

A. Ζιγαντζής

Περί ΤΡΙΒΗΣ..... και όχι μόνο.

Έστω δύο σώματα που βρίσκονται έ'επαφή και πιέζονται μεταξύ τους, δηλαδή αλληλεπιδρούν ασκώντας δύναμη το ένα στο άλλο.

Όταν τα σώματα αυτά είναι ακίνητα, το ένα σε σχέση με το άλλο, η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι κάθετη στην επιφάνεια συνεπαφής και ονομάζεται κάθετη αντίδραση (N ή F_k).

Όταν όμως τα σώματα τείνουν να κινηθούν ή κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο, δηλαδή όταν ολισθαίνουν, η δύναμη αλληλεπίδρασης δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια συνεπαφής, αλλά πλάγια.

Στην περίπτωση αυτή αν θεωρήσουμε ένα ορθοκίονιο σύστημα συντεταχμένων Oxy με τον άξονα $x'x$ να είναι παράλληλος προς την επιφάνεια συνεπαφής και τον άξονα yy' να είναι κάθετος, αναλύοντας την πλάγια δύναμη σε συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των εν λόγω αξόνων λαμβάνουμε δύο συνιστώσες. Από αυτές, η συνιστώσα κατά τον άξονα yy' είναι η κάθετη αντίδραση N , ενώ η συνιστώσα κατά τον άξονα $x'x$ ονομάζεται τριβή (T).

Η τριβή, όταν τα σώματα τείνουν να κινηθούν το ένα σε σχέση με το άλλο ονομάζεται στατική, ενώ όταν ολισθαίνουν ονομάζεται ολισθητικής.

[Σημείωση: τα σώματα τείνουν να κινηθούν το ένα σε σχέση με το άλλο αν στο ένα από αυτά - ή και στα δύο - ασκηθεί δύναμη παράλληλη προς την επιφάνεια συνεπαφής χωρίς όμως να παρατηρείται κίνηση].

Η τριβή ως συνιστώσα αλληλεπίδρασης των των δύο σωμάτων, είναι αποτέλεσμα της εμπλοκής των ανωμαλιών που υπάρχουν στις επιφάνειες των σωμάτων που είναι έ'επαφή.

Οι ανωμαλίες αυτές δρουν ως εμπόδια στην

κίνηση. Ακόμη και οι πιο λείες επιφάνειες, σε μικροσκοπική εξέταση, παρουσιάζονται με ανωμαλίες. Έτσι, υπάρχουν πολλά σημεία επαφής όπου τα άτομα "κολλούν" μεταξύ τους αλληλεπιδρώντας με δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικές.

Μάλιστα, όμως, αρχίζει η ολισθήση τα άτομα ξεκολλούν ή τραβιούνται από τη μία επιφάνεια στην άλλη.

Τριβή υπάρχει ακόμη και στα ρευστά (υγρά και αέρια), αφού ένα σώμα που κινείται μέσα σε ένα ρευστό πρέπει να επρωχτεί στο πλάι μέρος της μάζα τους.

Σε κάθε περίπτωση όμως η κατεύθυνση της δύναμης της τριβής, είτε είναι στατική είτε είναι ολισθητική, είναι πάντοτε αντίθετη στην κατεύθυνση προς την οποία τείνει να κινηθεί ή κινείται το κάθε σώμα.

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί διαφοροποιούν τη στατική τριβή από την τριβή ολισθητικής. Έχει δε ενδιαφέρον το ότι η δύναμη της τριβής είναι σημαντικά μεγαλύτερη για ένα σώμα, όταν βρίσκεται στο χείλος της ολισθητικής παρά όταν ήδη ολισθαίνει.

Ας το εξετάσουμε προεγκτικότερα.

Ας πάρουμε ένα κιβώτιο 60Kg , ακίνητο σε οριζόντιο έδαφος που δεν είναι λείο. Η τριβή ολισθητικής θα εμφανιστεί μόνο όταν το κιβώτιο αρχίσει να ολισθαίνει. Όταν δε είναι ακίνητο χωρίς να υφίσταται οριζόντια δύναμη (χωρίς π.χ. να προσπαθείται να το επρωχνεται), η δύναμη τριβής είναι μηδέν.

