2/2C$
$U_B = Li^2/2$
i(+)

$t = T$

$q = +Q$
$i = 0$
$U_E = Q^2/2C$
$U_B = 0$

Παρατήρηση

Στο σχολικό βιβλίο επισημαίνεται ότι η Η.Τ σ'ένα ιδανικό κύκλωμα LC παρουσιάζει αναλογίες με την Α.Α.Τ που εκτελεί ένα σώμα που είναι προσδεδεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς K.

Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγει λόγω του ότι στην Η.Τ το φορτίο του οπλισμού αναφοράς του πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα μεταβάλλονται όπως η απομάκρυνση και η ταχύτητα στην Α.Α.Τ που προαναφέρθηκε εφόσον τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=+A$. Πράγματι, σ'αυτή την περίπτωση είναι $x=A\eta\mu(\omega t+\pi/2) \longrightarrow x=A\sigma\upsilon\nu\omega t$ και

$$u=u_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\pi/2) \longrightarrow u=-u_0\eta\mu\omega t.$$

Δηλαδή, η αντιστοιχία $q \rightarrow x$ και $i \rightarrow u$ στο σχολικό βιβλίο εξάγεται από την ομοιότητα των τύπων.

Αυτό δεν είναι σωστό.

Άλλος είναι ο λόγος της αντιστοιχίας.

Η αντιστοιχία προκύπτει αν γράψουμε τις διαφορικές εξισώσεις για τα δύο φαινόμενα.

Ωστόσο η αντιστοιχία είναι φαινομενική γιατί πρόκειται για διαφορετικά φαινόμενα.

Όσον αφορά την ενέργεια όμως, η δυναμική ενέργεια λόγω ταλάντωσης στο σύστημα ελατήριο-σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ αντιστοιχίζεται με την ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε ιδανικό κύκλωμα LC που εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με κριτήριο ότι η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο, όπως αποθηκευμένη είναι και η ενέργεια στον πυκνωτή.

Δηλαδή, μπορούμε να έχουμε ένα ελατήριο τεντωμένο — συσπειρωμένο όπως και έναν πυκνωτή φορτισμένο.

Αντίθετα, η κινητική ενέργεια δεν είναι αποθηκευμένη αλλά εμφανίζεται μόνον όταν έχουμε κίνηση. Αντίστοιχα, η ενέργεια μαγνητικού πεδίου εμφανίζεται όταν έχουμε ρεύμα.

Προαιρετικά Για όσους/ες θέλουν κάτι περισσότερο.

Στο σύστημα ελατήριο-σώμα εφόσον εκτελεί Α.Α.Τ η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση $\Sigma F = ma \rightarrow -kx = m\,du/dt \rightarrow$

$$-kx = m\,d^2x/dt^2 \rightarrow$$
$$d^2x/dt^2 = -(k/m)\,x \quad (1),$$

στην οποία αν θέσουμε $\omega^2 = k/m \rightarrow$

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x \quad (2).$$

Λύση της (2) είναι η $x = A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$, όπου η φ_o προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Στην περίπτωση που το σώμα τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ περνάει από τη Θ.Ι και κινείται κατά τη θετική φορά $- \upsilon > 0 -$ η λύση της εξίσωσης παίρνει τη μορφή $x = A\,\eta\mu\,\omega t$ διότι $\varphi_o = \pi/2$, ενώ στην περίπτωση που το σώμα τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = +A$ είναι $\varphi_o = 0$ και η λύση της εξίσωσης παίρνει τη μορφή $x = A\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t \rightarrow$
$x = A\,\eta\mu(\omega t + \pi/2)$.

Σ' ένα ιδανικό κύκλωμα LC που εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις ισχύει ότι

$V_C = q/C$ και $I = -dq/dt$, οπότε
$dI/dt = -d^2q/dt^2$.

Το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων κατά μήκος του κυκλώματος είναι μηδέν. Επομένως,
$V_L - V_C = 0 \rightarrow -L\,dI/dt - q/C = 0 \rightarrow$

$$-L\,d^2q/dt^2 + q/C = 0 \rightarrow$$
$$d^2q/dt^2 = -(1/LC)\cdot q \quad (3).$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (3) προκύπτει η αντιστοιχία $x \longleftrightarrow q$.

