# § 1-5 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

**Ελεύθερη ταλάντωση**: κάθε ταλάντωση πού διατηρείται μόνο από τη δύναμη επαναφοράς – κάθε ταλάντωση που η πραγματοποιησή της οφείλεται μόνο στη δύναμη επαναφοράς, τη συνισταμένη δηλαδή των δυνάμεων αλληλεπίδρασης του ταλαντωτή με το περιβάλλον του.

**Αμείωτη ταλάντωση**: κάθε ταλάντωση στην οποία η ενέργεια του ταλαντωτή διατηρείται – κάθε ταλάντωση στην οποία το πλάτος διατηρείται σταθερό.

**Ελεύθερη Η.Τ**: κάθε Η.Τ που διατηρείται μόνο από την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο – κάθε Η.Τ που η πραγματοποίησή της οφείλεται μόνο στην ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο.

**Αμείωτη Η.Τ**: κάθε Η.Τ στην οποία η ενέργεια στο κύκλωμα ταλάντωσης διατηρείται – κάθε Η.Τ στην οποία το πλάτος – φορτίου και έντασης – δε μεταβάλλεται.

Ο όρος για την πραγματοποίηση ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης – μηχανικής και ηλεκτρικής – η απουσία δηλαδή τριβών και αντιστάσεων, προκειμένου η ενέργεια να διατηρείται, δεν εκπληρώνεται στην πράξη με αποτέλεσμα – στο μακρόκοσμο – οι ελεύθερες ταλαντώσεις να είναι φθίνουσες.

## Α. Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

**Φθίνουσα ή αποσβεννύμενη**: κάθε ταλάντωση στην οποία η ενέργεια ταλάντωσης συνεχώς ελαττώνεται – κάθε ταλάντωση στην οποία το πλάτος συνεχώς μειώνεται.

**Πλάτος** μιας Φ.Τ σε μία ορισμένη χρονική στιγμή $t$, ονομάζουμε τη μέγιστη απόσταση από τη θέση αναφοράς στην οποία θα βρεθεί ο ταλαντωτής, αν μετά τη χρονική στιγμή **t** συνεχίσει την κίνησή του χύρω από την ίδια θέση αναφοράς ως απλός αρμονικός ταλαντωτής και με την ενέρχεια που είχε τη χρονική στιγμή **t**.

<u>**Η απόσβεση**</u> – η ελάττωση του πλάτους – σε μία φ.Μ.Τ οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση. Μέσω του έρχου αυτών των δυνάμεων ενέρχεια μεταφέρεται από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι, η μηχανική ενέρχεια του συστήματος, με την πάροδο του χρόνου, ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι **Φ.Μ.Τ** στις οποίες η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του ταλαντωτή – η αντιτιθέμενη δύναμη – είναι ανάλοχη της ταχύτητας, δηλαδή υπακούει στη σχέση $F' = -bu$.

Το **b** <u>είναι μία</u> σταθερά που ονομάζεται <u>**σταθερά απόσβεσης**</u> και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η ταλάντωση καθώς και από το σχήμα και το μέχεθος του ταλαντωτή.

Τέτοια δύναμη είναι π.χ, η δύναμη αντίστασης που ασκείται, σε ορισμένες περιπτώσεις, σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στον αέρα ή μέσα σε υχρό.

<u>Μελετώντας Φ.Μ.Τ αυτής της κατηχορίας διαπιστώνουμε ότι:</u>

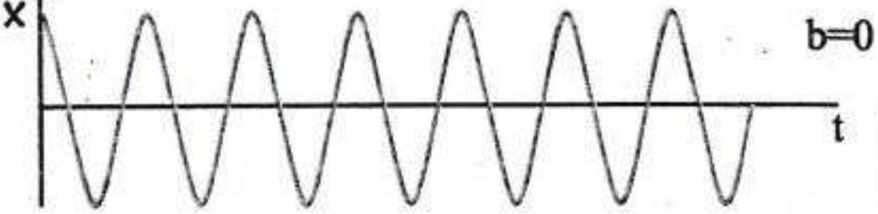
**α.** Η περίοδος χια ορισμένη τιμή της σταθεράς **b** διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος. Όταν η σταθερά **b** μεχαλώνει η περίοδος παρουσιάζει μία μικρή αύξηση που στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου θεωρείται αμελητέα.

