ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

4.2 ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

4.3 ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

4.4 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

4.7 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ (εκτός απο την παργραφο 4.7Β: Στροφορμή στρερεού σώματος και **εκτός** απο την απόδειξη και τη λεκτική διατύπωση της σχέσης 4.18 της παραγράφου 4.7Γ που αναφέρεται σε στερεό.)

4.8 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ (έως και την πρόταση “ Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμη του συστήματος παραμένει σταθερή”)

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

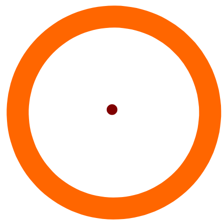
Υλικό σημείο, ορίζεται το υλικό σώμα που έχει αμελητέες διαστάσεις αλλά διατηρεί όλες τις γνωστές ιδιότητες της ύλης.(μάζα κλπ) Ένα υλικό σημείο μπορεί να εκτελεί μόνο **μεταφορική κίνηση**.

Στερεό σώμα ορίζεται το υλικό σώμα που έχει διαστάσεις. Μπορεί να εκτελεί **μεταφορική** , **στροφική** αλλά και **σύνθετη** κίνηση (συνδυασμός μεταφορικής και στροφικής κίνησης)

Μηχανικό στερεό είναι το υποθετικό στερεό σώμα που θεωρούμε ότι **δεν παραμορφώνεται** όταν του ασκούνται δυνάμεις.

Κέντρο μάζας

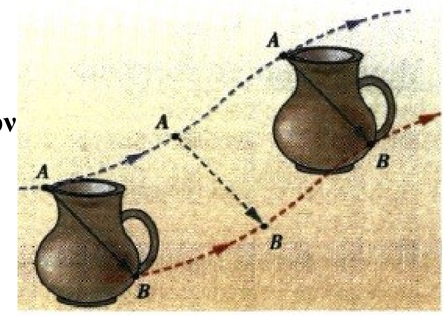
- Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται **το σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.**
- Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων **συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους.**
- Το κέντρο μάζας ενός σώματος **μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα.** Παράδειγμα ο ισοπαχής ομογενής δακτύλιος του διπλανού σχήματος.
- Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα **σε ομογενές πεδίο βαρύτητας** το κέντρο μάζας του **συμπίπτει με το κέντρο βάρους του.**



Σχ. 4.6 Το κέντρο μάζας μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα

4.2 ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ένα στερεό μπορεί να εκτελεί τρία είδη κίνησης.



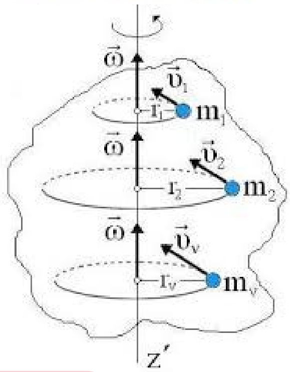
A) Μεταφορική

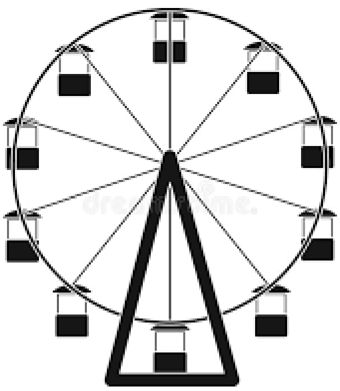
Είναι η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο τυχαία σημεία του στερεού παραμένει συνεχώς παράλληλο με τον εαυτό του.

B) Στροφική

- Ένα στερεό λέμε ότι εκτελεί **στροφική κίνηση** όταν κάθε στιγμή όλα τα υλικά σημεία απο τα οποία αποτελείται, εκτελούν κυκλική κίνηση.
- Τα κέντρα όλων των κυκλικών τροχιών βρίσκονται πάνω σε μια νοητή ευθεία που ονομάζεται **άξονας περιστροφής.**
- Στη στροφική κίνηση το στερεό αλλάζει προσανατολισμό στο χώρο, ενώ τα υλικά σημεία του που βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής παραμένουν ακίνητα.





Στον τροχό του λούνα παρκ, ο τροχός εκτελεί μόνο στροφική κίνηση, ενώ τα βαγόνια, εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση.

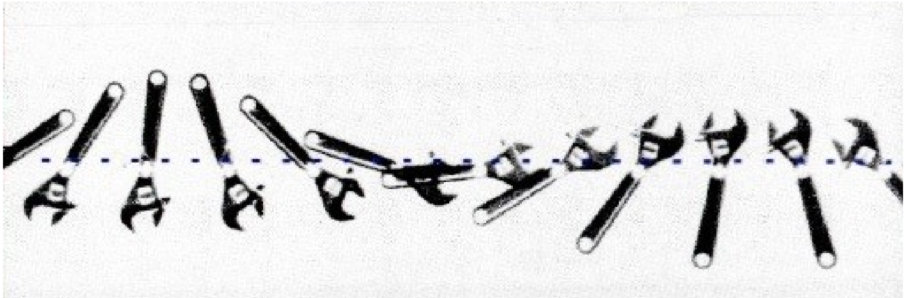
Γ) Σύνθετη κίνηση

Σύνθετη κίνηση εκτελεί ένα στερεό, όταν ταυτόχρονα:

α) μετακινείται στο χώρο

β) αλλάζει προσανατολισμό

δηλαδή εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση



ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΕΝΑ ΣΤΕΡΕΟ

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ.

Για τη μεταφορική κίνηση των στερεών σωμάτων ισχύουν οι νόμοι που διέπουν τις κινήσεις των υλικών σημείων, (οι γνωστές από την Α΄ Λυκείου εξισώσεις και νόμοι των κινήσεων), δηλαδή:

Ευθύγραμμη ομαλή

$$\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta \qquad \Delta x = \upsilon \cdot \Delta t \qquad (1)$$

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη

Εξίσωση ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_o \pm \alpha(t - t_o)$

Εξίσωση μετατόπισης $\Delta x = \upsilon_o \Delta t \pm \frac{1}{2} a \Delta t^2$ ή $x - x_o = \upsilon_o(t - t_o) \pm \frac{1}{2} a (t - t_o)^2$

Στις παραπάνω σχέσεις, υ_o είναι η ταχύτητα που έχει το σώμα την χρονική στιγμή t_o, δηλαδή στην αρχή του χρονικού διαστήματος Δt.

Αν $x_o = 0$ και $t_o = 0$, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα

$$\upsilon = \alpha \cdot t \qquad \textit{και} \qquad x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad (3)$$

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha t \qquad x = \upsilon_o t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (4)$$

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη

$$\upsilon = \upsilon_o - \alpha t \qquad x = \upsilon_o t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (5)$$

Υπενθυμίζουμε ότι εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης που εκτελεί ένα στερεό σώμα, όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια μεταφορική ταχύτητα και επιτάχυνση με το κέντρο μάζας $\vec{\upsilon}_{cm}$ και $\vec{\alpha}_{cm}$ αντίστοιχα.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Στη στροφική κίνηση , μας απασχολούν δύο διαφορετικά ζητήματα.

- Το πρώτο, είναι η κίνηση που εκτελεί ολόκληρο το στερεό, σαν ένα σώμα.
- Το δεύτερο, η κίνηση που εκτελεί το κάθε υλικό σημείο του στερεού, ξεχωριστά.

Κίνηση που εκτελεί το στερεό σαν ενιαίο σώμα

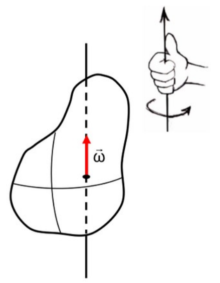
Μεγέθη και ορισμοί

Τα μεγέθη που αφορούν την στροφική κίνηση του στερεού, σε κάποια χρονική στιγμή t, ειναι:

α. **Η γωνία (θ) , που εχει διαγράψει το στερεό.**

Είναι η γωνία που διαγράφει κάθε σημείο του στερεού, καθώς αυτό (το στερεό) στρέφεται. Μονάδα μέτρησης στο SI : 1 rad .