Ας υποθέσουμε τώρα πως αρχίσετε να το επρωχνετε οριζόντια με μία δύναμη 50N . Το κιβώτιο δεν αρχίζει ακόμη να ολισθαίνει, αλλά τώρα υπάρχει μία δύναμη στατικής τριβής 50N ανάμεσα σε αυτό και στο έδαφος. [η δύναμη αυτή μαζί με την κάθετη αντίδραση δίνει τη συνολική δύναμη που ασκείται από το έδαφος στο κιβώτιο και η οποία, όπως ήδη έχουμε πει, είναι πλάγια].

Η εν λόγω δύναμη - η στατική τριβή - δρα αντίθετα προς τη δική σας ώθηση· επομένως η ολι

κή δύναμη πάνω στο κιβώτιο είναι μηδέν, και
αυτό παραμένει ακίνητο. Αν, όμως, το κι-
βώτιο βρίσκεται πάνω σε επιφάνεια χωρίς
τριβή, τότε η ώθηση των 50 N θα το επιτα-
χύνει.

Ας υποθέσουμε ότι αυξάνουμε προοδευτι-
κά την ώθηση. Όταν φθάσει, ας πούμε στα
 150 N , το κιβώτιο κοντεύει να ολισθήσει. Η
δύναμη της στατικής τριβής έχει γίνει τότε και
αυτή 150 N . Αν επρώξουμε με μεγαλύτερη
δύναμη, το κιβώτιο ελευθερώνεται και ολι-
στρά. Η δύναμη της στατικής τριβής έχει πά-
ρει τώρα τη μικρότερη τιμή της η οποία χα-
ρακτηρίζεται ως οριακή τριβή.

Το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι:

1. η στατική τριβή δεν έχει σταθερή τιμή, αλ-
λά η τιμή της αυξάνεται από το μηδέν μέχρι
τη μέγιστη τιμή της, την οριακή τριβή.

2. η τιμή της στατικής τριβής προσαρμόζεται
πάντοτε με την τιμή της δύναμης F που ασ-
κείται στο σώμα παράλληλα με την επιφα-
νεια συνεπαφής όταν αυτό δεν κινείται ακό-
μη σε σχέση με το άλλο.

Όταν αρχίσει η ολισθήση οι ανωμαλίες
των επιφανειών συνεπαφής ασκούν μικρότερη
δύναμη μεταξύ τους απ' όση όταν το κιβώ-
τιο ήταν ακίνητο και η δύναμη τριβής πε-
ριορίζεται, ας πούμε στα 140 N .

Μπορούμε να ελαττώσουμε τη δύναμη
με την οποία επρώχνουμε το κιβώτιο στα
 140 N και το κιβώτιο θα συνεχίσει να ολι-
στάνει με σταθερή ταχύτητα. Αν επιμείνουμε
να το επρώχνουμε με 150 N , το κιβώτιο θα επι-
ταχυνθεί και θα κερδίσει ταχύτητα.

Πειραματικά έχει διαπιστωθεί ότι:

1. τόσο η οριακή τριβή όσο και η τριβή ο-
λισθήσεως είναι ανάλογη της κάθετης αντιέ-
ρασης F_k . Συγκεκριμένα:

για την τριβή ολισθήσεως, T_k , ισχύει ότι
 $T_k = \mu_k \cdot F_k$

Ο συντελεστής αναλογίας, μ_n , λέγεται συντελεστής τριβής ολίσθησης και εκφράζει την εξάρτηση της τριβής ολίσθησης από τη φύση των επιφανειών που βρίσκονται ε' επαφή

για τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής την οριακή τριβή, T_s , λογύει ότι

$$T_s = \mu_s \cdot F_k$$

Ο συντελεστής αναλογίας, μ_s , λέγεται συντελεστής στατικής οριακής τριβής και εκφράζει την εξάρτηση της οριακής τριβής από τη φύση των επιφανειών που βρίσκονται ε' επαφή.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\mu_n < \mu_s$. οπότε θα είναι και $T_n < T_s$.