**β.** Όταν η σταθερά **b** μεχαλώνει, ο χρόνος μέχρι να μηδενιστεί το πλάτος της ταλάντωσης – χια την ίδια αρχική απομάκρυνση από τη Θ.Ι – ελατταλαντώνεται – η ταλάντωση διαρκεί μικρότερο χρονικό διάστημα. Δηλαδή για το ίδιο σύστημα ταλάντωσης και για την ίδια αρχική απομάκρυνση ο χρόνος μέχρι να μηδενιστεί το πλάτος της ταλάντωσης και να σταματήσει το σώμα να ταλαντώνεται εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς **b**.

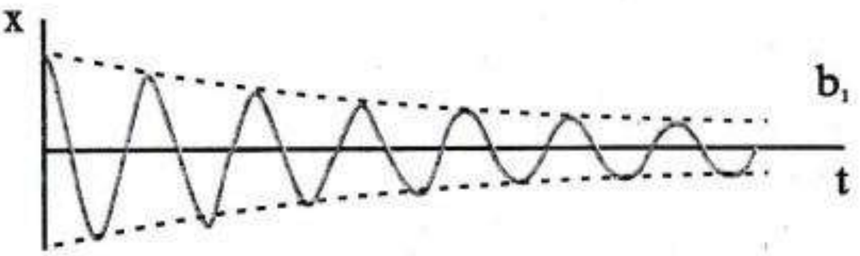
**Γ.** Σε ακραίες περιπτώσεις για τις οποίες η σταθερά απόσβεσης **b** παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται <u>απεριοδική</u>, δηλαδή ο ταλαντωτής, μετά την αρχική απομάκρυνσή του από τη Θ.Ι κατά την ενεργοποίησή του σε ταλάντωση, επιστρέφει στη Θ.Ι του χωρίς ποτέ να την υπερβεί.

Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί αν το σύστημα ταλάντωσης βρισκόταν μέσα σ' ένα παχύρρευστο υγρό.

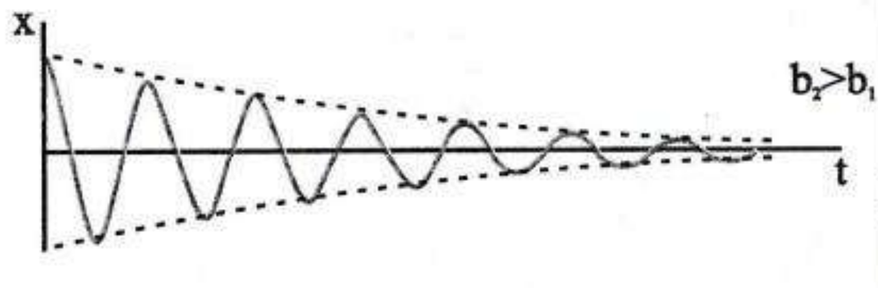
Πάντως, έτσι και αλλιώς, οι **Φ.Μ.Τ** δεν είναι περιοδικές κινήσεις – είναι **α**-περιοδικές.



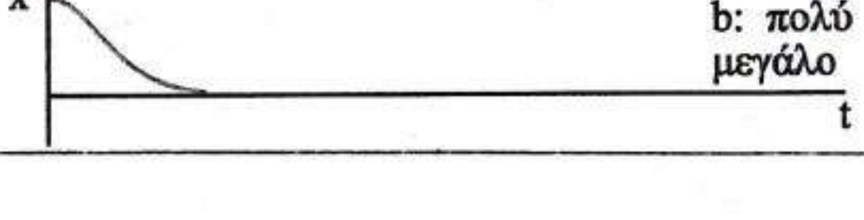

$b=0$ – η ταλάντωση είναι αμείωτη




$b_1 \neq 0$ – η ταλάντωση είναι φθίνουσα




$b_2 > b_1$ – η ταλάντωση διαρκεί μικρότερο χρονικό διάστημα.