β. **Η γωνιακή ταχύτητα (ω) του στερεού.**

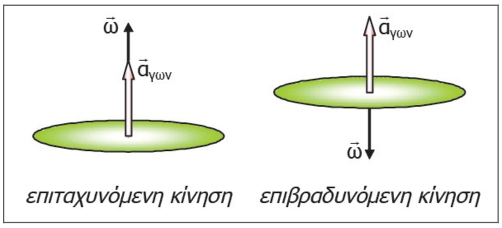


Είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που διαγράφει το στερεό και **ορίζεται** από τη σχέση: $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ (6)

Είναι **διάνυσμα** που έχει:

- **διεύθυνση**, τον άξονα περιστροφής.
- **φορά** που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

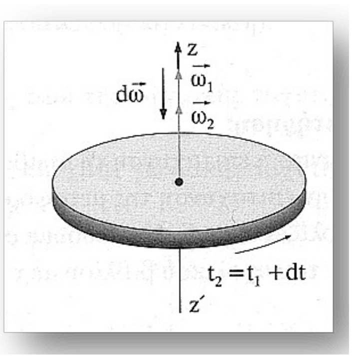
γ. **Γωνιακή επιτάχυνση $(a_{\gamma\omega\nu})$ του στερεού.**



Είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

Ορίζεται από τη σχέση: $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{d\omega}{dt}$ (7)

Είναι διάνυσμα που έχει κατεύθυνση ίδια με το διάνυσμα $d\vec{\omega}$ οπότε:



Στην **επιταχυνόμενη** στροφική κίνηση η $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ έχει κατεύθυνση ίδια με την γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$,
Ενώ στην **επιβραδυνόμενη** έχει κατεύθυνση αντίθετη με την γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

Μονάδα μέτρησης $1\,rad/sec^2$

Εξισώσεις που περιγράφουν την στροφική κίνηση στερεού.

α. Ομαλή στροφική κίνηση

κάνει ένα στερεό, όταν η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδέν $(\alpha_{\gamma\omega\nu}=0)$ οπότε η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή . Στην **ομαλή στροφική κίνηση** ισχύει η εξίσωση:

$$\theta=\omega t$$

β. Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση

εκτελεί ένα στερεό σώμα, όταν η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ είναι σταθερή.

Η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση ορισμού, $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}$ που κατά περίπτωση γράφεται ως εξής:

- Αν η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη:** $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\omega-\omega_0}{t-t_0}$ (8)
- Αν η κίνηση είναι **επιβραδυνόμενη**: $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\omega_0-\omega}{t-t_0}$ (9)

όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το **μέτρο** της γωνιακής επιτάχυνσης (επιβράδυνση).

Παρατήρηση:

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτουν οι παρακάτω τύποι, που μπορούν να χρησιμοποιούνται αντι για τις σχέσεις (8) και (9):

στην ομαλά επιταχυνόμενη με $\omega_o=0$	$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$	(10)
στην ομαλά επιταχυνόμενη με $\omega_o\neq 0$	$\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$	(11)
στην ομαλά επιβραδυνόμενη	$\omega=\omega_0-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$	(12)

Η γωνία θ που διαγράφει το στερεό

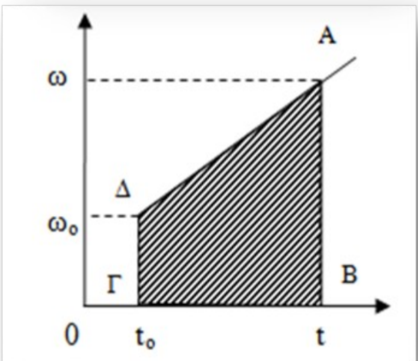
που εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση, υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $\omega=f(t)$ ή από τους τύπους:

i. στην **ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα:**

$$\boxed{\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2} \qquad (13)$$

ii. στην **ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική γωνιακή ταχύτητα:**

$$\boxed{\theta=\omega_o(t-t_o)+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}(t-t_o)^2} \qquad (14)$$



Η γραφική παράσταση της σχέσης $\omega = \omega_o + \alpha t$

και αν $t_o=0$ $\boxed{\theta=\omega_o t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2}$

iii. στην **ομαλά επιβραδυνόμενη:**

$$\theta=\omega_o(t-t_o)-\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}(t-t_o)^2 \quad \text{και αν} \quad t_o=0 \quad \boxed{\theta=\omega_o t-\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2} \qquad (15)$$

Αντιστοίχιση μεγεθών της μεταφορικής κίνησης στερεού

Μεταφορική κίνηση		Στροφική κίνηση	
Θέση	x	γωνία στροφής	θ
Ταχύτητα	$\upsilon=\frac{dx}{dt}$	γωνιακή ταχύτητα	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση	$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt}$	γωνιακή επιτάχυνση	$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}$

Κίνηση που εκτελούν τα σημεία του στερεού.

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί στροφική κίνηση, όλα τα σημεία του, εκτός αυτά που βρίσκονται στον άξονα περιστροφής, εκτελούν **κυκλική κίνηση** η οποία είναι **μεταφορική κίνηση** και περιγράφεται με δύο διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας:

- είτε γωνιακά μεγέθη, $(\theta, \omega, \alpha_{\gamma\omega\nu})$
- είτε γραμμικά μεγέθη. (s, υ, α)

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι τα γωνιακά $(\theta, \omega, \alpha_{\gamma\omega\nu})$ και τα γραμμικά μεγέθη (s, υ, α) περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο το ίδιο φαινόμενο, άρα σε καμία περίπτωση δεν υπάρχει επαλληλία μεταξύ τους, δεν μπορούμε δηλαδή να τα προσθέσουμε.

Γωνιακά μεγέθη της κυκλικής κίνησης των σημείων του στερεού, είναι

- Η γωνία θ που διαγράφει ένα σημείο.
- Η γωνιακή ταχύτητα ω, ενός σημείου.
- και η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu}$, ενός σημείου.

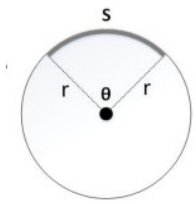
Όλα τα παραπάνω γωνιακά μεγέθη, $\theta, \omega, \alpha_{\gamma\omega\nu}$, *είναι:*

- *ίδια για όλα τα σημεία του στερεού*
- *και ίδια με τα αντίστοιχα μεγέθη του στερεού.*

Γραμμικά μεγέθη της κυκλικής κίνησης των σημείων του στερεού

Η κυκλική κίνηση που εκτελούν τα σημεία του στερεού , λόγω της στροφικής κίνησης που εκτελεί το στερεό, περιγράφεται από τα παρακάτω μεγέθη:

1. τόξο s που διαγράφει ένα σημείο του στερεού.



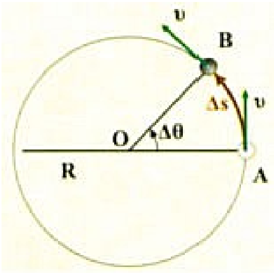
Μεταξύ του τόξου s που διανύει και της γωνίας θ που διαγράφει ένα σημείο κατά την κυκλική του κίνηση ισχύει η σχέση:

$$\boxed{s = \theta \cdot r}$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε το τόξο που έχει δια γράψει ένα σημείο σε κάποια χρονική στιγμή, πρώτα υπολογίζουμε τη γωνία θ *από τις σχέσεις (13) , (14) και (15) και μετά το τόξο* s *, από τη σχέση (20)*

2. γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$ (στο σχολικό βιβλίο συμβολίζεται υ), η οποία:

Ορίζεται: από τη σχέση $\upsilon = \frac{ds}{dt}$



όπου ds το στοιχειώδες μήκος του **τόξου** που διαγράφει το υλικό σημείο, στο στοιχειώδη χρόνο dt ,

Η κατεύθυνσή της: είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, όπως στο σχήμα.

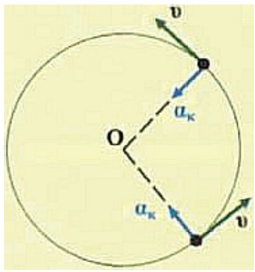
Υπολογίζεται από την σχέση:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta r)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r = \omega r \quad \rightarrow \quad \boxed{\upsilon = \omega r}$$ **(δεν χρειάζεται απόδειξη)**

όπου r , η απόσταση του συγκεκριμένου σημείου από τον άξονα περιστροφής. Απο τη παραπάνω σχέση, συμπεραίνουμε, οτι η γραμμική ταχύτητα έχει διαφορετική τιμή για κάθε σημείο του στερεού.

3. κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ η οποία:

- οφείλεται στην αλλαγή της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας.
- έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου.
- και μέτρο: $\boxed{\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 \cdot r}$ (17)



4. η επιτρόχια επιτάχυνση

Ειναι **ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας.** Στο σχολικό βιβλίο, αναφέρεται ως: ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σημείου του στερεού, ενώ η σωστή έκφραση θα

<u>ορίζεται</u> από τη σχέση: $\alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon}{dt}$ όπου υ το **μέτρο** της γραμμικής ταχύτητας

<u>Υπολογίζεται</u> από την σχέση: $\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r$ (18)

Απόδειξη: $\alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \alpha_{\gamma\omega\nu} r$

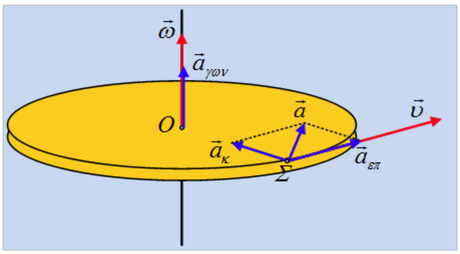
όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του κάθε σημείου.

5. Συνολική επιτάχυνση

Η συνολική επιτάχυνση ενός σημείου είναι το διανυσματικό άθροισμα της κεντρομόλου και επιτρόχιας επιτάχυνσης:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\kappa + \vec{\alpha}_{\varepsilon\pi}$$

έχει μέτρο: $\boxed{\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_{\varepsilon\pi}^2}}$



και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα.

Παρατήρηση:
Στην συνολική επιτάχυνση δεν αθροίζεται η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$. Αυτό ισχύει γενικά για τα γωνιακά και γραμμικά μεγέθη, τα οποία περιγράφουν το ίδιο φαινόμενο με διαφορετικούς και ανεξάρτητους τρόπους. Παράδειγμα το πόσο γρήγορα κινείται ένα σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση, περιγράφεται από την γραμμική ή την γωνιακή ταχύτητα

Άλλος τρόπος υπολογισμού του τόξου που έχει διαγράψει ένα σημείο.
στην ομαλή στροφική κίνηση θα ισχύει: $s = \upsilon \cdot t$

στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση: $s=\upsilon_o \Delta t \pm \frac{1}{2} \alpha_{\varepsilon\pi} \Delta t^2$

Απόδειξη:

$$s=\theta \cdot r=\left(\omega_o \Delta t \pm \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2\right) \cdot r=\left(\omega_o \cdot r\right) \Delta t \pm \frac{1}{2}\left(\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r\right) \Delta t^2 \rightarrow \quad s=\upsilon_o \Delta t \pm \frac{1}{2} \alpha_{\varepsilon\pi} \Delta t^2$$

Αν το μέτρο της ταχύτητας (γραμμικής ταχύτητας) παραμένει σταθερό, τότε πρόκειται για **ομαλή κυκλική κίνηση** για την οποία ισχύουν επιπλέον:

$$\upsilon=\frac{2\pi R}{T}=2\pi R f \qquad s=\upsilon t \qquad \theta=\omega t$$

Γ. ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Α) Η κίνηση του στερεού σώματος

Το στερεό σώμα, συνολικά, εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις, μία μεταφορική και μία στροφική. Υπάρχουν γενικά δύο περιπτώσεις σύνθετης κίνησης.
Η μία είναι αυτή που οι δύο κινήσεις (στροφική και μεταφορική) είναι **ανεξάρτητες** η μία από την άλλη ενώ στην δεύτερη περίπτωση ανήκουν κινήσεις όπως η κύλιση του τροχού, το γιο-γιο η τροχαλία κλπ, όπου ανάμεσα στα μεγέθη της στροφικής και μεταφορικής κίνησης υπάρχουν συγκεκριμένες σχέσεις.

Τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης του στερεού είναι αυτά της κίνησης του κέντρου μάζας, δηλαδή:
Η ταχύτητα υ_{cm} , η **επιτάχυνση** α_{cm} και η **μετατόπιση** x του κέντρου μάζας.

Για κάθε μία από τις κινήσεις αυτές ισχύουν όλα όσα έχουμε αναφέρει πιο πάνω, δηλαδή:

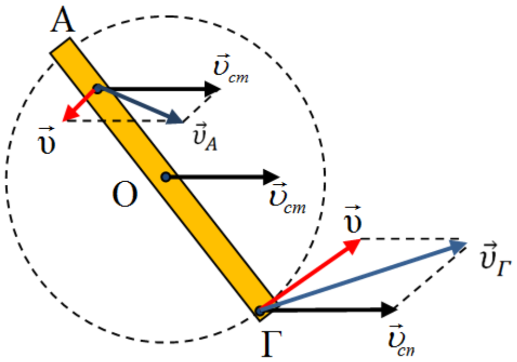
- Για την **μεταφορική κίνηση ισχύουν** οι γνωστές σχέσεις (1) έως (5)
- Για τη **στροφική κίνηση** ισχύουν οι γνωστές σχέσεις (5) έως (14)

Β) Η κίνηση των σημείων του στερεού στη σύνθετη κίνηση.

Κατά τη σύνθετη κίνηση του στερεού, **κάθε σημείο του στερεού,** εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις,
- μια **μεταφορική ίδια με αυτήν του κέντρου μάζας** και
- μια **κυκλική**, εξαιτίας της στροφικής κίνησης του στερεού.

Έτσι έχει ταυτόχρονα δυο ταχύτητες:
α) μεταφορική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ ίδια για όλα τα σημεία του στερεού.
β) γραμμική ταχύτητα περιστροφής $\vec{\upsilon}$ **που έχει:**
- **μέτρο:** $\upsilon = \omega r$, όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί το σημείο (δηλαδή η απόσταση του σημείου από τον άξονα)
- **κατεύθυνση:** εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά που διαγράφει το σημείο κατά την περιστροφή του.

Έτσι, η γραμμική ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο, μόνο για τα σημεία του στερεού που απέχουν από το κέντρο του, την ίδια απόσταση.



γ) Η συνολική (συνισταμένη) ταχύτητα κάθε σημείου Σ δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{\upsilon}_\Sigma = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{cm}$$

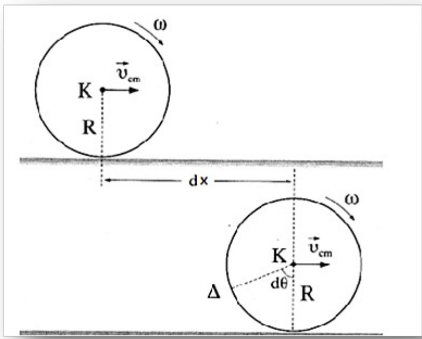
δ) Η συνολική επιτάχυνση των σημείων του στερεού στην περίπτωση της σύνθετης κίνησης είναι:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\kappa + \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_\varepsilon$$

Περίπτωση 1η: κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η εξής βασική ιδιότητα:

Αν σε χρόνο dt ο τροχός μετατοπίζεται κατά dx και ένα οποιοδήποτε σημείο της **περιφέρειας** του τροχού διαγράφει τόξο ds, τότε



$$ds = dx$$

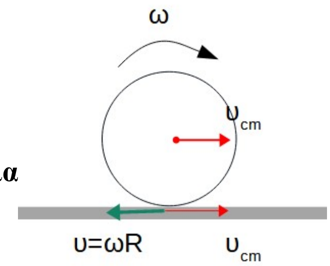
Δηλαδή, η οριζόντια μετατοπιση του τροχού (dx), ισούται με το τόξο που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας (ds).
Έτσι, αν $d\theta$ είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο ds, θα ισχύει:

$$dx = ds = Rd\theta$$

Σχέση μεταφορικής και γωνιακής ταχύτητας

Α΄τρόπος

Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού θα ισχύει:



$$\upsilon_{cm} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}R = \omega R \qquad \text{δηλαδή} \quad \upsilon_{cm} = \omega R$$

Επειδή και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας **υ** , λόγω κυκλικής κίνησης, **για τα σημεία της περιφέρειας** του τροχού είναι $\upsilon = \omega R$, προκύπτει ότι:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon = \omega R$$

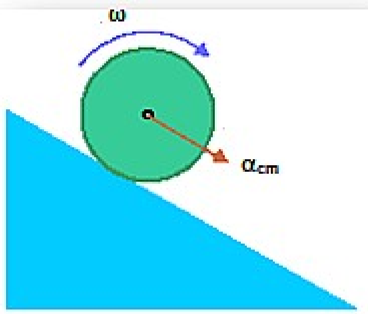
Β' τρόπος

Για το σημείο επαφής Α του τροχού με το δάπεδο ισχύει:

$$\upsilon_A = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} - \upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon = \omega R$$

Σχέση μεταφορικής και γωνιακής επιτάχυνσης

Έστω τροχός που κυλίεται με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{d\omega}{dt}$. Αν σε χρόνο dt η ταχύτητα του κέντρου μάζας μεταβάλλεται κατά $d\upsilon_{cm}$, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα είναι:



$$\alpha_{cm}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R\Rightarrow \qquad \alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$$

