ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΚΥΜΑΤΑ

2.2 Μηχανικά Κύματα
2.3 Επαλληλία ή Υπέρθεση Κυμάτων
2.4 Συμβολή Δύο Κυμάτων Στην Επιφάνεια Υγρού
Εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας μόνο για σύγχρονες πηγές και εύρεση των σημείων ενισχυτικής και καταστροφικής συμβολής κοντά στις πηγές.
Εκτός η μαθηματική μελέτη των σελίδων 50,51 και η εύρεση του πλάτους σε τυχόν σημείο.
Εκτός οι ασκήσεις και τα προβλήματα με πηγές οι οποίες δεν είναι σύγχρονες και με σημεία τα οποία έχουν ενδιάμεσο πλάτος καθώς και προβλήματα που αφορούν την εύρεση της τιμής του πλάτους και της περιόδου.

2.5 Στάσιμα Κύματα
Οι δραστηριότητες και τα ένθετα δεν περιλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις - Προβλήματα
Ερωτήσεις: σελ. 75-77, 2.1 - 2.12
Ασκήσεις: σελ. 80-81, 2.29-2.36
Προβλήματα: σελ. 83-85: 2.47, 2.51, 2.53, 2.54 (Εκτός τα προβλήματα 2.46, 2.48, 2.49, 2.50, 2.52)

Επιμέλεια: Βουζίκης Αντώνης

Εισαγωγικοί ορισμοί

α) **Ομογενές** λέγεται ένα μέσο όταν παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλη την έκταση της μάζας του.

β) **Ισότροπο** λέγεται ένα μέσο όταν παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις.

γ) **Ελαστικό** λέγεται ένα μέσο όταν τα στοιχειώδη σωματίδια που το αποτελούν συνδέονται με ελαστικές δυνάμεις.

Έτσι, αν ένα ελαστικό σώμα παραμορφωθεί με την επίδραση μιας δύναμης, η παραμόρφωση του θα είναι παροδική. Μόλις δηλαδή σταματήσει η επίδραση της δύναμης, το σώμα θα ξαναπάρει την αρχική του μορφή.

1. Μηχανικά κύματα

Κύμα ονομάζουμε κάθε διαταραχή που μεταδίδεται με ορισμένη ταχύτητα σε ένα ελαστικό υλικό μέσο και μεταφέρει **ενέργεια** και **ορμή.**

Αν η πηγή του κύματος εκτελεί περιοδική κίνηση, τότε το κύμα που προκύπτει ονομάζεται **περιοδικό κύμα**.

Αν η πηγή του κύματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε το κύμα που προκύπτει ονομάζεται ημιτονοειδές ή **αρμονικό κύμα**.

Φαινόμενα που είναι κοινά σε όλα τα κύματα είναι η **ανάκλαση**, η **διάθλαση** και η **συμβολή**.

Κατηγορίες κυμάτων.

Α) Ανάλογα με το είδος της ενέργειας που μεταφέρουν τα κύματα διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: **μηχανικά** και **ηλεκτρομαγνητικά.**

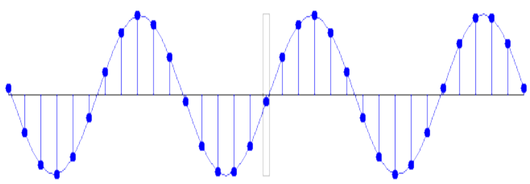
Τα μηχανικά κύματα, διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες.

- **Γραμμικά κύματα**
- **επιφανειακά κύματα**
- **κύματα χώρου**

Β) Ανάλογα με την διεύθυνση ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου ,τα κύματα διακρίνονται σε **εγκάρσια** και **διαμήκη**.

Εγκάρσια:

➢ Ονομάζονται τα κύματα στα οποία όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται **κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης** του κύματος.

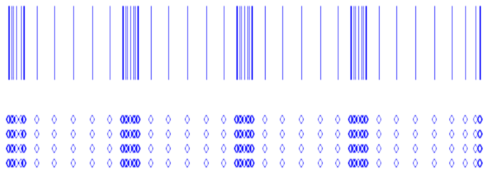


➢ Διαδίδονται μόνο στα **στερεά**.

➢ Παράδειγμα εγκάρσιων κυμάτων ειναι αυτά που διαδίδονται κατά μήκος μιας χορδής. Τα κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια των υγρών μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση εγκάρσια.

Διαμήκη:

- Ονομάζονται τα κύματα στα οποία τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.



- Τα **διαμήκη** διαδίδονται τόσο στα **στερεά** όσο και στα **υγρά** και τα **αέρια**.
- Παράδειγμα διαμήκων κυμάτων ειναι τα ηχητικά κύματα.

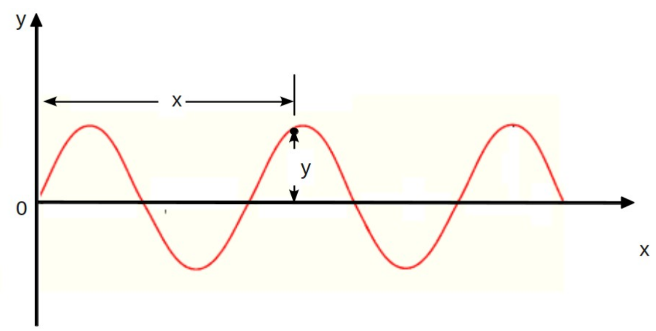
Το κύμα και τα σημεία

Κατα τη διάδοση ενος κύματος, διακρίνουμε δύο διαφορετικά φαινόμενα. Το ένα είναι η κίνηση του κάθε ενός μορίου (σημείου) του μέσου ξεχωριστά.Τα μόρια (σημεία) του υλικού μέσου, εκτελούν ταλάντωση, γυρω απο την ίδια θέση ισορροπίας, με το ίδιο πλάτος, αλλά με διαφορετική φάση.

Το άλλο είναι η συνολικη κίνηση του μέσου που προκύπτει απο τη διάδοση αυτής της διαταραχής και είναι το κύμα. Έχουμε λοιπόν τα χαρακτηριστικά μεγέθη της κίνησης (ταλάντωσης) των σημείων και τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος.

Κάθε σημείο του μέσου, προσδιορίζεται απο την θέση x που έχει σε σχέση με την πηγή των κυμάτων.

Χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης των σημείων



Κατα την ταλάντωσή τους, τα σημεία του μέσου, έχουν όλα τα χαρακτηριστικά ενός ταλαντούμενου σώματος.

Απομάκρυνση (y) ενός σημείου του μέσου, ειναι η απομάκρυνσή του, απο τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί.

Ταχύτητα ενός σημείου του μέσου

Χαρακτηριστικά μεγέθη των κυμάτων

Ταχύτητα διάδοσης (υ)

Τα κύματα διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα και έτσι θα ισχύει η σχέση:

$$\upsilon = \frac{x}{t}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

- **εξαρτάται** κυρίως από την πυκνότητα και από τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης.
- **Δεν εξαρτάται** από το πόσο ισχυρή είναι η διαταραχή. Για παράδειγμα ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα 344 m/s, ανεξάρτητα από το αν είναι ισχυρός ή ασθενής. Στα στερεά ο ήχος διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Περίοδος (T)

Περίοδος (T) ενός κύματος λέγεται το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου ολοκληρώνει την κίνηση του που είναι αρμονική ταλάντωση και ταυτίζεται με την περίοδο ταλάντωσης της πηγής που παράγει το κύμα.

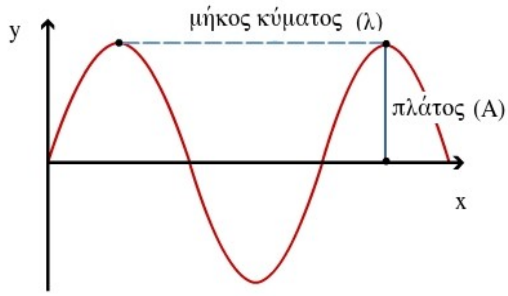
Συχνότητα (f)

Συχνότητα (f) ενός κύματος είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου και ταυτίζεται με τη συχνότητα της πηγής του κύματος.

Η συχνότητα του κύματος δείχνει τον αριθμό των κορυφών (αν πρόκειται για εγκάρσιο κύμα) ή των πυκνωμάτων (αν πρόκειται για διάμηκες) που φτάνουν σε κάποιο σημείο του μέσου στη μονάδα του χρόνου κατά τη διάδοση του κύματος.

Πλάτος του κύματος (A)

είναι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελούν τα μόρια του μέσου.



Μήκος κύματος (λ)

Ορισμός (1) :Μήκος κύματος (λ) ενός κύματος λέμε την απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.

Ορισμός (2) : Θα μπορούσαμε, να ορίσουμε το μήκος κύματος ως την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του μέσου που έχουν την ίδιο απομάκρυνση απο τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται κατά την ίδια φορά.

Στα εγκάρσια κύματα το μήκος κύματος ισούται με την απόσταση δύο διαδοχικών κορυφών ή δύο διαδοχικών κοιλάδων.

Στα διαμήκη κύματα το μήκος κύματος ισούται με την απόσταση δύο διαδοχικών πυκνωμάτων ή δύο διαδοχικών αραιωμάτων.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

α) Η συχνότητα ενός κύματος δεν εξαρτάται από το μέσο διάδοσης αλλά από τη συχνότητα της πηγής που δημιουργεί το κύμα.

β) **Αν το κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης**, η συχνότητα του διατηρείται σταθερή, ενώ αλλάζουν η ταχύτητα του και το μήκος κύματος.

γ) **Η ταχύτητα διάδοσης υ ενός κύματος εξαρτάται αποκλειστικά από το μέσο διάδοσης.** Έτσι, αν στο ίδιο μέσο δύο πηγές διαφορετικών συχνοτήτων δημιουργήσουν δύο κύματα, τα κύματα θα διαδίδονται στο μέσο με την ίδια ταχύτητα, θα έχουν όμως διαφορετικό μήκος κύματος.

θεμελιώδης εξίσωση κυματικής

Όπως είδαμε, η ταχύτητα του κύματος δίνεται από τη σχέση: $\upsilon = \frac{x}{t}$

Αν στη παραπάνω σχέση θέσουμε t = T, με βάση τον ορισμό για το μήκος κύματος θα είναι x = λ, οπότε θα έχουμε: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T}$ και, επειδή $\frac{1}{T} = f$, προκύπτει:

$$\boxed{\upsilon = \lambda \cdot f}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής και:

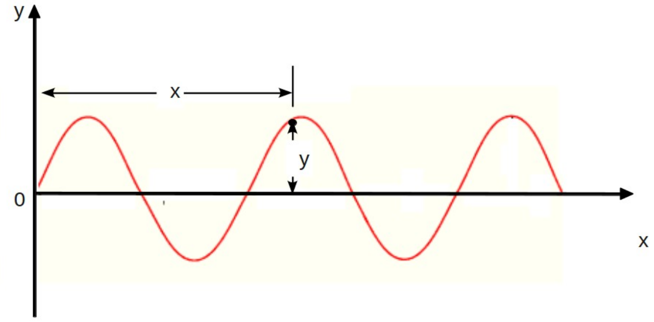
Όταν εφαρμόζεται για κύματα διαφορετικών συχνοτήτων που διαδίδονται στο ίδιο μέσο, επειδή η ταχύτητα διάδοσης διατηρείται σταθερή, μας λέει ότι το μήκος κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο με την συχνότητα.