Σημείωση: λέγοντας "φύση" αναφερόμαστε στο είδος του υλικού των δύο σωμάτων, στο πόσο λείες είναι οι επιφάνειες συνεπαφής και στη θερμοκρασία στις επιφάνειες.

2. η δύναμη της τριβής δεν εξαρτάται ούτε από το εμβαδόν της επιφάνειας συνεπαφής ούτε από την ταχύτητα του ενός σώματος προς το άλλο, εφόσον η ταχύτητα δεν υπερβαίνει κάποιο όριο.

— Η διαφορά μεταξύ της στατικής τριβής και της τριβής ολίσθησης είναι θεμελιώδης και παρα πολλές περιπτώσεις. Π.χ όταν φρενάρετε το αυτοκίνητό σας αναχυσαστικά είναι σημαντικό να μην πιέσετε τα φρένα τόσο ώστε να αναγκάσετε τους τροχούς να ακινητοποιηθούν. Όταν μηλομαίρονται (δεν περιστρέφονται) οι τροχοί χλιδρούν πάνω στο οδόστρωμα και προκαλούν μικρότερη τριβή (πρόκειται για τριβή ολίσθησης) απ' όση αν κυλούσαν μέχρι να σταματήσουν (κατά την κύλιση η τριβή είναι στατική). Δηλαδή, αν κατά το φρενάρισμα, ο τροχός κυλά αντί να χλιδρά (να ολισθαίνει) η τριβή είναι μεγαλύτερη.

Κατά το φρενάρισμα όμως η τριβή είναι η επιβραδύνουσα δύναμη και επομένως όσο μεγαλύτερη είναι η τριβή τόσο μικρότερο

θα είναι το διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ή να αποφευχθεί μία σύγκρουση ή εφόσον συμβεί η σχετική ταχύτητα των συγκρουόμενων να είναι μικρότερη.

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο τριβές φαίνεται επίσης, όταν ένα αυτοκίνητο μπαίνει σε μία στροφή πολύ χρήσρα. Έτσι και αρχίζουν να ολισθαίνουν οι τροχοί, η δύναμη της τριβής ελαττώνεται και πάει, το αυτοκίνητο φεύγει από το δρόμο.

Εφαρμοχές σε προβλήματα.

1. Έστω πρόβλημα στο οποίο έ' ένα σώμα που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται δύναμη F η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ακολουθεί/ούν τα/τα ζητούμενα του προβλήματος.

Σειρά εργασιών για τη λύση.

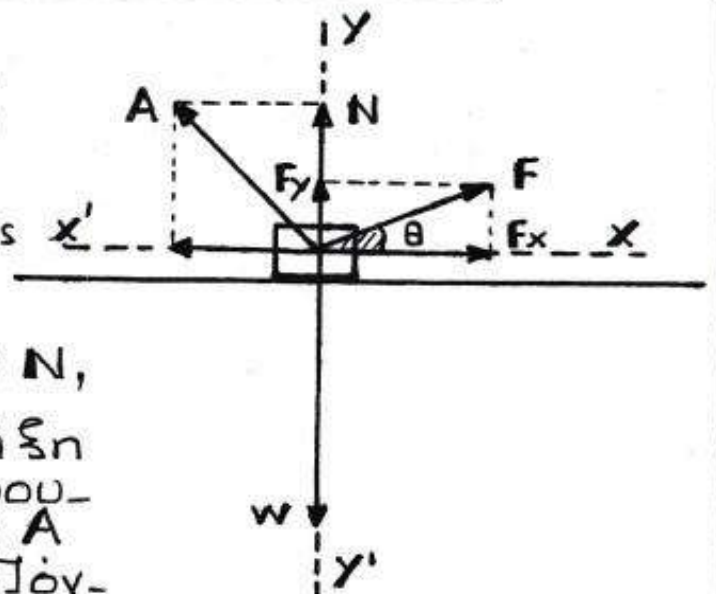
α. Δηλώνουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Στην περίπτωση μας στο σώμα ασκούνται η δύναμη, του βάρους w , της κάθετης αντίδρασης N , της τριβής T , και η F .

Σημείωση: στην πράξη αποφεύχουμε να αναφέρουμε τη συνολική δύναμη A που ασκείται από το οριζόντιο επίπεδο στο σώμα και αναφέρουμε κατευθείαν τις συνιστώσες της N και T .