<u>Σχέση μεταξύ διαστήματος</u> s **<u>και γωνίας</u>** θ **<u>που διαγράφει ο τροχός.</u>**

$$s=\theta\cdot R$$

<u>**Ο αριθμός περιστροφών που έχει πραγματοποιήσει ο τροχός** δίνεται από τη σχέση:</u>

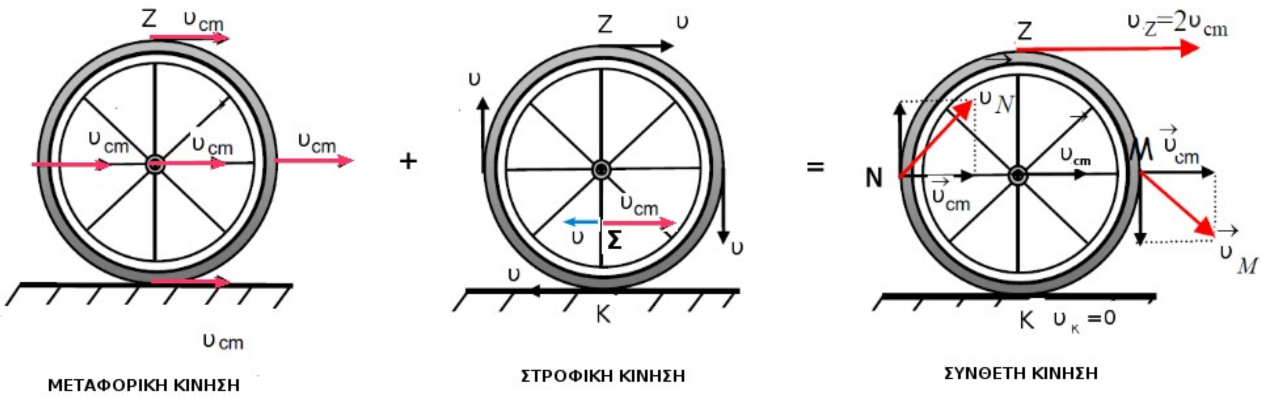
$$N=\frac{\theta}{2\pi}$$

όπου θ η γωνία που έχει διαγράψει το σώμα

ή $$N=\frac{s}{2\pi R}$$

όπου s το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα

Προσδιορισμός της ταχύτητας , των διαφόρων σημείων του τροχού



Στην κύλιση του τροχού, κάθε σημείο έχει:

την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ του κέντρου μάζας, αλλά και μία ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$,(γραμμική ταχύτητα) εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά που εκτελεί το σημείο κατά την περιστροφή του, με μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot r$ όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί το σημείο.Για τα σημεία της περιφέρειας (και μόνον γι αυτά) θα είναι $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_{cm}$

Τα σημεία K, N , Z είναι σημεία της περιφέρειας ενώ το σημείο Σ απέχει από το κέντρο απόσταση $r=\dfrac{R}{2}$.

✔ **Η ταχύτητα του σημείου Κ** είναι: $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_K=\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{cm}+\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{\gamma\rho}$

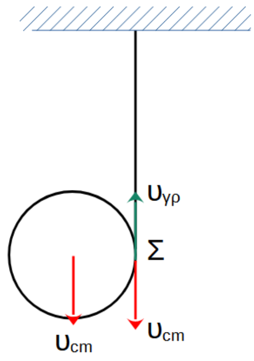
έτσι για το μέτρο της ισχύει: $\upsilon_K=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon_K=0$

✔ **Η ταχύτητα του σημείου Ν** είναι: $\vec{\upsilon}_N=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$

έτσι για το μέτρο της ισχύει: $\upsilon_N=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{\gamma\rho}^2}=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{cm}^2}\rightarrow \upsilon_N=\upsilon_{cm}\sqrt{2}$

✔ **Η ταχύτητα του σημείου Ζ** είναι: $\vec{\upsilon}_Z=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$

έτσι για το μέτρο της ισχύει: $\upsilon_Z=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon_Z=2\upsilon_{cm}$



✔ **Η ταχύτητα του σημείου Σ** είναι: $\vec{\upsilon}_\Sigma=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$

έτσι για το μέτρο της ισχύει: $\upsilon_\Sigma=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}$ όμως $\upsilon=\omega r=\omega\frac{R}{2}=\frac{\omega R}{2}=\frac{\upsilon_{cm}}{2}$

έτσι $\upsilon_\Sigma=\upsilon_{cm}-\frac{\upsilon_{cm}}{2}=\frac{\upsilon_{cm}}{2}$

****Περίπτωση 2η: κύλιση με ολίσθηση προς τα πίσω (σπινάρισμα).**

Στην περίπτωση αυτή το σημείο Κ του τροχού που είναι σε επαφή με το έδαφος ολισθαίνει με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μεταφορικής του ταχύτητας και επομένως θα ισχύει:

$$\upsilon_K=\upsilon_{cm}-\upsilon=\upsilon_{cm}-\omega R<0 \quad \text{άρα} \quad \upsilon_{cm}<\omega R$$

Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού είναι

$$x=\upsilon_{cm}t \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \ \ldots \text{κλπ}$$

Ενώ το μήκος τόξου που έχει διαγράψει ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού στον ίδιο χρόνο ,

$$S=\theta\cdot R$$

Όπου $\theta=\omega\cdot t$ ή $\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$ …..κλπ

Και ισχύει: $s>x$

Αυτό συμβαίνει όταν ένα αυτοκίνητο ξεκινά απότομα, οπότε οι τροχοί του σπινάρουν, δηλαδή ολισθαίνουν πάνω στο οδόστρωμα καθώς περιστρέφονται.

****Περίπτωση 3η: κύλιση με ολίσθηση προς τα μπρός (φρενάρισμα)**

Στην περίπτωση αυτή το σημείο Κ του τροχού που είναι σε επαφή με το έδαφος ολισθαίνει πάνω του με κατεύθυνση ίδια με αυτή της μεταφορικής του ταχύτητας και επομένως θα ισχύει:

$$\upsilon_K=\upsilon_{cm}-\omega R > 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_{cm}>\omega R$$

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού είναι: $x = \upsilon_{cm} t$ **ή** $x = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$ **… κλπ.**

Ενώ η **γωνία που έχει διαγράψει ένα σημείο της περιφέρειας** του τροχού είναι:

$$\theta = \omega \cdot t \quad \text{ή} \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \text{….. κλπ}$$

το μήκος τόξου που έχει διαγράψει ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού είναι**:**

$$S = \theta \cdot R \qquad \text{και ισχύει:} \qquad s < x$$

Αυτό συμβαίνει όταν ένα αυτοκίνητο φρενάρει, οπότε οι τροχοί του ολισθαίνουν, χωρίς όμως να σταματήσουν να περιστρέφονται.

ΤΟ ΓΙΟ-ΓΙΟ ΠΟΥ ΞΕΤΥΛΙΓΕΤΑΙ

Ισχύουν: $x = \theta R$, $\upsilon_{cm} = \omega R$, $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$

Απόδειξη:

Α’ τρόπος (ίδιος με αυτόν του σχολικού βιβλίου για την κύλιση του τροχού)

Επειδή το σχοινί ειναι συνεχώς σε επαφή με τον τροχό, χωρίς να γλυστρά, ισχύει οτι: η κατακόρυφη απόσταση (x) που διανύει ο τροχός ισούται με το μήκος του σχοινιού που ξετυλίγεται, άρα με το τόξο (s) που διαγράφει ένα σημείο στην περιφέρεια του τροχου ,δηλαδή ισχύει:

- $x = s$ όμως $s = \theta R$ άρα τελικά $x = \theta R$
- $\upsilon_{cm} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{cm} = \omega R$
- $\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \Rightarrow \qquad \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

Β΄ τρόπος

Ξεκινάμε με την ταχύτητα του σημείου Σ του σχοινιού που ειναι σε επαφή με την τροχαλία, του οποίου η ταχύτητα ειναι μηδεν:

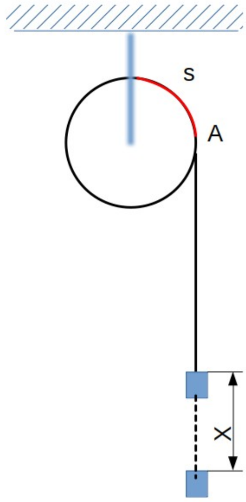
- $\upsilon_{\Sigma} = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R \quad \Rightarrow \qquad \upsilon_{cm} = \omega R$
- $\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \Rightarrow \qquad \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- $\theta = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2}(a_{\gamma\omega\nu} R) t^2 = \left(\frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2\right) R = \theta R \quad \Rightarrow \quad x = \theta R$