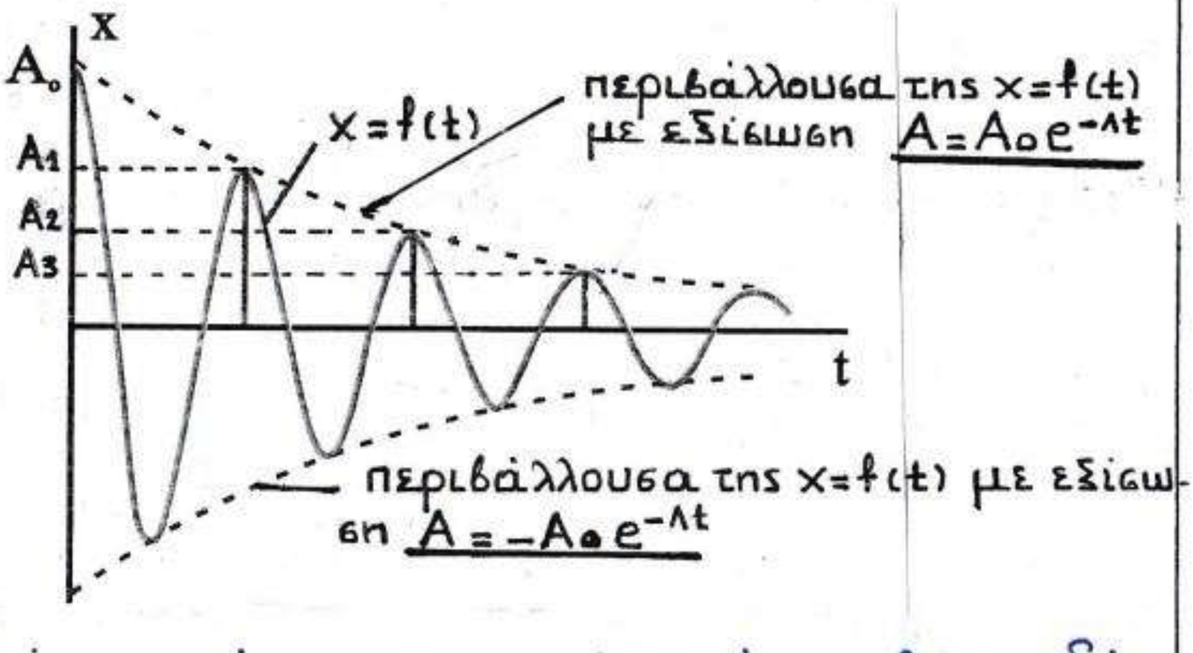

$b \gg 0$ – η κίνηση είναι απεριοδική.

Η κίνηση γίνεται απεριοδική σημαίνει ότι η κίνηση δε μπορεί σε καμία περίπτωση να θεωρηθεί ταλάντωση γιατί το κινητό δεν προλαβαίνει να πραγματοποιήσει ούτε μία πλήρη παλινδρομική κίνηση.

**δ.** Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται – κατά προσέγγιση – εκθετικά με το χρόνο. Ισχύει δηλαδή – κατά προσέγγιση – η σχέση:

$$\boxed{A = A_0 e^{-\Lambda t}} \quad (1),$$

όπου $A_0$ το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και το $\Lambda$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του ταλαντωτή – $\Lambda = b/2m$ –.




**ε.** Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός, δηλαδή $A_0/A_1 = A_1/A_2 = A_2/A_3 = \ldots\ldots = σταθ.$

Απόδειξη.

Σε μία Φ.Μ.Τ στην οποία το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο – στην οποία η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της ταχύτητας – στην οποία για τη δύναμη απόσβεσης ισχύει ότι $F' = -bu$ – για το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t ισχύει ότι $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου $A_0$ το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση ισούται με την περίοδο T της ταλάντωσης.

Επομένως τη χρονική στιγμή $t_1 = T$ η μέγιστη απομάκρυνση του ταλαντωτή προς την ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση της απομάκρυνσης $A_0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ – θετική κατεύθυνση – θα είναι $A_1 = A_0 e^{-\Lambda T}$, τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$ θα είναι $A_2 = A_0 e^{-2\Lambda T}$, τη χρονική στιγμή $t_3 = 3T$ θα είναι $A_3 = A_0 e^{-3\Lambda T}$ κ.ο.κ.