Όταν εφαρμόζεται για ενα κυμα που αλλαζει μέσο διαδοσης , επειδή η συχνότητα παραμένει σταθερή, μας λέει οτι το μήκος κύματος ειναι ανάλογο της ταχύτητας διάδοσης.

2. Η εξίσωση του κύματος

Πως σχηματίζουμε του εξίσωση του κύματος.

Εξίσωση του κύματος ειναι μια εξίσωση της μορφής y = f(x,t) η οποία δίνει την απομάκρυνση της ταλάντωσης κάθε σημείου x, για κάθε χρονική στιγμή t.



Το πρόβλημα της εύρεσης τής εξίσωση ενος κύματος, περιγράφεται σε γενικές γραμμές ως εξής:

γνωρίζουμε την εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου (το οποίο θα μπορούσε να θεωρηθεί η πηγή του κύματος) και κατασκευάζουμε την εξίσωση της ταλάντωσης για ένα σημείο του μέσου που βρίσκεται στην τυχαία θέση x.

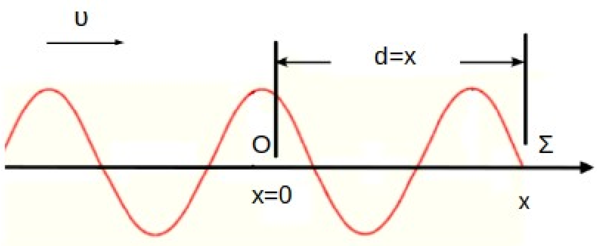
Απόδειξη της εξισωσης του κύματος

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο **στη θέση x = 0** είναι **y = Αημ(ωt)**, και το κύμα διαδίδεται **προς τη θετική** κατεύθυνση.

Εστω ενα σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση **x**, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x.

Το κύμα φτάνει πρώτα στο σημείο Ο και μετά απο χρονικό διάστημα $t_1=\frac{x}{\upsilon}$ στο σημείο Σ.

Το σημείο Σ εκτελεί ταλάντωση **πανομοιότυπη** με το Ο, απλά με χρονική υστέριση t_1.



Ετσι,

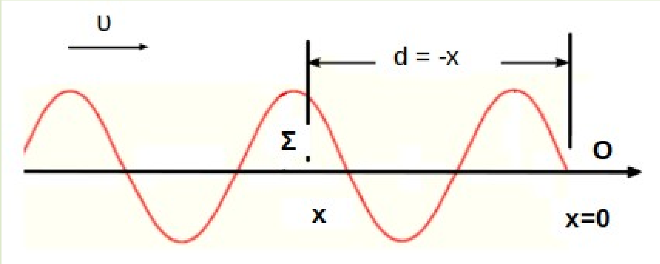
- την χρονική στιγμή t , το σημείο Σ έχει ταλαντωθεί για χρόνο $t' = t - t_1$ και η εξίσωση της ταλάντωσής του θα είναι:

$$y=A\eta\mu\,\omega t'=A\eta\mu\,\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right) \quad \text{αυτή}$$

$$= A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right) = A\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\upsilon T}\right)$$

και επειδή υT= λ η εξίσωση γίνεται: $$\boxed{y=A\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)} \qquad (1)$$

Στην ίδια εξίσωση καταλήγουμε αν επιλέξουμε σημείο Σ, που βρίσκεται στη θέση x αριστερότερα απο το σημείο O, προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x'x.



Το κύμα φτάνει πρώτα στο σημείο Σ και μετά απο χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{d}{\upsilon} = \frac{-x}{\upsilon}$ στο σημείο O.

Το σημείο Σ εκτελεί ταλάντωση πανομοιότυπη με το O, απλά την χρονική στιγμή t , το σημείο Σ έχει ταλαντωθεί για χρόνο $t' = t + t_1$ απο το σημεο O (x=0) και η εξίσωση της ταλάντωσής του θα είναι:

$$y = A\eta\mu\,\omega t' = A\eta\mu\,\omega\left(t + \frac{-x}{\upsilon}\right) = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\upsilon T}\right)$$

και επειδή υT= λ η εξίσωση γίνεται: $y = A\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Αν το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$y = A\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

2) Φάση του κύματος

Ορισμός: Φάση του κύματος, είναι η συνάρτηση

$$\varphi(x,t) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Η συνάρτηση αυτή, δίνει τη **φάση της ταλάντωσης κάθε σημείου x** , **για κάθε χρονική στιγμή t.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΦΑΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

1) **Φάση όλων των σημείων του μέσου, (στα οποία έχει φτάσει το κύμα), σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = t_1$.**

Για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = t_1$, η εξίσωση της φάσης παίρνει τη μορφή:

$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{T}\boldsymbol{t_1} - \frac{2\pi}{\lambda}x$$

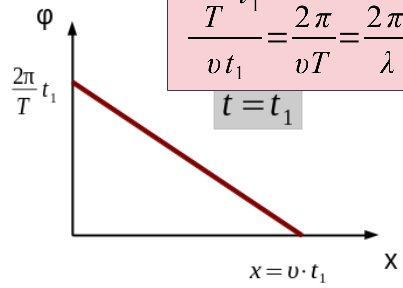
που δίνει τη φάση όλων των σημείων του μέσου, στα οποία έχει φτάσει το κύμα, για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Εχει τη μορφή συνάρτησης ευθείας $\varphi=-\alpha\cdot x+\beta$ με $\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}$ και $\beta=\frac{2\pi}{T}\cdot t_1$

Παρατηρήστε ότι:

$$\frac{\frac{2\pi}{T}t_1}{\upsilon t_1}=\frac{2\pi}{\upsilon T}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

και η γραφική της παράσταση είναι:



Πως χρησιμοποιούμε το παραπάνω διάγραμμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το άκρο Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου Οx, αρχίζει τη χρονική στιγμή t=0 να ταλαντώνεται, χωρίς αρχική φάση, (με εξίσωση δηλαδή $y=A\eta\mu\omega t$)με αποτέλεσμα να αρχίσει να διαδίδεται στο μέσο ένα εγκάρσιο κύμα. Το παρακάτω διάγραμμα δίνει τη φάση όλων των σημείων του μέσου για τη χρονική στιγμή t = 4s. Ν

Να βρείε: α) την ταχύτητα διάδοσης β) την συχνοτητα του κύματος, γ) το μήκος κύματος.

Απάντηση

<u>Α΄ τρόπος (γενικός)</u>

Αντικαθιστούμε στη σχέση $\varphi=\frac{2\pi}{T}t_1-\frac{2\pi}{\lambda}x$ $t_1=4\,s$ και έτσι η εξίσωση της φάσης όλων των σημείων για t=4s γίνεται: $\varphi=\frac{8\pi}{T}-\frac{2\pi}{\lambda}x$ (1)

Αντικαθιστούμε στην (1) τα ζεύγη τιμών $\left(x=0\,,\varphi=\frac{8\pi}{3}\right)$ και $\left(x=8\,,\varphi=0\right)$ και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει:

$$\frac{8\pi}{3}=\frac{8\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T=3\,s}$$

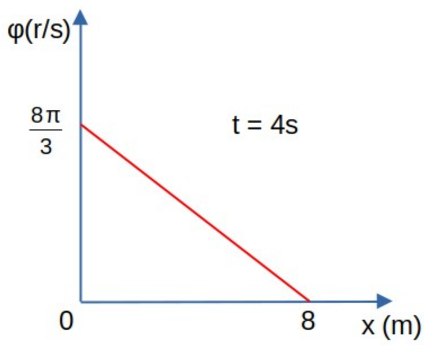
$$0=\frac{8\pi}{T}-\frac{2\pi}{\lambda}8 \Rightarrow 0=\frac{8\pi}{3}-\frac{16\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda=6\,m}$$

οπότε: $\upsilon=\frac{\lambda}{T} \Rightarrow \boxed{u=2\,m/s}$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Απο το διάγραμμα βλέπουμε ότι για t=4s το κύμα έχει φτάσει στο σημείο $x=8\,m$ άρα

$$u=\frac{x}{t}=\frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{u=2\,m/s}$$



Ακόμα για t=4s, παρατηρούμε οτι η φάση της πηγής είναι

$\varphi=\frac{8\pi}{3}$. Απο τη σχέση φ=ωt για τη φάση της πηγής έχουμε: $\varphi=\omega t \Rightarrow \frac{8\pi}{3}=\omega\cdot 4 \quad \Rightarrow$

$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{3} r/s}$ οπότε:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f=\frac{1}{3} Hz}$$

και τελικά $\upsilon=\lambda f \Rightarrow \lambda=\frac{u}{f} \Rightarrow \lambda=\frac{2}{1/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda=6m}$

2) **Φάση της ταλάντωσης ενός συγκεκριμένου σημείου x = x_1 , ως συνάρτηση του χρόνου,**

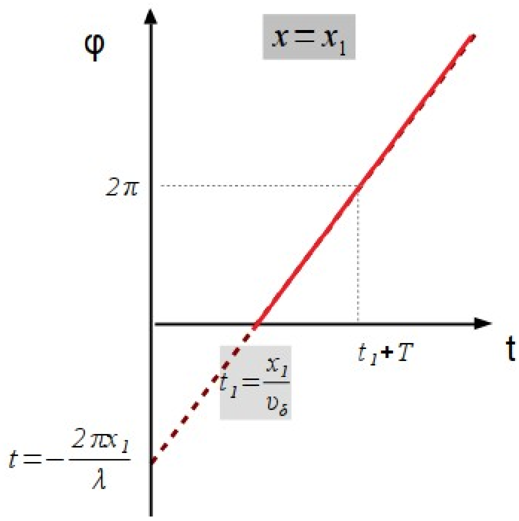
Αντικαθιστώντας x = x_1 , στην εξίσωση της φάσης, αυτή παίρνει τη μορφή:

$$\varphi(t)=\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x_1$$

και δίνει τη **φάση της ταλάντωσης του συγκεκριμένου σημείου x = x_1 , ως συνάρτηση του χρόνου, για κάθε χρονική στιγμή t > t_1 που το κύμα φτάνει στο σημείο.**

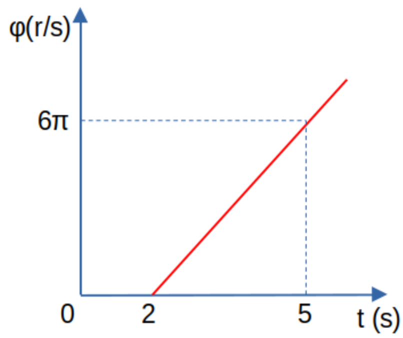
Εχει τη μορφή συνάρτησης ευθείας, $\varphi=\alpha\cdot t-\beta$ με $\alpha=\frac{2\pi}{T}$ και $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x_1$

και η γραφική της παράσταση είναι:



Πως χρησιμοποιούμε το παραπάνω διάγραμμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το άκρο Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου Οx, αρχίζει τη χρονική στιγμή t=0 να ταλαντώνεται, χωρίς αρχική φάση,με αποτέλεσμα να αρχίσει να διαδίδεται στο μέσο ένα εγκάρσιο κύμα. Το παρακάτω διάγραμμα φάσης – χρόνου αφορά την ταλάντωση ενός σημείου στη θέση $x_1=4\,m$. Να βρείτε: α) την περίοδο, β) το μήκος κύματος γ) την ταχύτητα διάδοσης.