Αν: θ η γωνία που στράφηκε η τροχαλία, ω η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας , x η απόσταση που διανύει το σώμα, υ η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το σώμα και α η επιτάχυνση του σώματος, ισχύουν:

$$\boxed{x=\theta R} \qquad \boxed{\upsilon=\omega\, R} \qquad \boxed{a=a_{\gamma\omega\nu} R}$$

Απόδειξη:

Η απόσταση (x) που διανύει το σώμα, ισούται με το μήκος του σχοινιού που ξετυλίγεται, άρα και με το τόξο (s) που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας. Δηλαδή:



- $x=s$ όμως $s=\theta R$ άρα τελικά $x=\theta R$
- $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d(\theta R)}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}R \Rightarrow \upsilon=\omega R$
- $\alpha=\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{d(\omega R)}{dt}=\dfrac{d\omega}{dt}R \Rightarrow \alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu} R$

Β΄ τρόπος

- Η απόσταση (x) που διανύει το σώμα, ισούται με το μήκος του σχοινιού που ξετυλίγεται, άρα και με το τόξο (s) που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας. Δηλαδή:

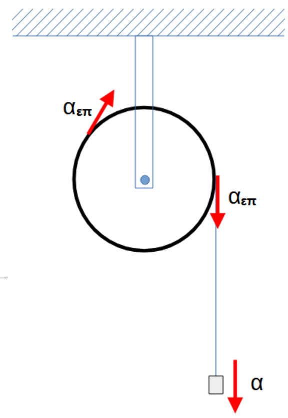
$$x=s \quad \text{όμως} \quad s=\theta R \quad \text{άρα τελικά} \quad x=\theta R$$

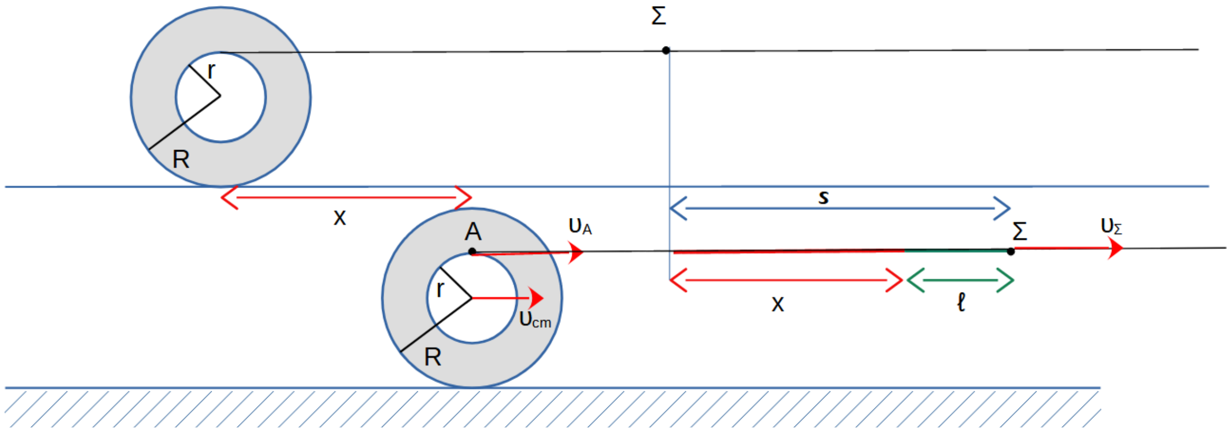
- Η ταχύτητα του σώματος (υ) ισούται με την γραμμική ταχύτητα που έχουν τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας, εξαιτίας της περιστροφής της,

$$\upsilon=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R \quad \Rightarrow \quad \upsilon=\omega R$$

- **Η επιτάχυνση** του σώματος ισούται με την επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, οπότε:

$$\alpha=\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R \Rightarrow \qquad \alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu} R$$





Στην παραπάνω περίπτωση, μας απασχολεί η σχέση :

- των μεγεθών της κίνησης ενός σημείου Σ, του σχοινιου $(s, \upsilon_{\Sigma}, \alpha_{\Sigma})$
- με τα μεγέθη της κίνησης του κέντρου μάζας $(x, \upsilon_{cm}, a_{cm})$
- και με αυτά της στροφικής κίνησης του τροχού $(\theta, \omega, \alpha_{\gamma\omega\nu})$

Το μήκος ℓ του σχοινιού που ξετυλίγεται ισούται με το τόξο που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ακτίνας r , δηλαδή:

$$\ell = \theta \cdot r \quad (1)$$

Η απόσταση x που διανύει το κέντρο μάζας, είναι

$$x = \theta \cdot R \quad (2)$$

Η απόσταση s που διανύει ένα σημείο του σχοινιού, ισούται με το άθροισμα $x + \ell$ της απόστασης που διανύει το κέντρο μάζας και του μήκους του σχοινιού που ξετυλίγεται:

$$s = x + l \Rightarrow s = \theta r + \theta R \quad \Rightarrow \quad s = \theta (R + r) \quad (3)$$

Απο τις (1) , (2) και (3) με διαίρεση , προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις μεταξύ ℓ, x και s πχ:

$$\frac{x}{\ell} = \frac{\theta R}{\theta r} \Rightarrow \frac{x}{\ell} = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{r} \cdot \ell \quad (4)$$

$$\frac{x}{s} = \frac{\theta R}{\theta (R + r)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{s} = \frac{R}{(R + r)} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{(R + r)} s \quad (5)$$

ενώ $\dfrac{s}{\ell} = \dfrac{\theta (R + r)}{\theta r} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{s}{\ell} = \dfrac{(R + r)}{r} \quad \Rightarrow \quad s = \dfrac{(R + r)}{r} \ell \quad (6)$

Παραγωγίζοντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να πάρουμε τις αντίστοιχες σχέσεις των ταχυτήτων και απο αυτές αυτες των επιταχύνσεων. πχ.απο την (5) προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{R}{R + r} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{cm} = \frac{R}{R + r} \upsilon_{\Sigma}$$

και με παραγώγιση της τελευταίας

$$\frac{dv_{cm}}{dt}=\frac{dv_{\Sigma}}{dt}\frac{R}{R+r} \quad \Rightarrow \quad a_{cm}=\frac{R}{R+r}\alpha_{\Sigma}$$

Εναλλακτικά για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις, μπορούμε να κάνουμε τα παρακάτω:

Για τις ταχύτητες ισχύει:

η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$\upsilon_{cm}=\omega R \quad (7)$$

η γραμμική ταχύτητα του σημείου Α είναι

$$\upsilon_{A,\gamma\rho}=\omega r \quad (8)$$

η ταχύτητα ενός σημείο Σ του σχοινιού ισούται με την ταχύτητα (συνολική) του σημείου Α και ισχύει

$$\upsilon_{\Sigma}=\upsilon_{A}=\upsilon_{cm}+\upsilon_{A,\gamma\rho}=\omega R+\omega r \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\Sigma}=\upsilon_{A}=\omega(R+r) \quad (9)$$

Απο τις παραπάνω σχέσεις, εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις μεταξύ των υ_{cm} , υ_{Σ} και $\upsilon_{A,\gamma\rho}$

πχ: $\frac{\upsilon_{\Sigma}}{\upsilon_{cm}}=\frac{\omega(R+r)}{\omega R}=\frac{R+r}{R} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{cm}=\frac{R}{R+r}\upsilon_{\Sigma}$

Για τις επιταχύνσεις ισχύει:

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι: $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R \quad (10)$

Η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Α ειναι $\alpha_{A,\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}r \quad (11)$

Η επιτάχυνση του σημείου Α ισούται με την επιτάχυνση ενός σημείου Σ του σχοινιού, δηλαδή:

$$\alpha_{\Sigma}=\alpha_{A}=\alpha_{\varepsilon\pi,A}+\alpha_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}r+\alpha_{\gamma\omega\nu}R \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\Sigma}=\alpha_{A}=\alpha_{\gamma\omega\nu}(R+r) \quad (12)$$