Επομένως θα είναι:

$$A_0/A_1 = A_0/A_0 e^{-\Lambda T} = e^{\Lambda T},$$

$$A_1/A_2 = A_0 e^{-\Lambda T}/A_0 e^{-2\Lambda T} = e^{\Lambda T},$$

$$A_2/A_3 = A_0 e^{-2\Lambda T}/A_0 e^{-3\Lambda T} = e^{\Lambda T} \text{ κ.ο.κ,}$$

δηλαδή $A_0/A_1 = A_1/A_2 = A_2/A_3 = \ldots\ldots = e^{\Lambda T}$: σταθ.

Η σταθερή τιμή $e^{\Lambda T}$ στους παραπάνω λόγους ονομάζεται <u>λόγος απόσβεσης</u>.

## <u>Παρατηρήσεις</u>

**1.** Καλό θα είναι να έχουμε στο μυαλό μας ότι πέρα από την προσέγγιση του σχολικού βιβλίου "...... η περίοδος παρουσιάζει μία μικρή αύξηση που στα πλαίσια αυτού του βιβλίου θεωρείται αμελητέα ...." καμία άλλη προσέγγιση δεν θεωρείται αποδεκτή.

**2.** Φράσεις του τύπου "<u>ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος αυξάνει καθώς αυξάνει η σταθερά b</u>" ή "<u>όταν η σταθερά b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα</u>" δεν έχουν κανένα μα κανένα απολύτως νόημα διότι:

**α.** Για την ίδια σταθερά b ο ρυθμός μείωσης του πλάτους αλλάζει από στιγμή σε στιγμή.

**β.** <u>Για διαφορετικές τιμές της σταθεράς b, στο</u>

ίδιο σύστημα ταλάντωσης, οι ρυθμοί μείωσης του πλάτους μπορεί να είναι ίσοι ή διαφορετικοί ανάλογα με την ή τις χρονικές στιγμές στις οποίες αναφέρονται.

**Χ.** σταθερότητα ρυθμών έχουμε μόνο σε πρωτοβάθμιες συναρτήσεις ενώ η συνάρτηση του πλάτους σε μία Φ.Μ.Τ δεν είναι πρωτοβάθμια.

**3.** Διαβάζοντας το πείραμα που αντιστοιχεί στο σχήμα 1.19 στη σελίδα 18 του σχολικού βιβλίου δεν ξεκαθαρίζεται με σαφήνεια τι ακριβώς συμβαίνει.

Από τα γραφόμενα φαίνεται σαν να έχουμε μία ταλάντωση που σιγά-σιγά εκφυλίζεται καθώς οι τιμές του b αυξάνουν. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί με την έννοια ότι εφόσον με το πείραμα εξετάζουμε το είδος της κίνησης δεν έχουμε το δικαίωμα αλλαγής του b όταν ξεκινήσει η κίνηση.

Μη νομίσει κανείς ότι καθώς το σώμα κινείται, αλλάζοντας με κάποιο μηχανισμό το b θα δούμε την κίνηση από ταλάντωση να γίνεται "απεριοδική" ή το αντίθετο, όπως πιθανόν να υπονοήσει κανείς διαβάζοντας το πείραμα.

Αυτό που εξετάζεται κάθε φορά σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι η κίνηση στην οποία τα m, b, D είναι καθορισμένα από την αρχή.

Σε διαφορετική περίπτωση τα m, b, D θα ήταν χρονοεξαρτώμενα οπότε θα ήταν και διαφορετική η μορφή της –διαφορικής– εξίσωσης της κίνησης.

## Προαιρετικά — για όσους/ες θέλουν κάτι περισσότερο.

Αν η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός ταλαντωτή υπακούει στη σχέση $F' = -bu$, για τη συνισταμένη $\Sigma F$ των δυνάμεων που ασκούνται στον ταλαντωτή μπορούμε να γράψμε ότι:

$$\Sigma F = -Dx - b\upsilon = ma \rightarrow$$

$$-Dx - b\,dx/dt = m\,d\upsilon/dt \rightarrow$$

$$-Dx - b\,dx/dt = m\,d^2x/dt$$

Λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι η $\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\,συν(\omega_1 t + \theta)}$ (1), όπου

$\omega_1 = \sqrt{D/m - (b/2m)^2}$ (2) ενώ η τιμή του $\theta$ εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

Στην περίπτωση αυτή η (1) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

**α.** Όταν $b = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{D/m}$, δηλαδή η ταλάντωση είναι αμείωτη.

**β.** Όταν $b < 2m\sqrt{D/m} \rightarrow b^2 < 4Dm$ η κίνηση χαρακτηρίζεται ως ασθενής απόσβεση.

Με τον όρο φθίνουσα ταλάντωση αναφερόμαστε αποκλειστικά στην ασθενή απόσβεση όπου $b^2 < 4Dm$.