Από αυτήν και από την αντιστοιχία $U_T \leftrightarrow U_E$, δηλαδή από την αντιστοιχία $Kx^2/2 \leftrightarrow q^2/2C$ προκύπτει $K \leftrightarrow 1/C$ και τελικά πάλι από τις (1) και (3) ότι $m \leftrightarrow L$.

Αν στην (3) θέσουμε $\omega^2 = 1/LC \rightarrow$

$d^2q/dt^2 = -\omega^2 q$ η οποία έχει ως λύση την $q = Q\,συν(\omega t + \phi_0)$, όπου η ϕ_0 προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Στην περίπτωση που ο πυκνωτής τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει φορτίο $q = 0$ και το ρεύμα στο κύκλωμα έχει κατεύθυνση θετική — $i > 0$ — είναι $\phi_0 = \pi/2$, οπότε η λύση της εξισώσεως παίρνει τη μορφή $q = Q\,ημ\,\omega t$, ενώ στην περίπτωση που τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο πυκνωτής — ο οπλισμός αναφοράς του πυκνωτή — έχει φορτίο $q = +Q$ και $i = 0$ είναι $\phi_0 = 0$, οπότε η λύση της εξισώσεως παίρνει τη μορφή $q = Q\,συν\,\omega t \leftrightarrow q = Q\,ημ(\omega t + \pi/2)$.

Ρυθμοί μεταβολής στην Η.Τ

Σε μία Η.Τ σε ιδανικό κύκλωμα LC αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $q = +Q$ και $i = 0$ τότε $q = Q\,συν\,\omega t$ και $i = -I\,ημ\,\omega t$.

Στην περίπτωση αυτή είναι:

$dq/dt = i = -I\,ημ\,\omega t$,

$dV_C/dt = d(q/C)/dt = (1/C)\,dq/dt = i/C$,

$dV_L/dt = dV_C/dt = i/C$,

Επειδή $V_L = -L\,di/dt \rightarrow di/dt = -V_L/L$

Είναι $V_L = V_C = q/C$, οπότε $di/dt = -q/LC$

$\rightarrow di/dt = -\omega^2 q$, $[\omega = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}\,]$.

Είναι $dU_E + dU_B = 0 \leftrightarrow dU_E = -dU_B \rightarrow$

$dU_E/dt = -dU_B/dt$, δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο παρέχει ενέργεια ο πυκνωτής είναι αριθμητικά ίσος με το ρυθμό με τον οποίο απορροφά ενέργεια το πηνίο και αντιστρόφως.

Είναι $dU_E/dt = d(q^2/2C)/dt = \frac{1}{2C}dq^2/dt$

$\longrightarrow dU_E/dt = \frac{1}{2C}2q\,dq/dt = V_C \cdot i = V_L \cdot i$, άρα

$dU_B/dt = -V_C \cdot i = -V_L \cdot i$

Παρατήρηση

Μας είναι γνωστό ότι η ισχύς κάθε διπόλου ηλεκτρικού στοιχείου που έχει στα άκρα του τάση **V** και διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως **i** είναι $\mathbf{P = V \cdot i}$.

Επομένως, η ισχύς του πυκνωτή, που είναι ο ρυθμός με τον οποίο ο πυκνωτής προσφέρει στο κύκλωμα ενέργεια, όταν εκφορτίζεται, ή απορροφά ενέργεια, όταν φορτίζεται, θα δίνεται από τη σχέση $P_C = dU_E/dt = V_C \cdot i$.

Στην ίδια λογική και η ισχύς του πηνίου θα δίνεται από τη σχέση $P_B = dU_B/dt = V_L \cdot i$.

Αν μάλιστα λάβουμε υπ' όψιν ότι όταν ο πυκνωτής εκφορτίζεται το πηνίο απορροφά ενέργεια και αντιστρόφως και ότι την κάθε χρονική στιγμή, σύμφωνα με την Α.Δ.Ε, είναι
$dU_E + dU_B = 0$ θα είναι $P_C = -P_B$.