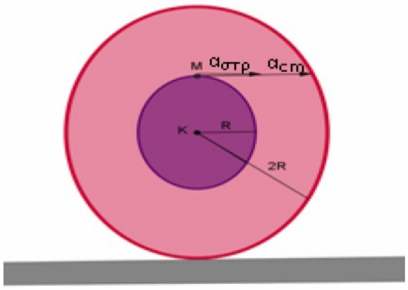
Απο τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις μεταξύ των α_{cm} , α_{Σ} και $\alpha_{A}.\varepsilon\pi$

$$\text{πχ.} \quad \frac{(10)}{(12)}\Rightarrow\frac{a_{cm}}{\alpha_{\Sigma}}=\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu}R}{a_{\gamma\omega\nu}(R+r)}\Rightarrow\frac{a_{cm}}{a_{\Sigma}}=\frac{R}{R+r}\Rightarrow a_{cm}=\frac{R}{R+r}a_{\Sigma}$$

Παρατήρηση: η επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\pi}$ αναφέρεται και ως $\alpha_{\sigma\tau\rho}$ δηλαδή ως επιτάχυνση ενός σημείου του στερεού, εξαιτίας της στροφικής κίνησης που εκτελεί το στερεό

Παράδειγμα:

Ένα στερεό αποτελείται από δύο κατακόρυφους ομοαξονικούς κυλίνδρους κολλημένους μεταξύ τους που έχουν ακτίνες R και $2R$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κοινό οριζόντιο άξονα των δύο κυλίνδρων σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας R έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τραβάμε το νήμα οριζόντια με επιτάχυνση $\alpha=3\,m/s^2$ ώστε το νήμα να ξετυλίγεται και το στερεό να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει Ζητείται:



α) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού.

β) Όταν έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος $l=5\,m$, πόσο έχει μετακινηθεί το κέντρο μάζας του στερεού.

γ) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού εκείνη τη στιγμή (αν δίνεται ότι η ακτίνα του μικρού κυλίνδρου είναι $R=0,1\,m$).
δ) Να βρεθεί η ταχύτητα του υψηλότερου σημείου του στερεού (Σ) εκείνη τη στιγμή.

Απάντηση
α) Η επιτάχυνση ενός σημείου του σχοινιού (α) ισούται με την επιτάχυνση του σημείου Μ, άρα:

$$\alpha=\alpha_M=\alpha_{cm}+\alpha_{\sigma\tau\rho}=\alpha_{\gamma\omega\nu}2R+a_{\gamma\omega\nu}R \quad \Rightarrow \quad a=3a_{\gamma\omega\nu}R \quad (1)$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι $a_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}2R$ (2)

$$\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow\frac{a}{a_{cm}}=\frac{3a_{\gamma\omega\nu}R}{a_{\gamma\omega\nu}2R}\Rightarrow \quad \frac{a}{a_{cm}}=\frac{3}{2}\Rightarrow a_{cm}=\frac{2}{3}a \quad\Rightarrow\quad a_{cm}=\frac{2}{3}\cdot 3\ \Rightarrow$$

$$a_{cm}=2\,m/s^2$$

β) Όταν το στερεό έχει στραφεί κατα γωνία θ ,
το μήκος l του νήματος που έχει ξετυλιχτεί, είναι $l=\theta\cdot R$ (3)
και η απόσταση x που έχει μετακινηθεί το κέντρο μάζας είναι $x=\theta\cdot 2R$ (4)

$$\frac{(4)}{(3)}\Rightarrow\frac{x}{l}=\frac{\theta\cdot 2R}{\theta\cdot R}\quad\Rightarrow\quad x=2l\Rightarrow x=2\cdot 5\quad\Rightarrow\quad x=10\,m$$

γ) $l=\theta R\Rightarrow\theta=\frac{l}{R}=\frac{5}{0,1}\quad\Rightarrow\quad\theta=50\,rad$

απο την (1) $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\alpha}{3R}=\frac{3}{0,3}=10\,r/s^2$ ενώ $\theta=\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2\theta}{a_{\gamma\omega\nu}}}=\sqrt{\frac{2\cdot 50}{10}}=\sqrt{10}\,sec$

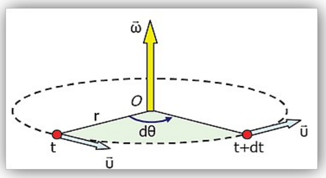
τελικά $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}t \quad\Rightarrow\quad \omega=10\sqrt{10}\,rad/s$

δ) $\upsilon_\Sigma=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\,2R+\omega\,2R=4\omega R=4\cdot 10\sqrt{10}\cdot 0,1=4\sqrt{10}\,m/sec$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

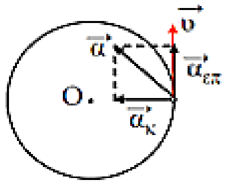
Ευθύγραμμη ομαλή	$\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta$, $x = \upsilon \cdot t$ **(1)**
Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη	$\upsilon = \upsilon_o \pm \alpha(t - t_o)$, $\boldsymbol{x = \upsilon_o t \pm \frac{1}{2} a t^2}$ *(2)*

Στροφικη κίνηση

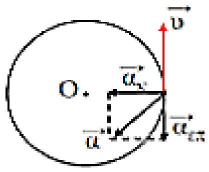
Για το στερεό σώμα	Αν η κίνηση είναι **ομαλή :** $\omega = \sigma\tau\alpha\theta$, $\theta = \omega \cdot t$ Αν η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\omega - \omega_o}{t - t_o}$ $\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ (3) Αν η κίνηση είναι **επιβραδυνόμενη**: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\omega_o - \omega}{t - t_o}$ $\theta = \omega_o t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ (4) η γωνία θ μπορεί να υπολογιστεί και απο το εμβαδό της γραφικής παράστασης ω – t.
Για τα σημεία του στερεού  	**Κυκλική κίνηση σημείων (γωνιακά μεγέθη)** Κάθε σημείο του στερεού : διαγράφει γωνία θ ,έχει γωνιακή ταχύτητα ω,και γωνιακή επ ιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ που ταυτίζονται με τα αντίστοιχα μεγέθη του στερεού και για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις (3) και (4)
	Κυκλική κίνηση σημείων (γραμμικά μεγέθη) Κάθε σημείο του στερεού έχει : **Γραμμική ταχύτητα** $\boldsymbol{\upsilon = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d(\theta r)}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} r = \omega r}$ διαφορετική για κάθε σημείο του στερεού εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά. **Κεντρομόλο επιτάχυνση** $\boldsymbol{\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 \cdot R}$ οφείλεται στην αλλαγή της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας, έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου **Επιτρόχια επιτάχυνση** $\boldsymbol{\alpha_{\varepsilon\pi} = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d(\omega r)}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} r = \alpha_{\gamma\omega\nu} r}$ Η επιτρόχια επιτάχυνση ✗ είναι υπεύθυνη για την μεταβολή του **μέτρου της γραμμικής ταχύτητας** ✗ ισούται με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας υ. **Συνολική επιτάχυνση** $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2}}$ **ισχύουν οι σχέσεις** $S = \theta \cdot R$ $\upsilon = \omega \cdot R$ $\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r$

Σύνθετη κίνηση

ΓΙΑ ΤΟ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ



(α)



(β)

Στο σχήμα (α) η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, ενώ στο (β) επιβραδυνόμενη.

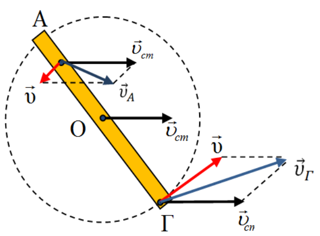
Για τη μεταφορική κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις της μεταφορικής **(1) ,(2)**
Για τη στροφική κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις της στροφικής **(3) , (4)**

Μεταξύ των μεταφορικών και γωνιακών μεγεθών του στερεού δεν υπάρχει γενικά κάποια σχέση, εκτός αν το στερεό εκτελεί **κύλιση χωρίς ολίσθηση** οπότε ισχύουν:

$$\boldsymbol{S=\theta \cdot R} \qquad \upsilon_{cm}=\omega \cdot R \qquad \alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\, r$$

$N=\dfrac{\theta}{2\pi}$ όπου θ η γωνία που έχει διαγράψει το σώμα, και

$N=\dfrac{s}{2\pi R}$ όπου s το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα



Κατά τη σύνθετη αυτή κίνηση κάθε σημείο του τροχού εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις, μια **μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και** μια **κυκλική**, με **γωνιακή ταχύτητα ω,**
έτσι έχει ταυτόχρονα και δυο ταχύτητες.

α) μεταφορική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ ίδια για όλα τα σημεία του στερεού.