**γ.** Όταν $b = 2m\sqrt{D/m} \rightarrow b^2 = 4Dm$ είναι $\omega_1 = 0$.

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα δεν ταλαντώνεται. Απλά επανέρχεται αργά στη Θ.Ι όπου και σταματά (κίνηση απεριοδική).

Η κίνηση χαρακτηρίζεται ως κρίσιμη απόσβεση.

**δ.** Όταν $b > 2m\sqrt{D/m} \rightarrow b^2 > 4Dm$ η κίνηση χαρακτηρίζεται ως ισχυρή απόσβεση και είναι απεριοδική.

Παρατηρήσεις.

1. Στην εξίσωση κίνησης $x = f(t)$ στη Φ.Τ το $x$ δεν είναι η απομάκρυνση του κινητού από τη Θ.Ι του αλλά η απομάκρυνσή του από τη θέση $x = 0$

_Θέση αναφοράς.
_Η θέση $x=0$ δεν είναι ποτέ και σε καμία περίπτωση Θ.Ι.
Το $x=0$ είναι η Θ.Ι του απλού αρμονικού ταλαντωτή, αλλά όχι του ταλαντωτή στον οποίο ασκείται δύναμη που αντιστέκεται στην κίνησή του της μορφής $F'=-bu$.

**2.** Πλάτος, σε μία φ.Τ, δεν είναι ότι βρίσκεται μπροστά από το ημίτονο ή το συνημίτονο στην εξίσωση κίνησης.
Το $A_o$ στην (1) δεν είναι ούτε η αρχική απομάκρυνση γενικώς ούτε το αρχικό πλάτος.
Όταν απομακρύνω το κινητό κατά $x=d$ από τη θέση $x=0$ και το αφήνω ελεύθερο να κινηθεί τότε το αρχικό πλάτος είναι $d$. Αν τώρα θέλω να το καλέσω $A_o$ είναι δικαίωμά μου. Δεν έχω όμως δικαίωμα να το αντικαταστήσω στο $A_o$ της σχέσης (1). Το $d$ δεν είναι το $A_o$ της (1).

**3.** Για να νομιμοποιηθεί η χρήση της (1) σαν εξίσωση κίνησης σε μία ταλάντωση στην οποία η αντιτιθέμενη δύναμη είναι της μορφής $F'=-bu$ θα πρέπει να εξετάζεται αν ισχύει ότι $b^2 < 4Dm$.

Α. Ζιαπής

## Β. Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

__Φθίνουσα__: κάθε Η.Τ στην οποία η ενέργεια ταλάντωσης συνεχώς ελαττώνεται _ κάθε Η.Τ στην οποία το πλάτος του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή συνεχώς μειώνονται.
Οι ελεύθερες Η.Τ είναι φθίνουσες και ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση του κυκλώματος στην οποία ενέργεια ταλάντωσης μετατρέπεται σταδιακά σε θερμική ενέργεια _ λόγω του φαινομένου Joule _ μέσω

νέπεια συνεχώς να μειώνεται.

Αύξηση της ωμικής αντίστασης συνεπάγεται απόσβεση της ταλάντωσης σε μικρότερο χρονικό διάστημα και μικρή αύξηση της περιόδου της.

Τα κυκλώματα LRC που χρησιμοποιούνται στην πράξη παρουσιάζουν μικρή αντίσταση και η αύξηση της περιόδου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Μέχρι μια ορισμένη τιμή της αντίστασης η περίοδος είναι σταθερή ενώ αν η τιμή της υπερβεί το όριο αυτό η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.