β. Κατασκευάζουμε το διανυσματικό διάγραμμα των ασκούμενων δυνάμεων αναλύοντας-όσες αναλύονται - σε συνιστώσες.

γ. Βρίσκουμε τις συνιστώσες. Είναι $F_x = F \sin \theta = \dots$, $F_y = F \cos \theta = \dots$.



δ. Γράφουμε τις σχέσεις που λογίζουν.

1. Αν το σώμα κινείται με v : σταθερή είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + F_y - w = 0 \leftrightarrow N = w - F_y = \dots$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x - T = 0 \leftrightarrow T = F_x = \dots \quad (1).$$

$$T = \mu \cdot N \rightarrow T = \mu \cdot (w - F_y) = \dots \quad (2).$$

2. Αν το σώμα κινείται με επιτάχυνση a είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + F_y - w = 0 \leftrightarrow N = w - F_y = \dots$$

$$\Sigma F_x = m \cdot a \rightarrow F_x - T = ma \leftrightarrow T = F_x - ma = \dots \quad (1).$$

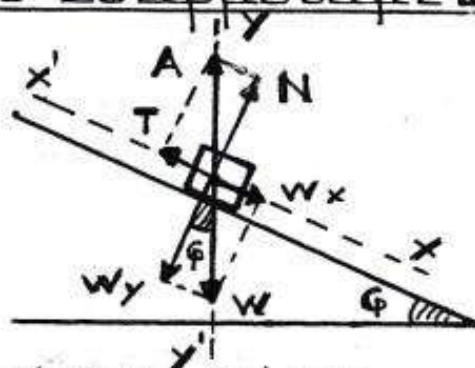
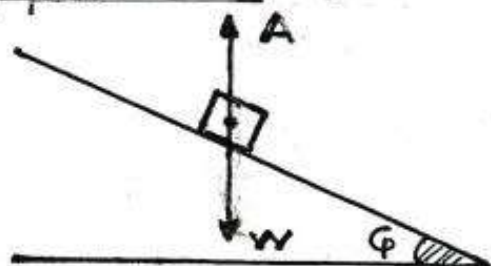
$$T = \mu \cdot N \rightarrow T = \mu (w - F_y) = \dots \quad (2).$$

Στη συνέχεια, και στις δύο περιπτώσεις, θα ερμηνεύσουμε αξιοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχοντας σαν οδηγό το/τα ζητούμενο/να του προβλήματος.

2. Έστω πρόβλημα στο οποίο ένα σώμα βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει σχηματίζει γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο. Ακολουθεί/ουν το/τα ζητούμενο/να του προβλήματος.

Σερά εργαζόμαστε για τη λύση.

α., β., ανάλογη αυτής που εφαρμόσαμε στην εφαρμογή 1.



χ. Βρίσκουμε τις συνιστώσες. Είναι

$$w_x = w \cdot \eta \mu \phi = m \cdot g \eta \mu \phi = \dots$$

$$w_y = w \sigma \nu \phi = m g \sigma \nu \phi = \dots$$

δ. Γράφουμε τις σχέσεις που ισχύουν.

1. Αν το σώμα ισορροπεί (είναι ακίνητο ή ολισθαίνει με $v:σταθ.$) είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \leftrightarrow N = w_y = \dots$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow w_x - T = 0 \leftrightarrow T = w_x = \dots \quad (1).$$

$$T = \mu N \rightarrow T = \mu \cdot w_y = \dots \quad (2).$$

2. Αν το σώμα κινείται με επιτάχυνση a είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \leftrightarrow N = w_y = \dots$$

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow w_x - T = ma \quad (1).$$

$$T = \mu N \rightarrow T = \mu w_y = \dots \quad (2).$$

Στη συνέχεια, και στις δύο περιπτώσεις, θα ερμηνεύσουμε αξιοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2), έχοντας σαν οδηγό το/τα ζητούμενο/να του προβλήματος.

Σημείωση. Αν το σώμα είναι ακίνητο η τριβή T είναι στατική ενώ όταν κινείται (ολισθαίνει) είναι ολισθητική.