β) γραμμική ταχύτητα περιστροφής $\vec{\upsilon}$ που έχει:

- **μέτρο** υ = ωr ,
  όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί το σημείο(δηλαδή η απόσταση του σημείου απο τον άξονα)
- **κατεύθυνση** εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά που διαγράφει το σημείο κατά την περιστροφή του.
  Έτσι, η γραμμική ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο, μόνο για τα σημεία του στερεού που απέχουν από το κέντρο του, την ίδια απόσταση.

Η συνολική (συνισταμένη) ταχύτητα κάθε σημείου Σ δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{\upsilon}_{\Sigma}=\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}_{cm}$$

δ) Η συνολική επιτάχυνση των σημείων του στερεού στην περίπτωση της σύνθετης κίνησης είναι:

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_{\kappa}+\vec{\alpha}_{cm}+\vec{\alpha}_{\varepsilon}$$

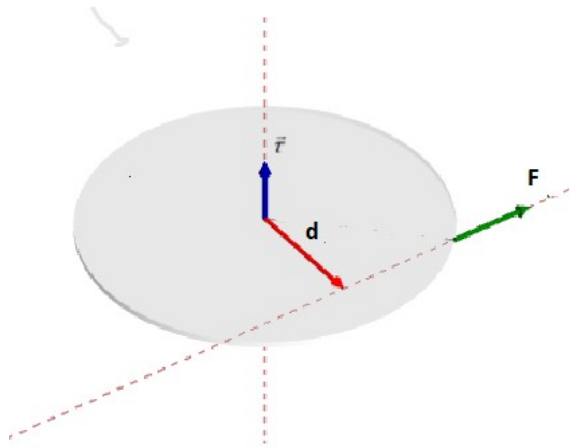
4.3 ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

1. Ροπή δύναμης ως προς άξονα

Δύναμη σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής

Ονομάζουμε ροπή δύναμης $\boldsymbol{F}$ ως προς άξονα, το διανυσματικό μέγεθος που έχει:

- **μέτρο** $\boldsymbol{\tau = F \cdot d}$
- **διεύθυνση** αυτήν του άξονα περιστροφής
- **φορά** που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού:

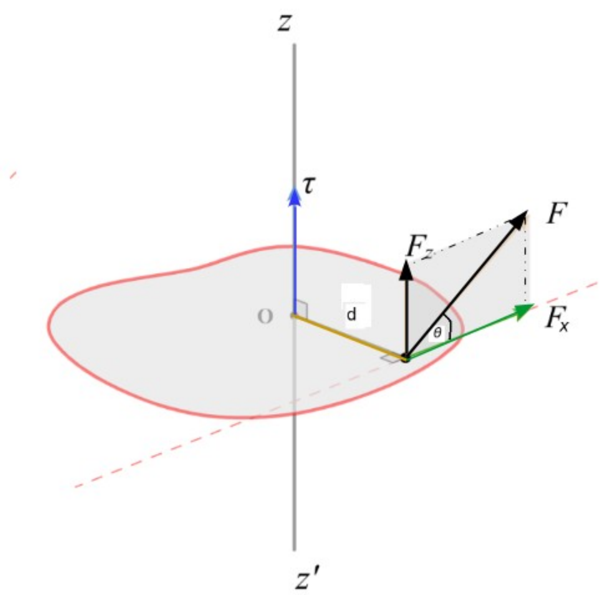


Στον παραπάνω τύπο, d είναι η απόσταση του φορέα της δύναμης $\vec{F}$ από το θεωρούμενο σημείο

Αν η δύναμη $\boldsymbol{F}$ δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής,

Αναλύουμε τη δύναμη σε συνιστώσες, όπως στο παρακάτω σχήμα. Η συνιστώσα F_z, η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα, δεν έχει ροπή ως προς αυτόν. Έτσι , η ροπή της $\vec{F}$ είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα $\vec{F}_x$ που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο, που είναι κάθετο στον άξονα.

$$\tau = F_x \cdot d = F\, d\, \sigma\upsilon\nu\theta$$



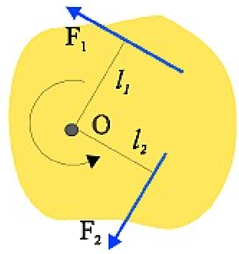
✗ Αν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται σένα σώμα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε

θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και

αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να το περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

<u>παράδειγμα</u>

Στο σώμα του διπλανού σχήματος δρουν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Το σώμα έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα είναι :

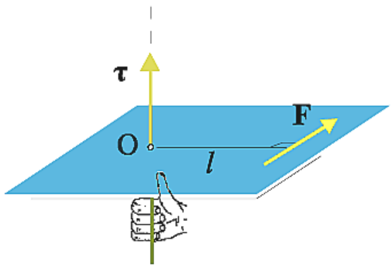


$$\tau=\tau_1+\tau_2=F_1 l_1-F_2 l_2$$

2. Ροπή δύναμης ως προς σημείο

✔ Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση).

✔ Αν όμως ο φορέας της δύναμης δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που:



α) διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και

β) είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται η έννοια της **ροπής της δύναμης ως προς σημείο.**

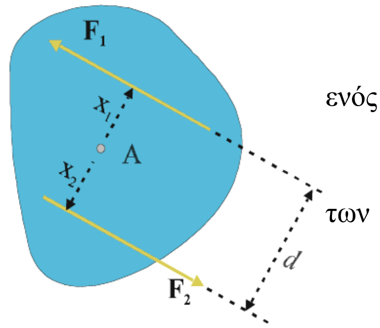
Ονομάζουμε **ροπή δύναμης F ως προς σημείο** Ο το διανυσματικό μέγεθος **τ** που έχει:

- **μέτρο** $\boldsymbol{\tau=F\cdot l}$ όπου l η απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο Ο
- **διεύθυνση** κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο Ο και
- ***φορά*** που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε δύο αντίθετες δυνάμεις (δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης) που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία ενός σώματος.

Η ροπή του ζεύγους αποδεικνύεται ότι είναι ίδια για οποιοδήποτε σημείο και ισούται με το γινόμενο της μίας δύναμης F επί την απόσταση d των δύο δυνάμεων:



$$\boldsymbol{\tau=F\cdot d}$$

Απόδειξη: $\boldsymbol{\tau=F\,x_1+F\,x_2=F\left(x_1+x_2\right)=F\,d}$

2) Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ένα στερεό σώμα ισορροπεί όταν :

α) Ισορροπεί στροφικά, δηλαδή δεν στρέφεται (ω=0) ή στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Η συνθήκη που εξασφαλίζει οτι ένα στερεό σώμα ισορροπει στροφικά είναι: $\Sigma \vec{\tau}=0$

$$\text{α)} \quad \Sigma \vec{F}=0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \\ \Sigma F_y=0 \end{cases}$$

και β) ότι το κέντρο μάζας του σώματος ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα

και β)

συνθήκη που εξασφαλίζει ότι δεν έχει γωνιακή ταχύτητα ω *ή έχει* $\omega=\sigma\tau\alpha\theta$.

Παρατηρήσεις:

1) Άν ένα στερεό σώμα ισορροπεί στροφικά και μεταφορικά, είναι δηλαδή ακίνητο ή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και δεν περιστρέφεται ή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα , η **συνισταμένη των ροπών είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο**. Αυτό εξηγείται ως εξής:

Αφού το σώμα ισορροπεί μεταφορικά θα είναι $\Sigma F=0$, άρα οι υπάρχουσες ροπές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων. Έτσι αν $\Sigma \tau=0$, αυτό θα ισχύει για οποιοδήποτε σημείο, αφού οι ροπή του ζεύγους είναι η ίδια για όλα τα σημεία.

2) Άν ένα στερεό σώμα ισορροπεί στροφικά αλλά όχι μεταφορικά, εκτελεί δηλαδή επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση αλλά δεν περιστρέφεται ή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα , **η συνισταμένη των ροπών είναι μηδέν μόνο ως προς το κέντρο μάζας.**

Παράδειγμα :

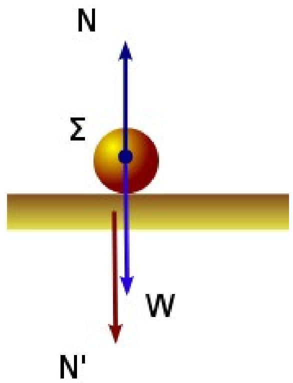
Αφήνουμε μια ομογενή ράβδο $A\Gamma$ να πέσει ελεύθερα, από μικρό ύψος, από οριζόντια θέση. Προφανώς η ράβδος εκτελεί ελεύθερη πτώση, χωρίς να περιστρέφεται.