Προσοχή

Όταν το ρεύμα εισέρχεται στο δίπολο από το άκρο με το μεγαλύτερο δυναμικό – πόλος (+) – το δίπολο απορροφά ηλεκτρική ενέργεια με ρυθμό $P = V \cdot i$ ενώ όταν εισέρχεται από το άκρο με το μικρότερο δυναμικό – πόλος (−) – το δίπολο αποδίδει ηλεκτρική ενέργεια με ρυθμό $P = V \cdot i$.

Α. Ζαχαρίου

Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

1. Σε κάθε περίπτωση που αναζητούμε σχέσεις μεταξύ των μεγεθών

$$q\ ,\ i\ ,\ Q\ ,\ I\ ,\ \omega$$

αξιοποιούμαι τις σχέσεις

$$E_T = U_E + U_B\ ,\quad E_T = U_{E(max)} = U_{B(max)},$$

$$\eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\phi = 1\ ,\ \text{όπου}\ \phi = \omega t,$$

σε συνδυασμό με το ότι $\eta\mu\phi = -\frac{i}{I} = -\frac{i}{\omega Q}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{q}{Q}$.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι: **α.** $i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$, **β.** $q = \pm(1/\omega)\sqrt{I^2 - i^2}$, **γ.** $i = \pm\sqrt{(C/L)(V_0^2 - V^2)}$, όπου V_0 η τάση του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και V η τάση του πυκνωτή μία τυχαία χρονική στιγμή t, **δ.** $I = \omega Q$.

Απόδειξη

α. Είναι $E_T = U_E + U_B \rightarrow Q^2/2C = q^2/2C + Li^2/2 \leftrightarrow$
$Li^2 = (1/C)(Q^2 - q^2) \leftrightarrow i^2 = (1/LC)(Q^2 - q^2)$
και επειδή $\omega^2 = (2\pi/T)^2 = 1/LC \rightarrow$
$i^2 = \omega^2(Q^2 - q^2) \leftrightarrow i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$.

β. Είναι $E_T = U_E + U_B \rightarrow LI^2/2 = q^2/2C + Li^2/2 \leftrightarrow$
$q^2/C = L(I^2 - i^2) \leftrightarrow q^2 = LC(I^2 - i^2) \leftrightarrow$
$q^2 = (1/\omega^2)(I^2 - i^2) \leftrightarrow q = \pm(1/\omega)\sqrt{I^2 - i^2}$.

γ. Είναι $E_T = U_E + U_B \rightarrow CV_0^2/2 = CV^2/2 + Li^2/2$
$\leftrightarrow Li^2/2 = C(V_0^2 - V^2) \leftrightarrow i = \pm\sqrt{(C/L)(V_0^2 - V^2)}$

δ. Είναι $E_T = U_{E.max} = U_{B.max} \longrightarrow$
$Q^2/2C = LI^2/2 \leftrightarrow I^2 = Q^2/LC \leftrightarrow I = Q/\sqrt{LC}$
και επειδή $T = 2\pi\sqrt{LC}$ είναι $\omega = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}$,
οπότε $I = \omega Q$.

2. Οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου (q) και της έντασης (i) σε ιδανικό κύκλωμα LC εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και ισχύει:
<u>αν τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι</u>
<u>$q=+Q$ και $i=0$</u> τότε <u>$q = Q\text{συν}(\omega t)$</u> και
<u>$i = -I\text{ημ}(\omega t)$</u>.

α. Στις παραπάνω σχέσεις τα μεγέθη φορτίο (q) και ένταση (i) είναι <u>μεγέθη αλγεβρικά</u>.

β. Η χρονική εξίσωση του φορτίου περιγράφει τις μεταβολές του φορτίου εκείνου του οπλισμού του πυκνωτή που τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι θετικά φορτισμένος ή αν ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος αμέσως μετά φορτίζεται θετικά _**<u>οπλισμός αναφοράς</u>**.

γ. Όταν μιλάμε για το φορτίο του πυκνωτή αναφερόμαστε στην απόλυτη τιμή του q _$|q|$_.