Παρατήρηση. Στην 1^η περίπτωση - όπου το σώμα ισορροπεί - εάν η κλίση του επιπέδου είναι μικρή το σώμα παραμένει ακίνητο διότι η τριβή - $T = w_x = \mu \eta \mu \phi$ - είναι μικρότερη της οριακής τριβής, T_s . Η στατική τριβή εξουδετερώνει τη συνιστώσα w_x του βάρους και δεν επιτρέπει στο σώμα να ολισθήσει προς τα κάτω.

Αν, τώρα, αρχίσουμε να αυξάνουμε προοδευτικά τη γωνία ϕ του κεκλιμένου επιπέδου, θα παρατηρήσουμε ότι, για μια ορισμένη τιμή της γωνίας ϕ το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθαίνει και κινείται με περίπου σταθερή ταχύτητα.

Η γωνία αυτή ονομάζεται γωνία τριβής, ϕ_z .

Όταν όμως η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με τη γωνία τριβής επειδή $v:σταθ.$ για την τριβή ολισθητικής ισχύει ότι $T = w_x \rightarrow$

$$T = \mu \eta \mu \phi_z. \text{ Αλλά } T = \mu \cdot N = \mu \eta \rho \sigma \nu \phi_z$$

$$\text{Άρα } \mu \eta \mu \phi_z = \mu \eta \rho \sigma \nu \phi_z \rightarrow$$

$$\eta\mu\phi z = \mu\theta\upsilon\nu\phi z \rightarrow \boxed{\epsilon\phi\phi z = \mu}$$

Η σχέση αυτή μας παρέχει έναν εύκολο τρόπο προσδιορισμού του συντελεστή τριβής.

Αν η χωνία κλίσεως ϕ γίνει μεγαλύτερη της χωνίας τριβής ϕz , οι δυνάμεις $Wx = m\eta\mu\phi$ και $T = \mu m\theta\upsilon\nu\phi z$ δεν είναι, πλέον, δυνατόν να ισορροπήσουν και αυτό χιλιζι αυξανόμενης της χωνίας ϕ αυξάνεται η δύναμη Wx ενώ η δύναμη T όχι μόνο δεν αυξάνεται — αφού έχει λάβει ήδη τη μέγιστη τιμή της — αλλά ελαττώνεται, διότι η κάθετη ανζίδραση $N = Wy = m\theta\upsilon\nu\phi$ ελαττώνεται.

Έτσι, λόγω της έλλειψης ισορροπίας το σώμα ολιεθαίνει επιταχυνόμενο.

Κύλιση και Τριβή

Η κύλιση ενός σώματος προϋποθέτει την ύπαρξη τριβής. Για να κυλιεται ένας τροχός, ένας κύλινδρος κ.τ.λ πρέπει να υπάρχει, απαραίτητα, η τριβή T , εκτός από την περίπτωση που κυλιεται λόγω αδράνειας. Πρόκειται για στατική τριβή και χι αυτό κατά την κύλιση δεν έχουμε απώλειες ενέργειας λόγω τριβής.

Η στατική τριβή επειδή κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλιόμενου σώματος δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμοχής της και επομένως δεν εκτελεί έργο. Επομένως, αν κατά την κύλιση ενός σώματος παραχούν έργο μόνο δυνάμεις διατηρητικές η μηχανική ενέργεια του κυλιόμενου σώματος διατηρείται.

Οι τυχόν απώλειες ενέργειας κατά την κύλιση οφείλονται στην παραμόρφωση — κατά κύριο λόγο — του κυλιόμενου σώματος ή του επιπέδου στο οποίο χίνεται η κύλιση, παραμόρφωση που συνεπάχεται ροπή στο κυλιόμενο σώμα (τριβή κύλισης) που αντιτίθεται στην κύλιση του.