Απάντηση

Α΄ τρόπος (γενικός)

Η εξίσωση της φάσης για το σημείο $x_1=4m$ είναι $\varphi=\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x_1$

και με αντικατάσταση $x_1=4m$ $\boxed{\varphi=\frac{2\pi}{T}t-\frac{8\pi}{\lambda}}$ (1)

Αντικαθιστούμε στην (1) τα ζεύγη: (t=2, φ=0) και (t=5, φ=6π) οπότε έχουμε:

$0=\frac{4\pi}{T}-\frac{8\pi}{\lambda}$ (3) και $6\pi=\frac{10\pi}{T}-\frac{8\pi}{\lambda}$ (4)

Λύνωντας το σύστημα των (3) και (4) εύκολα προκύπτει: $T=1s$, $\lambda=2m$ και $\upsilon=2m/s$

Β΄ τρόπος

Το κύμα φτάνει στο σημείο x=4m τη χρονική στιγμή t=2s άρα: $\upsilon=\frac{x}{t}=\frac{4}{2}\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon=2m/s}$

Εφαρμόζουμε τη σχέση $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ και παίρνουμε: $\omega=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{t_2-t_1}=\frac{6\pi-0}{5-2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega=2\pi r/s}$

Οπότε $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2\pi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T=1s}$

και $\lambda=\upsilon T=2\cdot 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda=2m}$

3) Από δυο σημεία Σ_1 και Σ_2 του ελαστικού μέσου , πλησιέστερα στην πηγή βρίσκεται εκείνο που έχει μεγαλύτερη φάση.

Απόδειξη: $\varphi_1>\varphi_2 \rightarrow 2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x_1}{\lambda}>2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x_1}{\lambda}\rightarrow x_1<x_2$

Απο αυτή την παρατήρηση μπορούμε να συμπεράνουμε την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Αν για κάποια χρονική στιγμή δίνονται οι φάσεις της ταλάντωσης δύο σημείων Κ και Λ και ισχύει $\varphi_K>\varphi_\Lambda$, τότε το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση απο το Κ προς το Λ.

4) Η διαφορά φάσης δύο σημείων στην ίδια χρονική στιγμή t:

Η διαφορά φάσης δύο σημείων Σ_1 και Σ_2 που βρίσκονται στις θέσεις x_1 και x_2, με $x_1< x_2$, δηλαδή το Σ_1 να είναι πιο κοντά στην πηγή και άρα να έχει μεγαλύτερη φάση, στην ίδια χρονική στιγμή t, θα είναι:

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x_1\right)-\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x_2\right)=2\pi\frac{(x_2-x_1)}{\lambda}$$

Αν θέσουμε $d = x_2 - x_1$ προκύπτει $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}}$

Παρατηρούμε οτι η διαφορά αυτή είναι σταθερή στο χρόνο και για δοσμένο κύμα, εξαρτάται μόνο απο την απόσταση των δύο σημείων.

5) **Η διαφορά φάσης ενός σημείου** $x = x_1$ **μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ($t_2 > t_1$)**

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) - \left(\frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) = 2\pi \frac{(t_2 - t_1)}{T}$$

άρα $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi \Delta t}{T}}$

6) **Σημεία σε συμφωνία φάσης**

Είναι αυτά που σε κάθε χρονική στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης και την ίδια απομάκρυνση, αυτά δηλαδή για τα οποία ισχύει $\Delta\varphi = 2\kappa\pi$.

όμως $\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}$ οπότε: $\frac{2\pi d}{\lambda} = 2\kappa\pi \quad \Rightarrow \quad d = \kappa\lambda$

Δηλαδή:

"σημεία σε συμφωνία φάσης, απέχουν μεταξύ τους απόσταση που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ.
Δύο διαδοχικά σημεία σε συμφωνία φάσης, απέχουν απόσταση d = λ"

7) **Σημεία σε αντίθεση φάσης**

είναι αυτά που σε κάθε χρονική στιγμή έχουν αντίθετες ταχύτητες και αντίθετες απομακρύνσεις, αυτά δηλαδή για τα οποία ισχύει **$\Delta\varphi = (2\kappa+1)\pi$**

όμως $\Delta\varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda}$ οπότε: $2\pi \frac{d}{\lambda} = (2\kappa+1)\pi \rightarrow \qquad d = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{2}$

Δηλαδή:

"Σημεία με αντίθεση φάσης, απέχουν μεταξύ τους απόσταση που είναι περιττό πολλαπλάσιο του λ/2.
Δύο διαδοχικά σημεία σε αντίθεση φάσης, απέχουν απόσταση $d = \frac{\lambda}{2}$ "

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

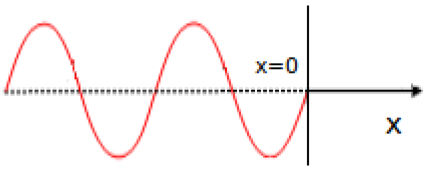
i) *Ο παραπάνω κανόνας, αν εφαρμοστεί στα διαμήκη κύματα, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε ένα διαμήκες κύμα ισχύει ο περιορισμός:* $2A \le \frac{\lambda}{2}$ *ή* $A \le \frac{\lambda}{4}$

3) Απόσταση στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα, σε κάποια χρονική στιγμή $t=t_1$.

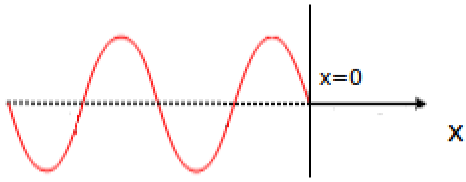
Όταν ζητείται η απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας ή οποιοδήποτε μέγεθος της ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου (φάση, ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη. . .κ.λ.π.) πρέπει πάντα να ελέγχουμε αν το κύμα έχει φτάσει ή όχι στο σημείο τη δεδομένη χρονική στιγμή. Αν το κύμα δεν έχει φτάσει η απομάκρυνση και όλα τα υπόλοιπα μεγέθη έχουν μηδενική τιμή.

- **Α΄ τρόπος**: με τη σχέση $\upsilon=\frac{x}{t}$

Ισχύει για κύματα που για t = 0, η διαταραχή (το κύμα) φτάνει στο σημείο $x=0$, όπως φαίνεται στα παρακάτω στιγμιότυπα , που αφορούν τη χρονική στιγμή t = 0.



ή



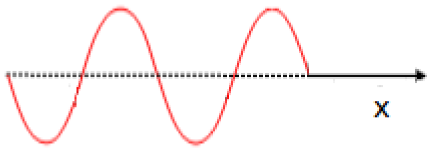
Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα υ, άρα για την απόσταση x στην οποία έχει διαδοθεί και τον αντίστοιχο χρόνο t, ισχύει η εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.

α) Η απόσταση στην οποία το κύμα έχει διαδοθεί τη χρονική στιγμή t είναι $\boxed{x=\upsilon\cdot t}$

β) Η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο x είναι $\boxed{t=\frac{x}{\upsilon}}$

- **Β' τρόπος:** με την εξίσωση της φάσης (προαιρετικός)

1η περίπτωση: Αν η εικόνα του κύματος είναι όπως αυτή του διπλανο σχήματος, δηλαδή στο μέτωπο τού κύματος υπάρχει “όρος”, το σημείο στο οποίο μόλις έχει φτάσει το κύμα, σε κάποια χρονική στιγμή t_1, είναι αυτό για το οποίο η εξίσωση της φάσης, για τη δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$ δίνει **φ = 0**.



Με την εξίσωση της φάσης, εργαζόμαστε με δύο τρόπους.

Για να βρούμε τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο $x=x_1$

i. θέτουμε $\varphi=0$ και $x=x_1$

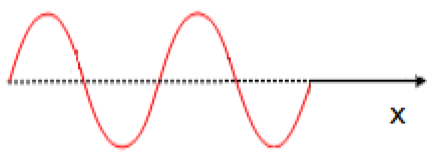
ii. λύνουμε ως προς t.

Για να βρούμε την απόσταση στην οποία το κύμα έχει διαδοθεί τη χρονική στιγμή t_1

i. θέτουμε **φ = 0** και $\mathbf{t = t_1}$

ii. λύνουμε ως προς x.

2η περίπτωση (πολύ σπάνια): Για τα κύματα των οποίων η εικόνα είναι όπως αυτή του παρακάτω σχήματος και με την προυπόθεση οτι στον κατακόρυφο άξονα η θετική φορά ειναι προς τα πάνω, το σημείο στο οποίο μόλις έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t=t_1$, είναι αυτό για το οποίο η εξίσωση της φάσης, δίνει, για τη δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$, **φ = π.**



Έτσι, με την εξίσωση της φάσης,εργαζόμαστε με δύο τρόπους.

Για να βρούμε τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο $x=x_1$ **:**

i. θέτουμε **φ = π** και **x = x$_1$**

ii. λύνουμε ως προς t.

Για να βρούμε την απόσταση στην οποία το κύμα έχει διαδοθεί τη χρονική στιγμή t$_1$:

i. θέτουμε **φ = π** και **t = t$_1$**

ii. λύνουμε ως προς x.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν πρέπει να συγχέουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος που σε ένα μέσο είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση υ = λ · f με την ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του μέσου που συνεχώς μεταβάλλεται και η τιμή της δίνεται από τη σχέση: $\boldsymbol{\upsilon = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$

4) Γραφικές παραστάσεις των μεγεθών της ταλάντωσης, συναρτήσει της θέσης (για όλα τα σημεία του μέσου) για κάποια δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$

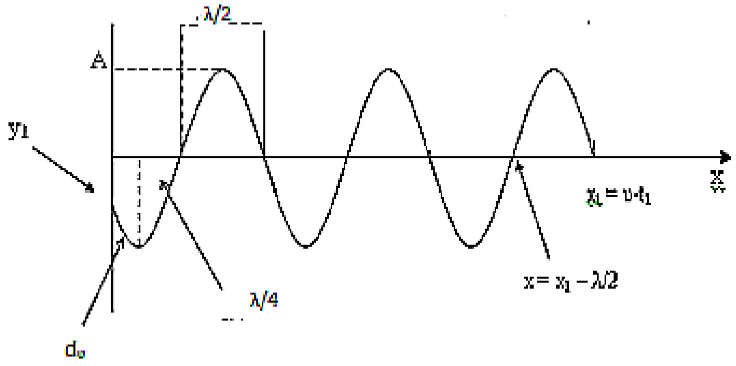
α) Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης όλων των σημείων του μέσου, σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_1$ $(y - x)$ (ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ ΚΥΜΑΤΟΣ)

Το στιγμιότυπο ενός κύματος, για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t = t_1$ είναι η γραφική παράσταση της σχέσης $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ η οποία προκύπτει απο την εξίσωση του κύματος αν σ' αυτήν αντικαταστήσουμε $t = t_1$,

Το κατασκευάζουμε εύκολα ως εξής:

1. Βρίσκουμε το σημείο στο οποίο έχει φτάσει το κύμα την χρονική στιγμή t = t$_1$.
   - $(x_1 = \upsilon \cdot t_1)$
   - ή με τον μηδενισμό της φάσης, όπως έχουμε δείξει παραπάνω.
2. Αναλύουμε την απόσταση x$_1$ στη μορφή $x_1 = k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \Delta x$ όπου $\Delta x < \frac{\lambda}{4}$.Αυτό γίνεται εύκολα διαιρώντας $x_1 : \lambda$

Εναλλακτικά μπορούμε να αναλύσουμε την χρονική στιγμή t$_1$ στη μορφή $t_1 = k\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \Delta t$

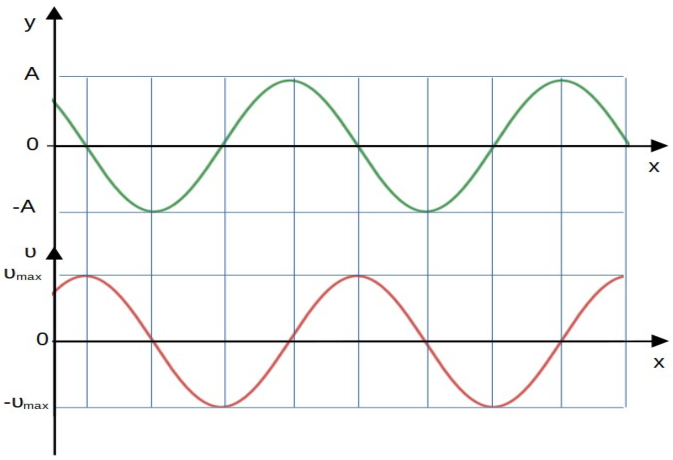


3. π.χ. έστω x_1 = 5,6 m και λ = 2 m τότε: $x=5\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}+0{,}1$

4. Αρχίζοντας από τη θέση x = x_1 σχεδιάζουμε με φορά **από τα δεξιά προς τα αριστερά**, ένα όρος για κάθε λ/2 ή T/2 και μισό όρος για κάθε λ/4 ή T/4.
5. Αφαιρώντας λ/2, από την τιμή x_1 , βαθμολογούμε όλα τα σημεία τομής του στιγμιότυπου με τον άξονα x.
6. Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_1 της πηγής για $t=t_1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση ταλάντωσης της πηγής $t = t_1$ ή στην εξίσωση του κύματος $t = t_1$ και x = 0.