δ. Η ένταση του ρεύματος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του οπλισμού αναφοράς, δηλαδή $i = dq/dt$. Επομένως, την κάθε χρονική στιγμή ισούται με την κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα $q = f(t)$ τη δεδομένη χρονική στιγμή.
Η ένταση είναι **<u>θετική</u>** όταν το ρεύμα έχει φορά **<u>προς</u>** τον οπλισμό αναφοράς και **<u>αρνητική</u>** όταν το ρεύμα έχει φορά **<u>από</u>** τον οπλισμό αναφοράς.

ε. Η τάση αυτεπαγωγής, $V_L = -L\,di/dt$, στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται όταν μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει και:
1. όταν η ένταση του ρεύματος αυξάνεται κα-

τά απόλυτη τιμή, το ρεύμα εισέρχεται στο πηνίο από το άκρο με το δυναμικό (+) _ εκφόρτιση πυκνωτή, μείωση U_E, αύξηση U_B, ενώ

2. όταν η ένταση του ρεύματος μειώνεται κατά απόλυτη τιμή το ρεύμα εισέρχεται στο πηνίο από το άκρο με το δυναμικό (−) _ φόρτιση πυκνωτή, αύξηση U_E, μείωση U_B.

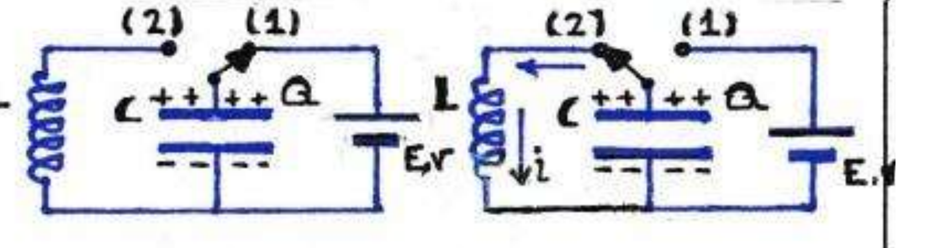
6τ. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικής ταλάντωσης LC η τάση του πυκνωτή _ $V_C = q/C$ _ είναι πάντοτε ίση με την τάση στα άκρα του πηνίου, δηλαδή $V_L = V_C = q/C$.

3. Κατά την επίλυση προβλημάτων στις Η.Τ θα πρέπει, σε κάθε περίπτωση, να προσέχουμε την κατάσταση του κυκλώματος τη στιγμή που αρχίζει η Η.Τ και αυτό γιατί οι εξισώσεις που την περιγράφουν καθορίζονται από τις τιμές που έχουν τα μεγέθη (**q**) και (**i**) τη χρονική στιγμή $t_0=0$

Στις Η.Τ πρακτικά εμφανίζονται δύο περιπτώσεις εξισώσεων ανάλογα με το κύκλωμα διέγερσης του κυκλώματος LC.

α. Η.Τ μετά από διέγερση του πυκνωτή.

Στο διπλανό κύκλωμα ο διακόπτης είναι αρχικά στη θέση (1) και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ μετακινείται στη θέση (2).



Όσο ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση (1) το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα, ο πυκνωτής έχει φορτίο Q και τάση ίση με την πολική τάση της πηγής _ $V_C = V_\pi$ _.

Είναι $V_\pi = E - Ir$ και εφόσον $I=0$, θα είναι $V_\pi = E$. Επομένως, ο πυκνωτής αρχικά έχει τάση $V_0 = E$.

Μόλις ο διακόπτης μετακινηθεί στη θέση (2)

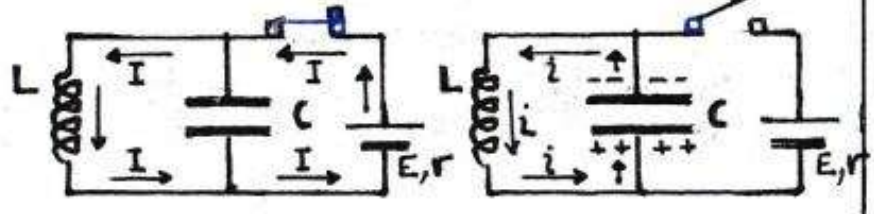
– τη χρονική στιγμή $t_0=0$ – ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται μέσω του πηνίου οπότε ξεκινά Η.Τ με αρχικές τιμές $q=+Q$ και $i=0$.