Παράδειγμα

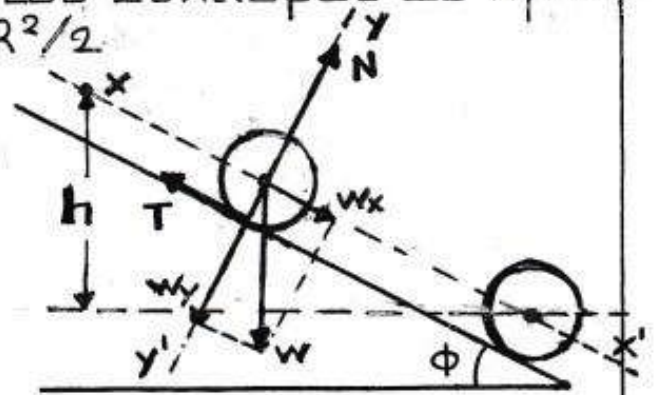
Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει κατά μήκος οριζοντιου επιπέδου

γωνίας ϕ . Ποιά είναι η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι h ;

Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) θεωρείται χωνωτή. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι $I = MR^2/2$.

Απάντηση

Στον κύλινδρο, κατά τη διάρκεια της κίνησης του, ασκούνται η δύναμη του βάρους w , της κάθετης αντίδρασης N και της τριβής T .



Είναι $w_x = w \eta \mu \phi = M g \eta \mu \phi$.

α. Η κύλιση του κυλίνδρου οφείλεται στην τριβή T . Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι αυτή που περιστρέφει τον κύλινδρο. Η τριβή όμως, κατά τη διάρκεια της περιστροφής του κυλίνδρου, δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμοχής της αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου.

Πρόκειται δηλαδή για στατική τριβή.

Επομένως κατά τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου η μόνη "ερχόμενη" δύναμη που ασκείται ε' αυτόν είναι η δύναμη του βάρους που είναι δύναμη διατηρητική, οπότε η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται.

Έτσι, αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση στην οποία βρίσκεται ο κύλινδρος μετά από κατακόρυφη μετατόπιση κατά h - τελική θέση - τότε στην αρχική του θέση ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια $U_a = Mgh$ και ισχύει:

$$U_a + K_a = U_e + K_e \rightarrow$$

$$Mgh + 0 = 0 + M U_{cm}^2 / 2 + I \omega^2 / 2 \rightarrow$$

$$Mgh = M U_{cm}^2 / 2 + M R^2 \omega^2 / 4 \rightarrow$$

$$4gh = 2 U_{cm}^2 + R^2 \omega^2 \quad U_{cm} = \omega R$$

$$4gh = 2U_{\omega}^2 + U_{\omega}^2 \rightarrow$$

$$U_{\omega}^2 = 4gh/3$$

$$U_{\omega} = 2\sqrt{gh/3}$$

2ος τρόπος

Επίλυση με βάση το Θ.Μ.Κ.Ε.

β. Είναι $\Sigma F_x = m a_{\omega}$

$$\Sigma F_x = w_x - T = Mg \eta \mu \phi - T, \text{ οπότε}$$

$$M a_{\omega} = Mg \eta \mu \phi - T \quad (1).$$

Είναι $\Sigma \tau = I \cdot a_x$

$$\Sigma \tau = T \cdot R, \text{ οπότε}$$

$$T \cdot R = I \cdot a_x \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 a_x \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} M a_x \cdot R \quad \underline{a_{\omega} = a_x \cdot R},$$

$$T = \frac{1}{2} M a_{\omega} \quad (2).$$

$$\text{Απο τις (1) και (2)} \rightarrow M a_{\omega} = Mg \eta \mu \phi + \frac{M a_{\omega}}{2}$$

$$\leftrightarrow \underline{a_{\omega} = 2g \eta \mu \phi / 3}.$$

Τριβή κύλισης

Έστω ότι ένας κύλινδρος, μετά από μία αρχική στροφική ώθηση, κυλιέται ελεύθερα σε οριζόντιο επίπεδο.

Στην ιδανική περίπτωση ο κύλινδρος θα εξαμολογηθεί, λόγω αδράνειας, να κυλιέται επ' άπειρον, επειδή ουδεμία ροπή ασκείται ε' αυτόν. Στην πραγματικότητα όμως, θα παρατηρήσουμε ότι η χωνιακή ταχύτητα, άρα και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ελαττώνεται συνεχώς, χάρη να μη δενιστεί τελικά.