β) Γραφική παράσταση της ταχύτητας όλων των σημείων του μέσου, σε κάποια χρονική στιγμή $(\upsilon - x)$ για κάποια χρονική στιγμή $t=t_1$. (ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ)

Ακολουθούμε τα παραπάνω βήματα με τη διαφορά ότι ενώ η απομάκρυνση y του σημείου $x=x_1$ στο οποίο έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t=t_1$ είναι y=0, η ταχύτητά του είναι $\upsilon=\upsilon_{max}$. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση των ταχυτήτων των σημείων του μέσου για κάποια χρονική στιγμή, μαζί με το αντίστοιχο στιγμιότυπο του κύματος.



5) Γραφικές παραστάσεις των μεγεθών της ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου $(x=x_1)$, συναρτήσει του χρόνου .

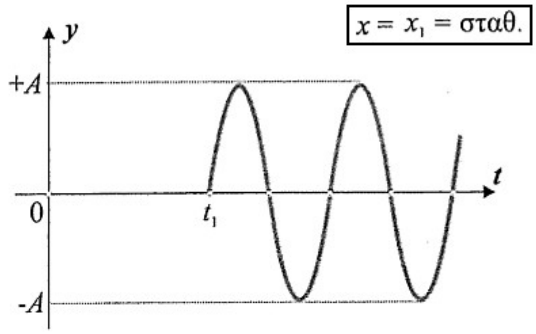
α) απομάκρυνση - χρόνος

Αν στην εξίσωση του κύματος αντικαταστήσουμε μια συγκεκριμένη τιμή x = x_1, τότε αυτή παίρνει

τη μορφή $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)$ $t \geq t_1=\frac{x_1}{\upsilon}$

και μας δίνει την απομάκρυνση του συγκεκριμένου σημείου x = x_1 συνάρτηση του χρόνου. Ειναι δηλαδή **η εξίσωση ταλάντωσης** του σημείου x = x_1.

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης είναι:



όπου $t_1 - \frac{x_1}{\upsilon}$ είναι η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο $x = x_1$, η χρονική στιγμή δηλαδή που αυτό αρχίζει να ταλαντώνεται.

β) ταχύτητα – χρόνος

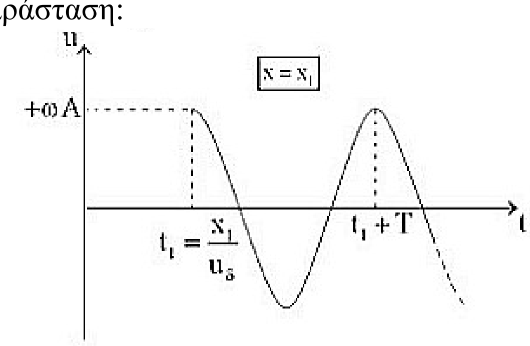
η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου του μέσου, που βρίσκεται στη θέση $x = x_1$ είναι:

$$\upsilon = \omega A\, \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\boldsymbol{x_1}}{\lambda}\right)$$

η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο αφού το κύμα φτάσει στο σημείο, δηλαδή για $t \geq \frac{x_1}{\upsilon}$.

Απο την εξίσωση αυτή φαίνεται οτι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, όλων των σημείων του μέσου, είναι $\upsilon_o = \omega A$.

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση:

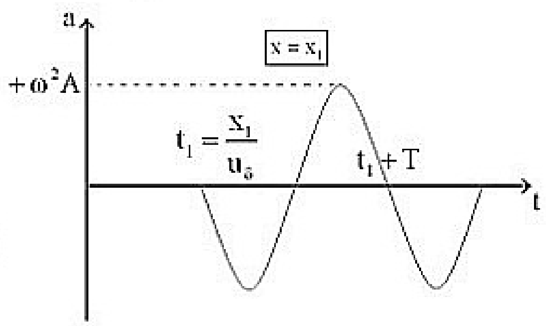


γ) επιτάχυνση – χρόνος

η εξίσωση που δίνει την επιτάχυνση του σημείου του μέσου, που βρίσκεται στη θέση $x = x_1$ είναι:

$$\alpha = -\omega^2 A\, \eta\mu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \qquad t \geq \frac{x_1}{\upsilon}$$

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση:



ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ (ΣΥΜΒΟΛΗ ή ΥΠΕΡΘΕΣΗ)

Επαλληλία ή υπέρθεση κυμάτων είναι η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσότερων κυμάτων στον ίδιο χώρο.

Αρχή της επαλληλίας

Όταν διαδίδονται στο ίδιο μέσο, τα κύματα ακολουθούν την **αρχή επαλληλίας** (ή αρχή της υπέρθεσης), σύμφωνα με την οποία:

Όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ίση με την συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επί μέρους κύματα.

$$y = y_1 + y_2$$

Παρατηρήσεις στην αρχή της επαλληλίας

1. Η αρχή της επαλληλίας ισχύει και για τα υπόλοιπα μεγέθη της ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου, όπως η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς, ισχύει δηλαδή
   - $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$
   - $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
   - $F = F_1 + F_2$
2. Η συνεισφορά κάθε κύματος στην απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη του άλλου κύματος, δηλαδή τα κύματα που διαδίδονται στο ίδιο μέσο, δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.
3. Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται, μόνο όταν τα κύματα είναι τόσο ισχυρά ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται (όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του μέσου δεν είναι ανάλογες της απομάκρυνσης). Παράδειγμα, όπου δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας, έχουμε στα κύματα που δημιουργούνται από μια έκρηξη.

Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου που απέχει r_1 και r_2 από τις πηγές.

- από t = 0 έως $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$,κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Σ, οπότε αυτό δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και παραμένει ακίνητο, άρα: **(Α = 0)**
- από $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$ έως $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$ μόνο το κύμα από την πηγή Π_1 έχει φτάσει στο σημείο Σ, οπότε αυτό ταλαντώνεται με εξίσωση $y = y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ και πλάτος $|A|' = A$
- Από τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$ που στο σημείο Σ φτάνει και το κύμα από την πηγή Π_2 ,(**μετά τη συμβολή των κυμάτων**) ισχύουν τα παρακάτω:

Σημεία ενισχυτικής συμβολής

- Όλα τα σημεία του μέσου εκτελούν ταλάντωση **ίδιας συχνότητας με αυτή των πηγών,** αλλά με διαφορετικά πλάτη και διαφορετικές φάσεις.
- **Με πλάτος** $|A'|=2A$ ταλαντώνονται τα σημεία του μέσου, για τα οποία η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, ισχύει δηλαδή:

$$\boxed{r_1-r_2=N\cdot\lambda \qquad N=0,\pm1,\pm2...} \qquad (1)$$

Στα σημεία αυτά λέμε ότι έχουμε, **ενισχυτική συμβολή**.

Παρατήρηση:

Από τη σχέση (1) αντικαθιστώντας $r=\upsilon t$ και $\lambda=\upsilon T$ εύκολα προκύπτει:

$$r_1-r_2=N\lambda \Rightarrow \upsilon(t_1-t_2)=N\upsilon T \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1-t_2=N\cdot T}$$

δηλαδή

για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής η χρονική διαφορά άφιξης των κυμάτων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου.

Σημεία αναιρετικής συμβολής $|A'|=0$

- **Παραμένουν ακίνητα,** (ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με μηδέν) **τα σημεία του μέσου, για τα οποία η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος,** ισχύει δηλαδή:

$$\boxed{r_1-r_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2} \qquad N=0,\pm1,\pm2...} \qquad (2)$$

Στα σημεία αυτά λέμε ότι έχουμε **αποσβεστική** (αναιρετική) **συμβολή**.

Παρατήρηση:

Αν η χρονική διαφορά άφιξης των κυμάτων σε ένα σημείο, είναι περιττό πολλαπλάσιο της μισής περιόδου, το σημείο παραμένει ακίνητο (Α'= 0)

Απόδειξη:

Έστω $t_1-t_2=(2N+1)\cdot\frac{T}{2}$

αντικαθιστούμε $t_1=\frac{r_1}{\upsilon}$, $t_2=\frac{r_2}{\upsilon}$ και $T=\frac{\lambda}{\upsilon}$ και πέρνουμε:

$$\frac{r_1}{\upsilon}-\frac{r_2}{\upsilon}=(2N+1)\frac{\lambda}{2\upsilon} \quad \texttt{drarrow}$$

- **Όλα τα υπόλοιπα σημεία του μέσου ταλαντώνονται με ενδιάμεσα πλάτη.** (Τα οποία δεν μπορούμε να βρούμε με τις εντός ύλης γνώσεις)

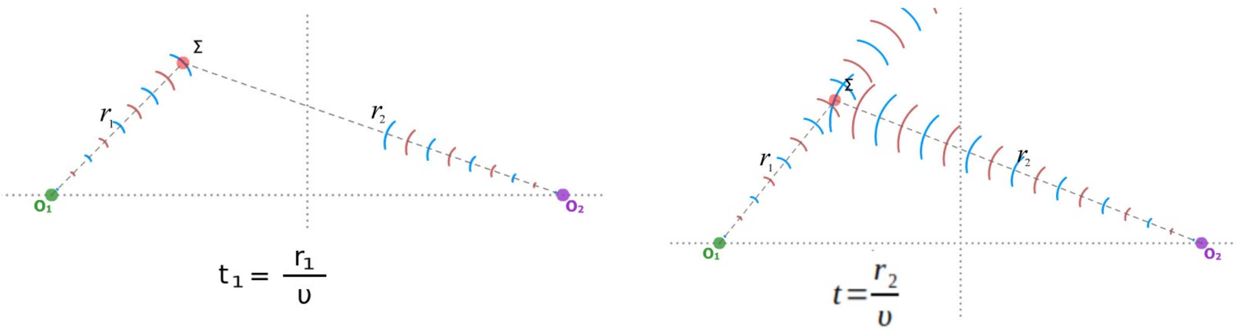
Απομάκρυνση, ταχύτητα και επιτάχυνση ενός σημείου Σ σε μια τυχαία χρονική στιγμή.