Ο οπλισμός αναφοράς είναι, για το κύκλωμα LC, ο πάνω οπλισμός του πυκνωτή και η Η.Τ περιγράφεται με τις εξισώσεις:

$\boxed{q = Q\text{συν}\omega t}$ και $\boxed{i = -I\text{ημ}\omega t}$

β. Η.Τ μετά από διέγερση του πηνίου.

Στο διπλανό κύκλωμα ο διακόπτης είναι αρχικά κλειστός και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ανοίγει.



Όσο ο διακόπτης είναι κλειστός, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα $I = E/r$.

Το σταθερό αυτό ρεύμα διέρχεται από το ιδανικό πηνίο και η τάση στα άκρα του πηνίου είναι μηδέν.

Επειδή όμως το πηνίο έχει τα ίδια άκρα με τον πυκνωτή, θα είναι μηδέν και η τάση του πυκνωτή, οπότε ο πυκνωτής θα είναι αρχικά αφόρτιστος.

Μόλις ανοίξουμε το διακόπτη, το ρεύμα στο πηνίο λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής δε μηδενίζεται ακαριαία αλλά μετά από κάποιο σχετικά μικρό χρονικό διάστημα.

Σ' αυτό το χρονικό διάστημα το ρεύμα μειώνεται σταδιακά και εμφανίζεται τάση στα άκρα του πηνίου, άρα και στα άκρα του πυκνωτή, με πολικότητα αντίθετη προς την πολικότητα της πηγής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να φορτίζεται ο κάτω οπλισμός του πυκνωτή θετικά και ο πάνω αρνητικά.

Ο οπλισμός αναφοράς τώρα θα είναι ο κάτω οπλισμός του πυκνωτή ο οποίος φορτίζεται πρώτος θετικά και οι εξισώσεις ταλάντωσης θα είναι:

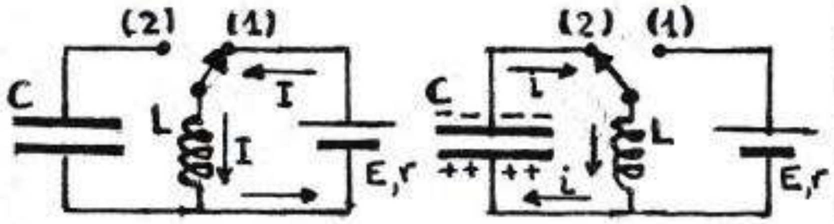
$- t=0 \rightarrow q=0,\ i=+I -.$

$$q = Q\,συν(\omega t + 3\pi/2) \rightarrow \boxed{q = Q\,ημ(\omega t)}$$
$$i = -I\,ημ(\omega t + 3\pi/2) \rightarrow \boxed{i = I\,συν(\omega t)}$$

<u>Σημείωση</u>:

I. Στις **Η.Τ** εάν τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $q \neq +Q$ ή $i \neq 0$ τότ προκειμένου να βρούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την **Η.Τ** εφαρμόζουμε τις γενικές εξισώσεις $q = Q\,συν(\omega t + φ_0)$, $i = -I\,ημ(\omega t + φ_0)$. Η αρχική φάση ($φ_0$) υπολογίζεται με το γνωστό τρόπο· $συνφ_0 = q/Q$ και $ημφ_0 = -i/I$.

II. Παραλλαχή του παραπάνω κυκλώματος είναι το κύκλωμα του διπλανού σχήματος.



Στο κύκλωμα αυτό ο διακόπτης είναι αρχικά στη θέση (1) και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ μεταφέρεται ακαριαία στη θέση (2), οπότε αρχίζει η Η.Τ. Και στην περίπτωση αυτή το πηνίο διαρρέεται αρχικά από ρεύμα $I = E/r$ και ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος.

Α. Ζικάκης