## Προεραιτικά για όσους/ες θέλουν κάτι περισσότερο.

Σε ένα κύκλωμα R-L-C σύμφωνα με το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff είναι

$$E_{\alpha\upsilon\tau} - IR + V_C = 0 \rightarrow$$

$$L\,di/dt - IR + q/C = 0 \rightarrow$$

$$L\,d^2q/dt - R\,dq/dt + q/C = 0 \rightarrow$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\,\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t + \theta) \quad (1),$$ όπου

$$\omega_1 = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2} \quad (2)$$ ενώ το $\theta$ εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

Η (1) αποτελεί την εξίσωση της Η.Τ στο κύκλωμα.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

α. Όταν $R=0$ η Η.Τ είναι αμείωτη $-\ \omega_1 = 1/\sqrt{LC}\ -$.

β. Όταν $R < 2\sqrt{L/C} \rightarrow R^2 < 4L/C$ η Η.Τ στο κύκλωμα είναι <u>φθίνουσα</u>.

γ. Όταν $R \geq 2\sqrt{L/C}$ η Η.Τ γίνεται απεριοδική.

Α. Ζαφηρής

# Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

**1.** Σε μία Φ.Μ.Τ με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_b = -bυ$ αν το αρχικό πλάτος – το πλάτος τη χρονική στιγμή $t=0$ – είναι $A_o$ και το πλάτος τη χρονική στιγμή $t$ είναι $A$:

**α.** η μηχανική ενέργεια, λόγω ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $E_o = DA_o^2/2$, ενώ τη χρονική στιγμή $t$ είναι $E = DA^2/2$.
Είναι $A = A_o e^{-Λt}$, οπότε $E = DA_o^2 e^{-2Λt}/2$ $\rightarrow$ $E = E_o e^{-2Λt}$.

**β.** η απώλεια μηχανικής ενέργειας μεταξύ δύο χρονικών στιγμών $t_1$ και $t_2$ είναι
$$E_{απ} = E_1 - E_2$$

**γ.** το έργο της $F_b$ σ' ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι
$$W_{F_b} = \Delta E_M = E_2 - E_1 < 0 \rightarrow W_{F_b} = -E_{απ}.$$

**δ.** η ισχύς της $F_b$ κάθε χρονική στιγμή είναι
$$P_{F_b} = dW_{F_b}/dt = F_b dx/dt = F_b \cdot υ = -bυ^2.$$

**ε.** ο ρυθμός απώλειας μηχανικής ενέργειας κάθε χρονική στιγμή είναι
$$dE_{απ}/dt = -dW_{F_b}/dt = bυ^2 = |P_{F_b}|.$$

**στ.** ο μέσος ρυθμός απώλειας μηχανικής ενέργειας σ' ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι
$$\Delta E_{απ}/\Delta t = (E_2 - E_1)/\Delta t$$

**ζ.** το ποσοστό μεταβολής του πλάτους, σ' ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, είναι
$$[(A_2 - A_1)/A_1] \cdot 100\%$$
ενώ το ποσοστό μείωσης του πλάτους είναι
$$[(A_1 - A_2)/A_1] \cdot 100\%$$

**η.** <u>η απώλεια ενέργειας</u> κατά τη διάρκεια της ν-οστής ταλάντωσης είναι

$$E_{απ} = E_{ν-1} - E_{ν} \rightarrow E_{απ} = D\,(A_{ν-1}^2 - A_{ν}^2)/2$$

<u>Προσοχή</u>

Η πρώτη ταλάντωση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0=0$ με πλάτος $A_0$ <u>και</u> τελειώνει τη χρονική στιγμή $t=T$ με πλάτος $A_1$. Η δεύτερη ταλάντωση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t=T$ με πλάτος $A_1$ και τελειώνει τη χρονική στιγμή $t=2T$ με πλάτος $A_2$ κ.ο.κ.

Έτσι το πλάτος μετά απο ν πλήρεις ταλαντώσεις είναι $A = A_0 e^{-νΛT}$.

## 2. Ιδιότητες λογαρίθμων

α. $\ln α = x \leftrightarrow e^x = α$ , $(α>0)$

β. $\ln 1 = 0$

γ. $\ln e = 1$

δ. $\ln(α\cdot β) = \ln α + \ln β$ , $(α,β>0)$

ε. $\ln(α/β) = \ln α - \ln β$ , $(α,β>0)$

στ. $\ln α^x = x \ln α$

ζ. $e^{\ln α} = α$

Α. Ζιάγκα