Η αρχή της επαλληλίας βρίσκει εφαρμογή όταν θέλουμε να βρούμε την απομάκρυνση ενος σημείου του μέσου σε μια τυχαία χρονική στιγμή.

Έστω δύο σύγχρονες πηγές ,με εξίσωση ταλάντωσης $y = A\,\eta\mu\omega t$ **,** βρίσκονται στα σημεία O_1 και O_2 της επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα, την χρονική στιγμή t = 0 και παράγουν κύματα ίδιου πλάτους Α που διαδίδονται με ταχύτητα υ.

Έστω Σ ένα σημείο της επιφάνειας που απέχει απόσταση $\mathbf{r_1}$ από την πηγή $\mathbf{O_1}$ και $\mathbf{r_2}$ από την πηγή $\mathbf{O_2}$ με $\mathbf{r_1 < r_2}$.

Στο σημείο Σ το κύμα απο την πηγή O_1 φτάνει τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$ ενώ απο την πηγή O_2 τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$



1.Από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$, $\left(t < \frac{r_1}{\upsilon}\right)$

κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Σ, οπότε αυτό δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και παραμένει ακίνητο. $\boxed{y = 0, \quad \upsilon = 0, \quad \alpha = 0}$

2. Από τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$ έως την $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$ $\left(\frac{r_1}{\upsilon} \le t < \frac{r_2}{\upsilon}\right)$

μόνο το κύμα από την πηγή O_1 έχει φτάσει στο σημείο Σ, οπότε αυτό ταλαντώνεται με

- απομάκρυνση $y = y_1 = A\eta\mu\omega(t - t_1) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$
- ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_1 = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega(t - t_1) = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$
- επιτάχυνση $\alpha = \alpha_1 = -\omega^2 A\eta\mu\omega(t - t_1) = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$

3. Μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$ $\left(t_2 \ge \frac{r_2}{\upsilon}\right)$

Στο σημείο Σ φτάνει και το κύμα από την πηγή O_2 οπότε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας,

- η απομάκρυνσή του θα δίνεται από τη σχέση $y=y_1+y_2$
- η ταχύτητά του θα δίνεται από τη σχέση $\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2$
- η επιτάχυνσή του θα δίνεται από τη σχέση $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

Έτσι, για ένα σημείο του μέσου, στο οποίο έχουμε επαλληλία:

Η εξίσωση απομάκρυνσης (ταλάντωσης) θα είναι η συνάρτηση:

$$y=\begin{cases} 0 & t<\dfrac{r_1}{\upsilon} \\ y_1=A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1}{\lambda}\right) & \dfrac{r_1}{\upsilon}\leq t<\dfrac{r_2}{\upsilon} \\ y_1+y_2=A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1}{\lambda}\right)+A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_2}{\lambda}\right) & t_2\geq\dfrac{r_2}{\upsilon} \end{cases}$$

Η εξίσωση ταχύτητας θα είναι η συνάρτηση:

$$\upsilon=\begin{cases} 0 & t<\dfrac{r_1}{\upsilon} \\ \upsilon_1=\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1}{\lambda}\right) & \dfrac{r_1}{\upsilon}\leq t<\dfrac{r_2}{\upsilon} \\ \upsilon_1+\upsilon_2=\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1}{\lambda}\right)+\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_2}{\lambda}\right) & t_2\geq\dfrac{r_2}{\upsilon} \end{cases}$$

Η εξίσωση επιτάχυνσης θα είναι η συνάρτηση:

$$\alpha=\begin{cases} 0 & t<\dfrac{r_1}{\upsilon} \\ \alpha_1=-\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1}{\lambda}\right) & \dfrac{r_1}{\upsilon}\leq t<\dfrac{r_2}{\upsilon} \\ \alpha_1+\alpha_2=-\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1}{\lambda}\right)-\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_2}{\lambda}\right) & t_2\geq\dfrac{r_2}{\upsilon} \end{cases}$$

Ειδικά για τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές, στα οποία τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα την χρονική στιγμή $t_1=\dfrac{d/2}{\upsilon}=\dfrac{d}{2\upsilon}$ και τα οποία ειναι σημελια ενισχυτικής συμβολής, θα ισχύει:

Η εξίσωση απομάκρυνσης (ταλάντωσης) θα είναι η συνάρτηση:

$$y = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ y = y_1 + y_2 = A\eta\mu\,\omega(t - t_1) + A\eta\mu\,\omega(t - t_1) = 2A\eta\mu\omega(t - t_1) & t \geq t_1 \end{cases}$$

Η εξίσωση ταχύτητας θα είναι η συνάρτηση:

$$\upsilon = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \upsilon_1 = 2\omega A\sigma\upsilon\nu\omega(t - t_1) & t \geq t_1 \end{cases}$$

Η εξίσωση επιτάχυνσης θα είναι η συνάρτηση:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \alpha_1 = -2\omega^2 A\eta\mu\omega(t - t_1) & t \geq t_1 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου του μέσου, κατά την ταλάντωσή του, μπορούμε εναλλακτικά να εφαρμόσουμε τα παρακάτω:

Βρίσκουμε την απομάκρυνση y του σημείου, με την αρχή της επαλληλίας, όπως παραπάνω και στη συνέχεια εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA^2 \rightarrow (\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\theta\iota\sigma\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ D = m\omega^2) \rightarrow$$

$$m\omega^2 y^2 + m\upsilon^2 = m\omega^2 A^2 \rightarrow \omega^2 y^2 + \upsilon^2 = \omega^2 A^2 \rightarrow \upsilon^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 y^2 \quad \rightarrow \quad \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

Για να βρούμε την επιτάχυνση ενός σημείου του μέσου, κατά την ταλάντωσή του, μπορούμε εναλλακτικά να εφαρμόσουμε τα παρακάτω.

- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y του σημείου, με την αρχή της επαλληλίας.
- Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο $\alpha = -\omega^2 y$ που είναι γνωστός από τις ταλαντώσεις (και δεν χρειάζεται απόδειξη)

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.

Χρονικό διάστημα		
$0 \le t \le \frac{r_1}{\upsilon}$	**Κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο** Σ , οπότε αυτό δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και **παραμένει ακίνητο**	απομάκρυνση **y = 0** πλάτος **A = 0** ταχύτητα **υ = 0** επιτάχυνση **α = 0**
$\frac{r_1}{\upsilon} < t < \frac{r_2}{\upsilon}$	Μόνο το κύμα από την πλησιέστερη πηγή έχει φτάσει στο σημείο Σ	απομάκρυνση $y = A\eta\mu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = A\eta\mu\,(\omega t - t_1)$ πλάτος $A_\Sigma = A$ ταχύτητα $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t - t_1)$ επιτάχυνση $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t - t_1)$

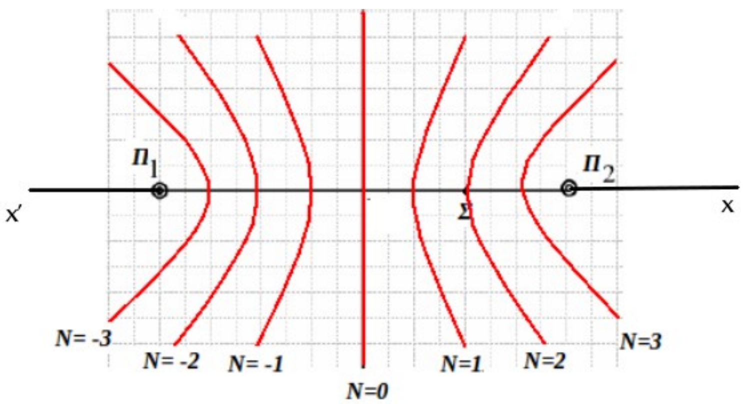
$t_2 \geq \frac{r_2}{\upsilon}$	Έχουν φτάσει στο σημείο Σ και τα δύο κύματα,	**απομάκρυνση** $y=y_1+y_2$ $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)+A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$ **ταχύτητα** $\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2$ $\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)+\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$ **επιτάχυνση** $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha=-\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)-\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$
		πλάτος $\lvert A'\rvert=0$ όταν $r_1-r_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2}$ $N=0,\pm1,\pm2...$
		πλάτος $\lvert A'\rvert=2A$ όταν $r_1-r_2=N\cdot\lambda$ $N=0,\pm1,\pm2...$

ΥΠΕΡΒΟΛΕΣ (ΚΡΟΣΣΟΙ) ΣΥΜΒΟΛΗΣ

1. Υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης.

Από την αναλυτική γεωμετρία γνωρίζουμε ότι τα σημεία για τα οποία ισχύει **r_1 – r_2 = σταθ.** ανήκουν σε υπερβολές

Υπερβολές ενίσχυσης: $r_1-r_2=N\cdot\lambda$



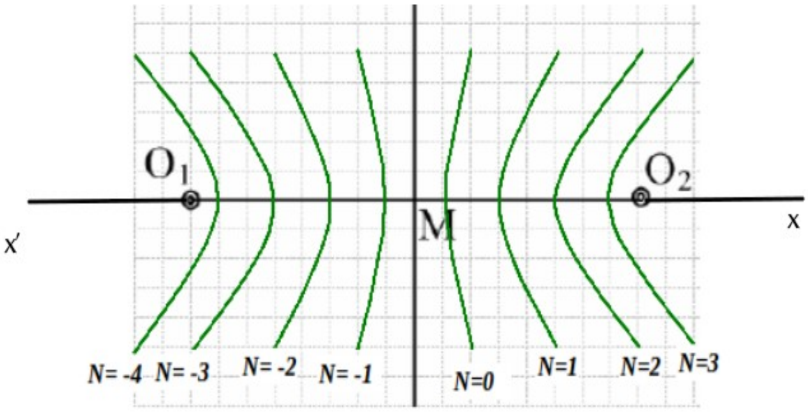
- Για N=0 προκύπτει $r_1=r_2$ δηλαδή πρόκειται για το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από τις πηγές, άρα η υπερβολή για $N=0$, είναι η μεσοκάθετος του τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές .

- Για $N>0$ ισχύει $r_1 - r_2 > 0 \Rightarrow r_1 > r_2$, οπότε οι θετικές τιμές του N, αντιστοιχούν σε υπερβολές προς την πλευρά της Π_2
- Για $N<0$ ισχύει $r_1 - r_2 < 0 \Rightarrow r_1 < r_2$, οπότε οι αρνητικές τιμές του N αντιστοιχούν σε υπερβολές προς την πλευρά της Π_1

Παρατήρηση

Αν γράψουμε $r_2 - r_1 = N \cdot \lambda$ τότε οι θετικές τιμές του N αντιστοιχούν σε υπερβολές προς την πλευρά της Π_1 και οι αρνητικές τιμές του N σε υπερβολές προς την πλευρά της Π_2

Υπερβολές απόσβεσης: $\boldsymbol{r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}}$



Με τρόπο όμοιο με τον παραπάνω, προκύπτει ότι:

- Οι τιμές $N \geq 0$, αντιστοιχούν σε υπερβολές προς την πλευρά της πηγής O_2
- ενώ οι τιμές $N<0$ αντιστοιχούν σε υπερβολές προς την πλευρά της πηγής O_1

  αν γράψουμε $r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ τότε οι θετικές τιμές του N αντιστοιχούν σε υπερβολές προς την πλευρά της πηγής O_1

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

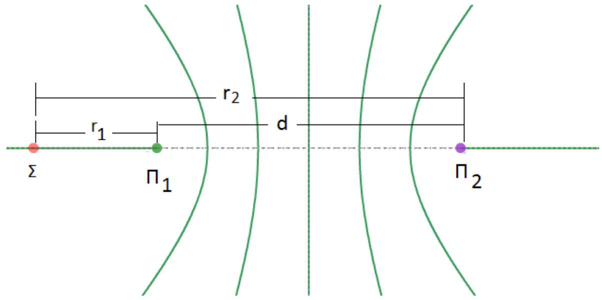
Όλα τα σημεία μιας υπερβολής έχουν:

- το ίδιο πλάτος.
- την ίδια διαφορά αποστάσεων από τις πηγές.