Αυτό σημαίνει ότι στον κυλιόμενο κύλινδρο ασκείται μια ροπή η οποία αντισταθμίζει την κυλιση του — η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα χάρη ταχύτητες μερικών δεκάδων m/s.

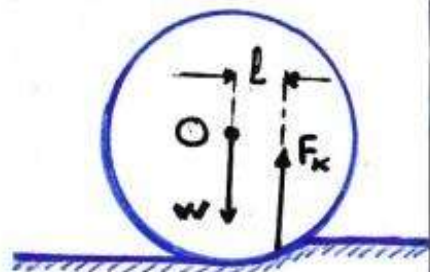
Η ροπή αυτή ονομάζεται τριβή κύλισης.

Πειραματικά - και θεωρητικά, αλλά πολύ δύσκολα - αποδεικνύεται ότι η τριβή κύλισης M_k είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης F_k με την οποία συμπιέζονται ο κύλινδρος με το οριζόντιο επίπεδο, δηλαδή, $M_k = l \cdot F_k$, όπου l είναι μία σταθερά, η οποία ονομάζεται ευντελεστής τριβής κύλισης, που εξαρτάται από την πλαστικότητα των υλικών δαπέδου και κυλίνδρου.

Η εμφάνιση της τριβής κύλισης εξηγείται ως εξής.

Αν, τόσο ο κύλινδρος όσο και το δάπεδο είναι απολύτως "ανένδοτα στερεά" (rigid body), καμία παραμόρφωση δεν θα παρατηρηθεί και η κάθετη δύναμη F_k , την οποία ασκεί το επίπεδο κύλισης στον κύλινδρο, θα διέρχεται από τον άξονα περιστροφής - και συμμετρίας - του κυλίνδρου και ως εκ τούτου δεν θα δημιουργείται ροπή που να αντισταθεί στην περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου, με συνέπεια ο κύλινδρος να κυλίσταται επ' άπειρον.

Στην πραγματικότητα όμως, τόσο ο κύλινδρος όσο και το επίπεδο κύλισης πάντοτε παραμορφώνονται κατά τι, με συνέπεια η επαφή του κυλίνδρου με το επίπεδο κύλισης να μη γίνεται κατά μία χενέτρα του κυλίνδρου - κατά μία ευθεία - αλλά κατά μία μικρή επιφάνεια. Αυτός είναι ο λόγος που όταν ο κύλινδρος κυλίσταται, οι δυνάμεις που ασκούνται από το επίπεδο κύλισης δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες λόγω ελαστικής αδράνειας και, χι αυτό, η συνισταμένη τους δύναμη F_k δεν διέρχεται από τον άξονα O του κυλίνδρου, αλλά είναι λιγότερο μετατοπισμένη.



Αποτέλεσμα όλων αυτών είναι οι αγκυ-
μενες στον κύλινδρο δύο δυνάμεις - το βάρος
του w και η δύναμη F_k από το επίπεδο κύ-
λιξης - να σχηματίζουν ζεύγος, η ροπή του ο-
ποίου αντιτίθεται στην κύλιξη με συνέπεια
να ελαττώνεται σταδιακά η αρχική κινητική
ενέργεια του κυλίνδρου, για να μηδενιστεί
τελικά και ο κύλινδρος να σταματήσει.

Η ροπή του ζεύγους αυτού είναι ακρι-
βώς η τριβή κύλιξης.

Ερώτηση

Τι ευθύνεται για το σταμάτημα, π.χ, ενός
τροχού, που κυλιέται ελεύθερα σε οριζόντιο δά-
πεδο, ξεκινώντας με αρχική ταχύτητα κέντρου
μάζας $v_{cm} \neq 0$;

Απάντηση

α. Αν ο τροχός κυλιέται σε κενό αέρα, προ-
φανώς υπεύθυνη είναι η τριβή κύλιξης όποια τι-
μή και αν έχει αρχικά η v_{cm} .

β. Αν ο τροχός κυλιέται στον ατμοσφαιρικό
αέρα, τότε επειδή η αναπτυσσόμενη αντίσταση
του αέρα είναι ανάλογη του v_{cm}^2 αν:

- η αρχική v_{cm} είναι μικρή - της τάξεως με-
ρικών δεκάδων m/s - υπεύθυνη κατά κύριο λό-
γο, για το σταμάτημα του τροχού είναι η τριβή
κύλιξης και δευτερευόντως η αντίσταση του αέρα.