  Παράδειγμα αν για ένα σημείο Κ στην υπερβολή ενίσχυσης για Ν=1 ισχύει $r_{1,K} = 6m$ και $r_{2,K} = 2m$ οπότε $r_{1,K} - r_{2,K} = 6 - 2 = 4\,m$, τότε και για οποιοδήποτε άλλο σημείο Λ της ίδιας υπερβολής θα ισχύει $r_{1,\Lambda} - r_{2,\Lambda} = 4\,m$

2. Από τις δύο πηγές δεν περνάνε υπερβολές ενίσχυσης ή απόσβεσης.

Τα σημεία των ημιευθειών $\Pi_1 x$ και $\Pi_2 x'$ (περιλαμβάνονται και τα σημεία των πηγών) έχουν όλα το ίδιο πλάτος , αφού η διαφορά των



αποστάσεών τους από τις πηγές, είναι σταθερή και ίση με την απόσταση των πηγών: $r_1 - r_2 = d$
Έτσι:

- αν $d = N \cdot \lambda$, τότε οι υπερβολές που θα πέρναγαν από τις πηγές έχουν εκφυλιστεί στις δύο ημιευθείες δεξιά και αριστερά των πηγών και όλα τα σημεία αυτών των ημιευθειών πάλλονται με μέγιστο πλάτος.
- αν $d = (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ οι αντίστοιχες υπερβολές απόσβεσης έχουν εκφυλιστεί στις δύο ημιευθείες O_1x και O_2x' δεξιά και αριστερά των πηγών και όλα τα σημεία αυτών των ημιευθειών έχουν πλάτος A'= 0 (παραμένουν ακίνητα)
- αν δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω, τότε τα σημεία των ημιευθειών O_1x και O_2x' , ταλαντώνονται με κάποιο ενδιάμεσο πλάτος, ίδιο για όλα τα σημεία.

3 (i). Πώς βρίσκουμε τις αποστάσεις από την πηγή $Π_1$,των σημείων του τμήματος $Π_1Π_2$ τα οποία πάλλονται με μέγιστο πλάτος (σημεία τομής των υπερβολών ενίσχυσης με το τμήμα $Π_1Π_2$) ή μένουν ακίνητα (σημεία τομής των υπερβολών απόσβεσης με το τμήμα $Π_1Π_2$)

Έστω d η απόσταση των πηγών και Σ ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στο $Π_1Π_2$. Αν r_1 η απόσταση του Σ από την πηγή $Π_1$ και r_2 η απόστασή του από την πηγή $Π_2$, τότε:

- **Για τα σημεία ενίσχυσης** που ταλαντώνονται με πλάτος $|A|' = 2A$, θα ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N \cdot \lambda \quad \text{όπου } N = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \quad (3)$$

$$\text{και} \quad r_1 + r_2 = d \quad (4)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) :

$$2r_1 = N \cdot \lambda + d \rightarrow \boxed{r_1 = \frac{d}{2} + N\frac{\lambda}{2}} \quad \text{με} \quad 0 < r_1 < d \quad (5)$$

$$0 \leq \frac{d}{2} + N\frac{\lambda}{2} \leq d \rightarrow -d \leq N\lambda \leq d \rightarrow$$

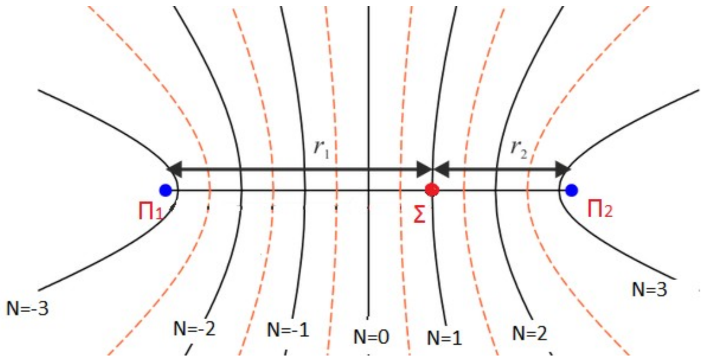
$$\boxed{\frac{-d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda}} \quad (6)$$

δηλαδή ο N παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από $\frac{-d}{\lambda}$ *έως* $\frac{d}{\lambda}$.

Από τη σχέση (5) αντικαθιστώντας τις τιμές του N, βρίσκουμε τις θέσεις των σημείων που ανήκουν πάνω στο ευθύγραμμο $Π_1Π_2$ και ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

Από την σχέση (5) προκύπτει ακόμα ότι, **τα σημεία τομής των υπερβολών ενίσχυσης με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με λ/2**

Η σχέση (6) μας δίνει το πλήθος των σημείων τομής των υπερβολών ενίσχυσης με το τμήμα $Π_1Π_2$, δηλαδή το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης.



Για τα **σημεία απόσβεσης** που παραμένουν ακίνητα (πλάτος $|A|'=0$), θα ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\cdot \frac{\lambda}{2} \qquad \text{όπου } N = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots (7)$$

και $\qquad r_1 + r_2 = d \qquad (8)$

προσθέτοντας την (7) στην (8):

$$2r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d \quad \Rightarrow \quad r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}$$

$$\text{ή} \quad \boxed{r_1 = \frac{d}{2} + N\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}} \quad \text{με} \quad 0 \le r_1 \le d \qquad (8)$$

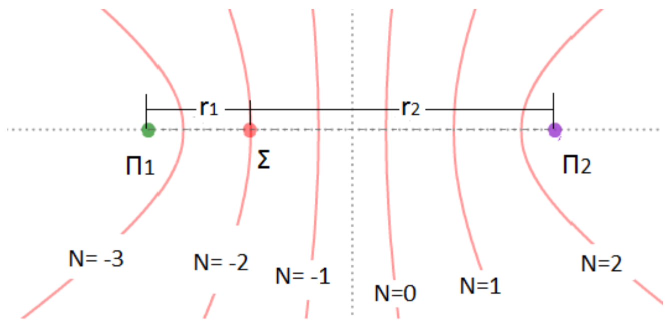
Από την (8) έχουμε

$$0 \le (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \le d$$

$$2d \le (2N+1)\lambda \le 2d$$

$$\frac{-d}{\lambda} - \frac{1}{2} \le N \le \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

δηλαδή ο N παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από $\left(\frac{-d}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)$ *έως* $\left(\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)$ και έτσι βρίσκουμε το πλήθος των υπερβολών απόσβεσης.



Από τη σχέση (8) αντικαθιστώντας τις τιμές του N, βρίσκουμε τις θέσεις των σημείων που ανήκουν πάνω στο ευθύγραμμο $\Pi_1\Pi_2$ και παραμένουν ακίνητα.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: **τα σημεία τομής των υπερβολών απόσβεσης με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με λ/2.**

Από τις (5) και (8) διαπιστώνουμε ότι $r_{1(\alpha\pi)}=\left(\frac{d}{2}+N\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\lambda}{4}=r_{1(\varepsilon\nu)}+\frac{\lambda}{4}$ δηλαδή, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις πηγές, η απόσταση ενός σημείου ενίσχυσης από το επόμενο απόσβεσης είναι $\frac{\lambda}{4}$.

3(ii). Πώς βρίσκουμε το πλήθος των σημείων πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο πηγές Π_1 και Π_2 , τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος 2Α (πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης) ή παραμένουν ακίνητα (πλήθος υπερβολών απόσβεσης)

Στις ίδιες σχέσεις (10) και (11) καταλήγουμε και ως εξής:
Για τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ ισχύει:
για την πηγή Π_1 : $r_1-r_2=0-d=-d$
για την πηγή Π_2 : $r_1-r_2=d-0=d$
για όλα τα ενδιάμεσα σημεία $-d<r_1-r_2<d$ (12)

Για τα σημεία ενίσχυσης

Αν στη σχέση (12) αντικαταστήσουμε $r_1-r_2=N\lambda$, παίρνουμε

$$-d\leq N\lambda\leq d$$

$$\boxed{\frac{-d}{\lambda}\leq N\leq\frac{d}{\lambda}}$$

Για τα σημεία απόσβεσης

Αν στη σχέση (13) αντικαταστήσουμε $r_1-r_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2}$, παίρνουμε:

$$-d\leq r_1-r_2\leq d$$

$$-d\leq(2N+1)\frac{\lambda}{2}\leq d$$

$$\boxed{\frac{-d}{\lambda}-\frac{1}{2}\leq N\leq\frac{d}{\lambda}-\frac{1}{2}}$$

Η παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να βρούμε **μόνο το πλήθος** και όχι τις θέσεις των σημείων μεγίστου πλάτους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $AB=4{,}4\,m$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y=A\eta\mu(20\pi t)$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda=0{,}4\,m$. Σημείο Σ απέχει κατά $r_1=2{,}8\,m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2=7{,}2\,m$ από την πηγή Π_2 . Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ισούται με $A_\Sigma=1\,m$.

α) Να εξετάσετε εάν στο σημείο Σ συμβαίνει ενίσχυση ή απόσβεση .

β) Να υπολογίσετε το πλάτος Α των κυμάτων.

γ) Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου (Δ) σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο, του σημείου (Μ) που είναι το μέσο του τμήματος $\Pi_1\Pi_2$.

ε) Να βρείτε το πλήθος των σημείων απόσβεσης πάνω στο τμήμα ΑΒ (το πλήθος των υπερβολών απόσβεσης) .

στ) Να βρείτε πόσο απέχει απο την πηγή Π_2 ένα σημείο του τμήματος ΑΒ που είναι το πλησιέστερο προς την πηγή Π_2, που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος (2Α).

Απάντηση

α) Ισχύει $r_1 - r_2 = 2{,}8 - 7{,}2 = -3{,}4\,m = -11\,\lambda$ άρα η διαφορά των αποστάσεων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος , συνεπώς στο Σ έχουμε **ενίσχυση** και ταλαντώνεται με πλάτος $A_\Sigma = 2A$

β) Αφού το Σ είναι σημείο ενίσχυσης και ταλαντώνεται με πλάτος $A_\Sigma = 1\,m$, θα ισχύει

$$2A = 1\,m \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}5\,m}$$

γ) Απο την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών έχουμε

$$\omega = 20\pi \Rightarrow 2\pi f = 20\pi \quad \Rightarrow \quad f = 10\,Hz$$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 0{,}4 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 4\,m/s$$

Οι χρόνοι άφιξης των κυμάτων στο Σ ειναι:

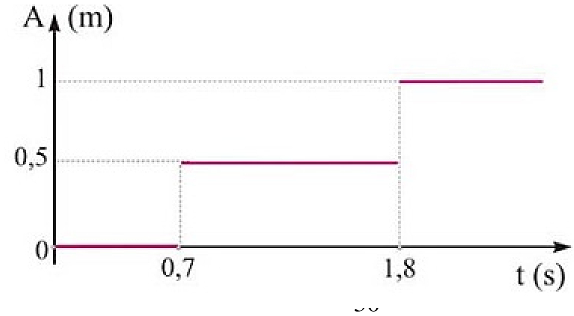
απο την πηγή Π_1 $\quad t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon} = \dfrac{2{,}8}{4} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}7\,s$

απο την πηγή Π_2 $\quad t_2 = \dfrac{r_2}{\upsilon} = \dfrac{7{,}2}{4} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 1{,}8\,s$

Έτσι:

- Για $t < 0{,}7\,s$ κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Σ , οπότε αυτό δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και παραμένει ακίνητο, άρα $A_\Sigma = 0\,m$.
- Για $0{,}7 \le t < 1{,}8$ μόνο το κύμα απο την πηγή Π_1 έχει φτάσει στο Σ άρα ταλαντώνεται με πλάτος $A_\Sigma = A = 0{,}5\,m$.
- Για $t \ge 1{,}8\,s$ έχουν φτάσει στο Σ αμφότερα τα κύματα και το πλάτος του Σ ειναι $A_\Sigma = 1\,m$

Τα παραπάνω αποτυπώνονταο στο παρακάτω διάγραμμα



δ) Το σημείο Μ ισαπέχει απο τις πηγες απόσταση $r=\frac{AB}{2}=2{,}2\,m$

Τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σ'αυτό τη χρονική στιγμή $t=\frac{r}{\upsilon}=\frac{2{,}2}{4}=0{,}55\,s$

Η εξίσωση ταλάντωσης του Σ εξαιτίας του κύματος απο κάθε πηγή είναι

$$y=A\,\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi r}{\lambda}\right)=0{,}5\,\eta\mu\left(20\pi t-\frac{2\pi\cdot 2{,}2}{0{,}4}\right)\;\Rightarrow\; y=0{,}5\,\eta\mu(20\pi t-11\pi)$$

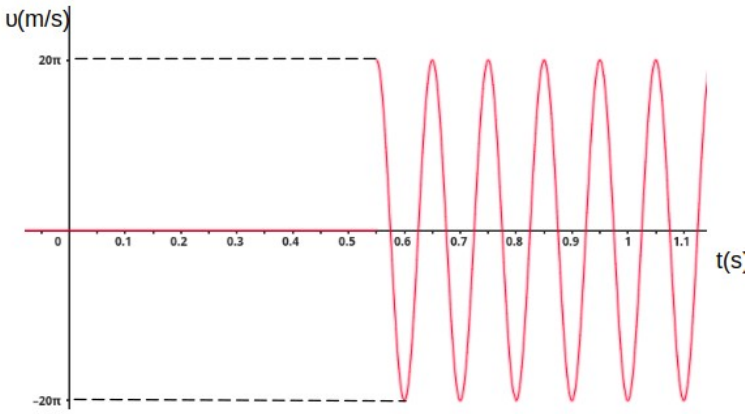
μετά την άφιξη των κυμάτων είναι:

$$y_\Sigma=y_1+y_2=0{,}5\,\eta\mu(20\pi t-11\pi)+0{,}5\,\eta\mu(20\pi t-11\pi)\;\Rightarrow\; y_\Sigma=1\,\eta\mu(20\pi t-11\pi)$$

Άρα η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Σ θα είναι:

$$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu(20\pi t-11\pi)\;\Rightarrow\;\boxed{\upsilon=20\pi\,\sigma\upsilon\nu(20\pi t-11\pi)}$$

και η γραφική της παράσταση, η παρακάτω.



ε) Για τα σημεία τομής των υπερβολών απόσβεσης με το τμήμα ΑΒ ισχύει:

$$r_1-r_2=(2N+1)\frac{\lambda}{2}=(2N+1)0{,}2=0{,}4N+0{,}2$$

και $-d\le r_1-r_2\le d \;\Rightarrow\; -4{,}4\le 0{,}4N+0{,}2\le 4{,}4 \;\Rightarrow\; -4{,}6\le 0{,}4N\le 4{,}2 \;\Rightarrow$

$-11{,}5<N<10{,}5$

άρα υπάρχουν 22 υπερβολές απόσβεσης.

στ) Για τα σημεία του τμήματος ΑΒ που είναι σημεία ενίσχυσης ισχύει

$r_1-r_2=N\lambda \;\Rightarrow\; r_1-r_2=0{,}4N$ (1)

και $r_1+r_2=d \;\Rightarrow\; r_1+r_2=4{,}4$ (2)

με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει

$2r_1 = 0{,}4N + 4{,}4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = 0{,}2N + 2{,}2}$ με $0 < r_1 < 4{,}4$

άρα $0 \leq 0{,}2N + 2{,}2 \leq 4{,}4 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{11} < N < 11$

Απο τη σχέση $r_1 - r_2 = 0{,}4N$ για $N > 0 \Rightarrow r_1 - r_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 > r_2$ δηλαδή το σημείο είναι πλησιέστερα στην $Π_2$. Έτσι το πλησιέστερο προς την πηγή $Π_2$ σημείο ειναι αυτό για N=10

άρα $r_1 = 0{,}2 \cdot 10 + 2{,}2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4{,}2$

άρα απο τη $Π_2$ απέχει $r_2 = d - r_1 = 4{,}4 - 4{,}2 = \mathbf{0{,}2\,m}$

Παρατήρηση

Για N = 11, σημείο ενισχυτικής συμβολής είναι και η πηγη $Π_2$.

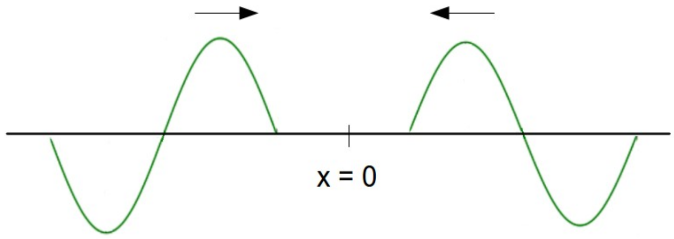
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Στάσιμο κύμα δημιουργείται σε ένα **γραμμικό** μέσο όταν σ αυτό συμβάλλουν δύο κύματα ίδιου πλάτους και συχνότητας, που διαδίδονται με αντίθετες ταχύτητες.

Η εξίσωση που περιγράφει ένα στάσιμο κύμα, καθορίζεται απο το σημείο που θα επιλέξουμε ως αρχή του άξονα xx' (σημείο x = 0) και την χρονική στιγμή που θα επιλέξουμε ως αρχή των χρόνων (t = 0). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

Θεωρούμε ως θέση x = 0 , μία κοιλία που για t = 0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (y= 0) και κινείται προς την θετική κατεύθυνση (υ > 0).

- Τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά στο σημείο x= 0, έχοντας δηλαδή συμφωνία φάσης και



περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \text{και} \qquad y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

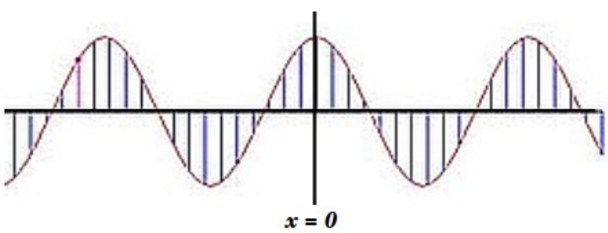
- Η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι:

$$\boxed{y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}}$$

και προκύπτει με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας $y = y_1 + y_2$.

- ΠΡΟΣΟΧΗ ! Η παραπάνω εξίσωση ισχύει θεωρώντας x=0 σε οποιαδήποτε κοιλία που τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται σε απομάκρυνση y=0 και έχει θετική ταχύτητα.

- Το στιγμιότυπο ενός τέτοιου στασίμου κύματος για $t = \frac{T}{4}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- **Το πλάτος ταλάντωσης των μορίων του μέσου** δίνεται από τη σχέση:

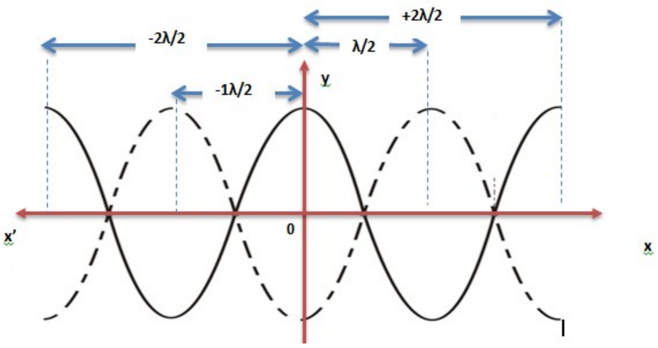
$$\boxed{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma = |A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi x}{\lambda}\right|}$$

- ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η παραπάνω σχέση για το πλάτος ισχύει θεωρώντας x = 0 οποιαδήποτε κοιλία του στασίμου κυματος.

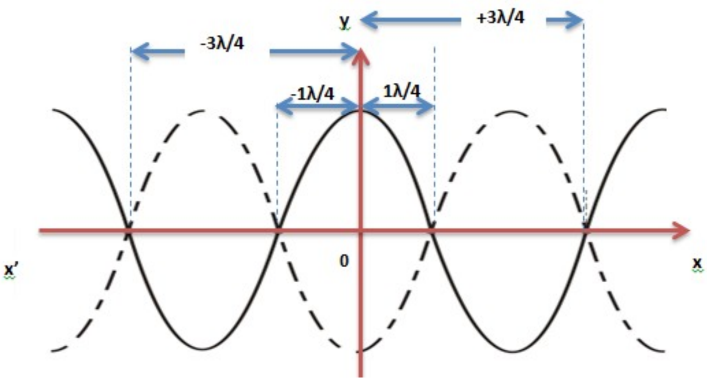
- **Οι θέσεις των κοιλιών** είναι $\boxed{x_K = N\frac{\lambda}{2}}$ N= 0 , ±1.

Για N > 0 παίρνουμε τις θέσεις των κοιλιών του θετικού ημιάξονα Ox, ενώ για N < 0 παίρνουμε τις θέσεις των κοιλιών του αρνητικού ημιάξονα Ox'.



- **Οι θέσεις των δεσμών** είναι $\boxed{x_\Delta = (2N+1)\frac{\lambda}{4}}$ **N=0 , ±1. . . .**

Για N > 0 παίρνουμε τις θέσεις των δεσμών του θετικού ημιάξονα Ox, ενώ για N < 0 παίρνουμε τις θέσεις των δεσμών του αρνητικού ημιάξονα Ox'.



- **Το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος** είναι η απόσταση δυο διαδοχικών δεσμών και ισούται με **λ΄= λ/2,** ενώ η απόσταση μιας κοιλίας και του αμέσως επόμενου δεσμού είναι **d = λ/4**

Αν στη θέση x=0 έχουμε δεσμό,

οι θέσεις κοιλιών είναι: $\boxed{x_K = (2N+1)\frac{\lambda}{4}}$ **N=0 , ±1. . . .**

ενώ οι θέσεις δεσμών: $\boxed{x_\Delta = N\frac{\lambda}{2}}$ **N= 0 , ±1.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1) ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΕΣΜΩΝ - ΚΟΙΛΙΩΝ

- Η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών και δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$
- Η απόσταση ενος δεσμού απο την επόμενη κοιλία είναι $\frac{\lambda}{4}$

2) Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

Η εξισωση ταλαντωσης ενος σημειου $x=x_1$ προκύπτει αν στην εξίσωση του στασίμου αντικαταστήσουμε $x=x_1$.