- η αρχική v_{cm} είναι αρκετά μεγάλη, υπεύ-
θυνη, κατά κύριο λόγο, είναι η αντίσταση του
αέρα.

Εφαρμοχές

Εφόσον η ροπή M_k αντιτίθεται στην κύλιξη,
έπεται ότι, για να κυλιέται ένας τροχός με στα-
θερή ταχύτητα, πρέπει να εφαρμόζεται ε' αυτόν
εξωτερικά μία ροπή, ίση και αντίθετη προς την
τριβή κύλιξης. Έτσι:

α. Στην κίνηση ενός αυτοκινήτου.

Όταν το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτη-

τα, ο κινήτρας του αυτοκινήτου με σύστημα οδοντωτών τροχών - χρανάτια κ.τ.λ - αγκεί, στον άξονα δύο τροχών του αυτοκινήτου, ροπή ίση και αντίθετη προς την τριβή κύλισης.

β. Στην κίνηση ενός τρένου, μίας άμαξας κ.τ.λ.

Σε πολλές περιπτώσεις - όπως στο τρένο - αγκείται, αντί ροπής, μια ελκτική δύναμη $F_{ελ}$ η οποία εφαρμόζεται στον άξονα των τροχών, και δημιουργεί με την τριβή T το αναχυσίο για την κύλιση Τεύχος δυνάμεων.

Για τον υπολογισμό της δύναμης $F_{ελ}$ που αγκείται στον άξονα των τροχών ενός οχήματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει να εξετάσουμε τις δυνάμεις που αγκούνται στους τροχούς του οχήματος.

Σε ένα τροχό αγκείται η οριζόντια ελκτική δύναμη $F_{ελ}$, την οποία θεωρούμε ότι αγκείται στον άξονα του τροχού, το βάρος w του τροχού αυξημένο βέβαια κατά ένα ποσοστό του βάρους του οχήματος και η αντίδραση A από το έδαφος η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες: την καθετη αντίδραση F_k και την τριβή T .

Εφόσον ο τροχός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, πρέπει η συνιστώμενη των ροπών όλων των δυνάμεων να είναι ίση με μηδέν. Αν χράιουμε τη συνθήκη αυτή ως προς τον στιχμαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το A , παίρνουμε την εξίσωση:

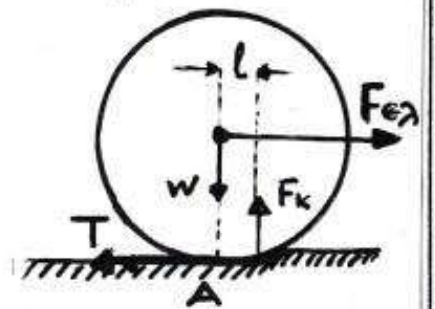
$$F_{ελ} \cdot R - F_k \cdot l = 0, \text{ όπου } R \text{ η ακτίνα του τροχού.}$$

$$\text{Είναι } F_k = w = Mg, \text{ οπότε}$$

$$F_{ελ} = \frac{l}{R} \cdot w \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

α. η ελκτική δύναμη $F_{ελ}$, η οποία είναι αναχυσία για να κινείται το όχημα με σταθερή τα-



χύτητα, είναι ανάλογη με το βάρος του οχήματος. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το βάρος το οχήματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η δύναμη $F_{ελ}$ που απαιτείται για την κίνηση.

β. η δύναμη $F_{ελ}$ είναι τόσο μικρότερη, όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα R του τροχού, σχεδόν που δικαιολογεί τη χρησιμοποίηση τροχών μεγάλης διαμέτρου σε οχήματα που μεταφέρουν μεγάλα φορτία ή κινούνται σε μαλακά εδάφη όπου το ℓ είναι μεγαλύτερο.

Προβοχή

Κατά την κύλιση, η τριβή κύλισης καταναλώνει έργο ενώ η τριβή T δεν εκτελεί έργο.

Α. Ζαφειρίδης