Παράδειγμα:

Η εξίσωση ενός στασίμου κύματος είναι $y=0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\,\pi t \quad (SI)$

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Α που βρίσκεται στη θέση $x_A=2m$ θα είναι:

$y_A=0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\cdot 2}{2}\eta\mu 10\,\pi t$ ⇒ y_A=0,2 συνπ ημ10πt ⇒ $y_A=0{,}2(-1)\eta\mu 10\,\pi t$

και τελικά $y_A=-0{,}2\,\eta\mu 10\,\pi t$ ή $y_A=0{,}2\,\eta\mu(10\,\pi t+\pi)$

3) ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ ΣΤΑΣΙΜΟΥ

Η εξίσωση ενός στιγμιοτύπου του στασίμου για μία χρονική στιγμή $t=t_1$ προκύπτει αν στην εξίσωση του στασίμου αντικαταστήσουμε $t=t_1$.

Παράδειγμα: Η εξίσωση ενός στασίμου κύματος είναι $y=0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\,\pi t \quad (SI)$

Η εξίσωση του στιγμιοτύπου του στασίμου για την χρονική στιγμή $t_1=0{,}65\,s$ θα είναι

$$y=0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\,\pi\cdot 0{,}65=0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu\left(6\pi+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \quad y=0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} \quad (SI)$$

Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του στασίμου κύματος για δοσμένη χρονική στιγμή και για τμήμα της χορδής x_1-x_2 :

i. Γράφουμε την εξίσωση του στιγμιοτύπου.

ii. Βρίσκουμε τις απομακρύνσεις των σημείων x_1 και x_2

iii. Βρίσκουμε τις θέσεις των δεσμών μεταξύ x_1 και x_2 .

iv. Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο

4) ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

Δύο σημεία του μέσου έχουν διαφορά φάσης Δφ= 0 (συμφωνία φάσης) ή Δφ = π (αντίθεση φάσης). Για να βρούμε τη διαφορά φάσης δύο σημείων, υπάρχουν γενικά τρεις τρόποι:

i) Με τον αριθμό δεσμών που υπάρχουν ανάμεσά τους

Αν δύο σημεία βρίσκονται μεταξύ δύο δεσμών , βρίσκονται σε συμφωνία φάσης (Δφ=0) ενώ αν βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού, τότε βρίσκονται σε αντίθεση φάσης (Δφ = π).

Γενικότερα:αν ανάμεσα σε δυο σημεία υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών , τότε βρίσκονται σε συμφωνία φάσης (Δφ=0).

Αν ανάμεσα σε δυο σημεία υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών , τότε βρίσκονται σε αντίθεση φάσης (Δφ = π).

ii) Με το πρόσημο του γινομένου y_1y_2

Αν $y_1y_2 > 0$,συμφωνία φάσης (Δφ = 0) αφού τα σημεία έχουν σε κάθε στιγμή ομόσημες απομακρύνσεις.

Αν $y_1y_2 < 0$,αντίθεση φάσης (Δφ = π) αφού τα σημεία έχουν σε κάθε στιγμή ετερόσημες απομακρύνσεις.

iii) Γράφοντας την εξίσωση ταλάντωσης του κάθε σημείου

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση ενός στασίμου κύματος ειναι $y=10\,\sigma\upsilon\nu\, 2\frac{\pi x}{5}\,\eta\mu\, 5\pi t$.Να βρειτε τη διαφορά φάσης των σημείων $x_1 = 7{,}5$ cm και $\chi_2 = -15$ cm.

Έχουμε:

$$y_1=10\,\sigma\upsilon\nu\, 2\frac{\pi\cdot 7{,}5}{5}\,\eta\mu\, 5\pi t=10\,\sigma\upsilon\nu\, 3\pi\eta\mu\, 5\pi t=-10\,\eta\mu\, 5\pi t\rightarrow \qquad y_1=10\,\eta\mu(5\pi t+\pi)$$

$$y_2=10\,\sigma\upsilon\nu\, 2\frac{\pi\cdot(-15)}{5}\,\eta\mu\, 5\pi t=10\,\sigma\upsilon\nu(-6\pi)\,\eta\mu\, 5\pi t=10\,\eta\mu\, 5\pi t\rightarrow \qquad y_1=10\,\eta\mu(5\pi t)$$

έττσι η διαφορά φάσης ειναι **Δφ = π**

5) ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΕΣΜΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΛΙΩΝ

Πώς βρίσκουμε των αριθμό των δεσμών και κοιλιών ανάμεσα σε δύο σημεία x_A και x_B.

α) Αν στη θέση x = 0 έχουμε κοιλία:

για τις κοιλίες: $x_A\leq N\frac{\lambda}{2}\leq x_B$ και για τους δεσμούς: $x_A\leq(2N+1)\frac{\lambda}{4}\leq x_B$

β) Αν στη θέση x = 0 έχουμε δεσμό:

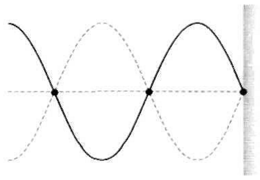
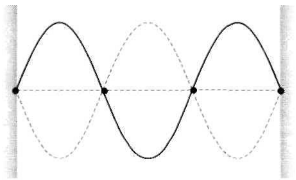
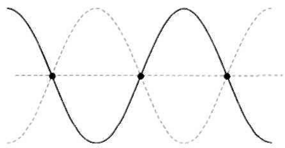
για τις κοιλίες: $x_A\leq(2N+1)\frac{\lambda}{4}\leq x_B$ και για τους δεσμούς: $x_A\leq N\frac{\lambda}{2}\leq x_B$

Απο τις παραπάνω ανισώσεις λύνουμε ως προς Ν.Το πλήθος των ακέραιων λύσεων ειναι ο αριθμός που ψάχνουμε.

6) ΜΗΚΟΣ ΜΙΑΣ ΧΟΡΔΗΣ (L), ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΕΣΜΩΝ Η ΚΟΙΛΙΩΝ.

Όταν σε μία χορδή πεπερασμένου μήκους, δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, τότε σε άκρο που είναι στερεωμένο ακλόνητα, δημιουργείται δεσμός ενώ σε άκρο που είναι ελεύθερο κοιλία.

Αν L το μήκος της χορδής , κ ο αριθμός των κοιλιών και **δ ο αριθμός των δεσμών** σε κάθε περίπτωση ισχύουν οι σχέσεις:

• Ένα ανοικτό και ένα κλειστό άκρο 	$L=(2\delta-1)\dfrac{\lambda}{4}$ ϰ =1,2,3.. $L=(2\kappa-1)\dfrac{\lambda}{4}$ δ = 1,2,3….
• Δύο άκρα κλειστά 	$L=\kappa\dfrac{\lambda}{2}$ ϰ =1,2,3.. $L=(\delta-1)\dfrac{\lambda}{2}$ δ = 2,3,4….
• Δύο άκρα ανοιχτά 	$L=(\kappa-1)\dfrac{\lambda}{2}$ κ = 2,3,4…. $L=\delta\dfrac{\lambda}{2}$ δ= 1,2,3….

7) ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

Σε χορδή δοσμένου μήκους L , μόνο κύματα ορισμένης συχνότητας μπορούν όταν συμβάλλουν, να δημιουργήσουν στάσιμο κύμα. Η μικρότερη από τις συχνότητες αυτές ονομάζεται **θεμελιώδης** και οι υπόλοιπες που είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους, ονομάζονται **αρμονικές**.

Για να βρούμε τις συχνότητες των κυμάτων, από τη συμβολή των οποίων μπορεί να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, σε χορδή δοσμένου μήκους, δηλαδή τις συχνότητες στις οποίες μπορεί να πάλλεται μια χορδή, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Ένα ανοικτό και ένα κλειστό άκρο.

Στην περίπτωση αυτή το μήκος της χορδής L είναι περιττό πολλαπλάσιο του λ/4.

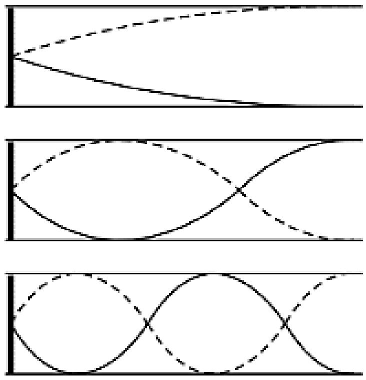
Έτσι έχουμε:

$L=(2N+1)\dfrac{\lambda}{4}$ και αντικαθιστώντας $\lambda=\dfrac{\upsilon}{f}$ παίρνουμε $L=(2N+1)\dfrac{\upsilon}{4f}$ και λύνοντας ως προς f

$$\boxed{f=(2N+1)\frac{\upsilon}{4L}}$$

Δηλαδή η θεμελιώδης συχνότητα είναι για N=0 , $f_o=\dfrac{\upsilon}{4L}$ και οι αρμονικές τα περριτά πολλαπλάσια αυτής.

Παραδείγματα:



N=0 $L=\frac{\lambda}{4}$ $\lambda=\frac{4}{1}L$ $f_1=\frac{\upsilon}{4L}$

N=1 $L=3\frac{\lambda}{4}$ $\lambda=\frac{4}{3}L$ $f_2=3\frac{\upsilon}{4L}$

N=2 $L=5\frac{\lambda}{4}$ $\lambda=\frac{4}{5}L$ $f_3=5\frac{\upsilon}{4L}$

β) Δύο άκρα ανοιχτά ή δύο άκρα κλειστά.

Στην περίπτωση αυτή το μήκος της χορδής είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ/2.

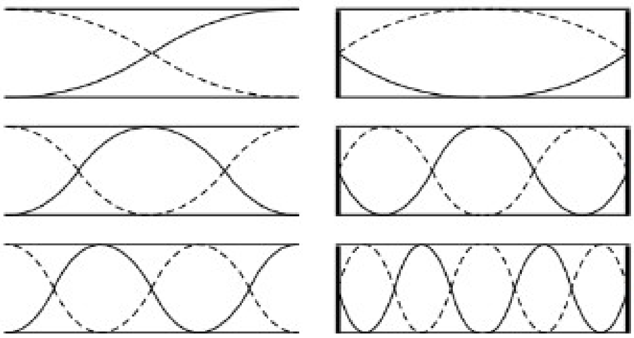
Έτσι έχουμε:

$L=N\frac{\lambda}{2}$ και αντικαθιστώντας $\lambda=\frac{\upsilon}{f}$ παίρνουμε $L=N\frac{\lambda\upsilon}{2f}$ και λύνοντας ως προς f

$$\boxed{f=N\frac{\upsilon}{2L}}$$

Δηλαδή η θεμελιώδης συχνότητα είναι για N=1, $f_o=\frac{\upsilon}{2L}$ και οι αρμονικές, τα ακέραια πολλαπλάσια αυτής. Πχ. Η πρώτη αρμονική ειναι για N=2, $f_2=2\frac{\upsilon}{2L}=\frac{\upsilon}{L}$

Παραδείγματα:



N=1 $L=\frac{\lambda}{2}$ $\lambda=\frac{2}{1}L$ $f_1=\frac{\upsilon}{2L}$

N=2 $L=2\frac{\lambda}{2}$ $\lambda=\frac{2}{2}L$ $f_2=2\frac{\upsilon}{2L}$

N=3 $L=3\frac{\lambda}{2}$ $\lambda=\frac{2L}{3}$ $f_3=3\frac{\upsilon}{2L}$