α) Ως προς το μέσον της O ισχύει: $\Sigma\tau=w\cdot 0=0$

β) Ως προς το άκρο A ισχύει: $\Sigma\tau=-w\cdot\frac{l}{2}\neq 0$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ροπή ως προς άκρο A δεν είναι μηδέν, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η ράβδος θα αρχίσει να περιστρέφεται.

3) Όταν πάνω σε ράβδο που ισορροπεί, τοποθετήσουμε ένα σώμα βάρους w, τότε το σώμα ασκεί στη ράβδο δύναμη ίση με το βάρος του.



Απόδειξη:

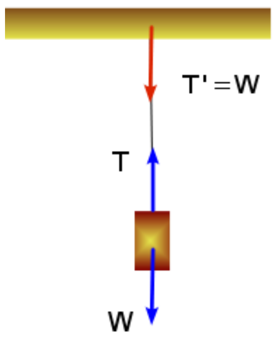
Συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ:

$$\Sigma F=0 \Rightarrow N=W \quad (1)$$

Νόμος δράσης – αντίδρασης: $N=N'$ (2)

(1) ^ (2) $\Rightarrow$ $N'=W$

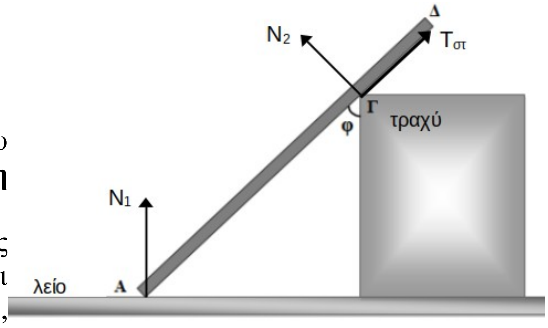
4) Όταν απο ράβδο που ισορροπεί, κρεμάσουμε ένα σώμα βάρους w, μέσω ενός μη εκτατού νήματος, τότε στη ράβδο ασκείται η τάση του νήματος T' που ειναι ίση με το βάρος του σώματος.



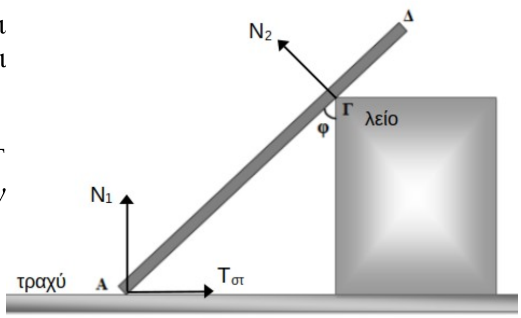
Απόδειξη:

- Συνθήκη ισορροπίας του σώματος $\boldsymbol{\Sigma F = 0 \Rightarrow T = W}$
- **Για την τάση** τάση του νήματος είναι: $\boldsymbol{T = T'}$
- Άρα: $\boldsymbol{T' = W}$

5)



- Όταν μία ράβδος ακουμπά στο σημείο Α λείου δαπέδου, τότε δέχεται μόνο την αντίδραση N_1, **κάθετη στο δάπεδο**.
- Όταν μία ράβδος ακουμπά στο σημείο Γ ενός ορθογωνίου στηρίγματος, με το οποίο παρουσιάζει τριβές, τότε δέχεται δύο δυνάμεις. Την αντίδραση N_2, **κάθετη στη ράβδο** και την στατική τριβή $T_{στ}$, παράλληλη με τη ράβδο



- Όταν μία ράβδος ακουμπά σε τραχύ δάπεδο, τότε δέχεται δύο δυνάμεις, την αντίδραση N_1, **κάθετη στο δάπεδο** και την στατική τριβή $T_{στ}$, παράλληλη με το δάπεδο.

- Όταν μία ράβδος ακουμπά στην λεία κορυφή Γ ορθογωνίου στηρίγματος , τότε δέχεται μόνο την αντίδραση N_2 , **κάθετη στην ράβδο**.

Παράδειγμα 1

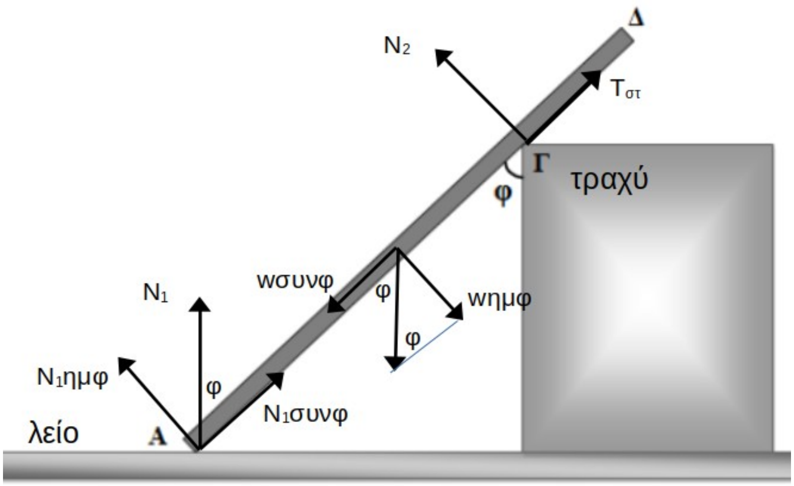
Μία ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους L και βάρους w, ισορροπεί ακουμπώντας στο άκρο της Α σε λείο οριζόντιο δάπεδο και στο σημείο της Γ, με ΑΓ=3L/4, σε ορθογώνιο κιβώτιο, όπως δείχνεται στο σχήμα. Η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο είναι $\varphi=30^0$. Να βρείτε:

α) Την αντίδραση N_1 του δαπέδου.

β) Το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται η ράβδος στο σημείο Γ.

γ) Την αντίδραση N_2 στο σημείο Γ.

Απάντηση



α) $\Sigma\tau_\Gamma=0 \Rightarrow N_1\,\eta\mu\varphi\,\dfrac{3L}{4}=w\eta\mu\varphi\,\dfrac{L}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1=\dfrac{w}{3}}$ (1)

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow N_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi+T_{\sigma\tau}=w\,\sigma\upsilon\nu\varphi$ (2)

Αντικαθιστούμε την (1) στην (2)

$\dfrac{w}{3}\sigma\upsilon\nu\varphi+T_{\sigma\tau}=w\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{\sigma\tau}=\dfrac{2}{3}w\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (3)

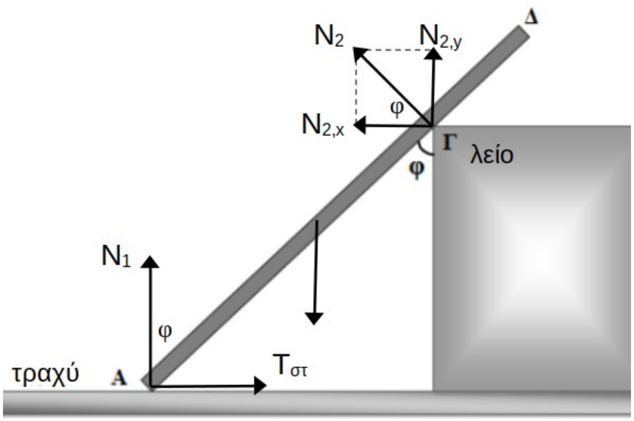
β) $\Sigma\tau_A=0 \Rightarrow w\dfrac{L}{2}\eta\mu\varphi=N_2\dfrac{3L}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2=\dfrac{2}{3}w\,\eta\mu\varphi}$

Παράδειγμα 2
(Το παράδειγμα αυτό ειναι χαρακτηριστικό της περίπτωσης όπου πρέπει να πάρουμε τη σχέση ΣΤ = 0 και δεύτερη φορά, ως προς άλλον άξονα.)

Η ομογενής ράβδος του διπλανού σχήματος, μήκους L και βάρους w, ισορροπεί οριακά, στηριζόμενη στο δάπεδο και στο σημείο Γ, στο οποίο δέν δέχεται τριβές. Δίνονται το ημφ και συνφ. Η απόσταση ΓΔ είναι ίση με L/4. Να βρείτε:

α) Την δύναμη N_2

β) Το συντελεστή τριβης του δαπέδου.



Απάντηση

α) Οριακή ισορροπία άρα $T_{στ}=\mu N_1$

$N_{2y}=N_2 ημφ$

$N_{2x}=N_2 συνφ$

$$ΣT_A=0 \Rightarrow N_2 \frac{3L}{4}=w\frac{L}{2}ημφ \Rightarrow \boxed{N_2=\frac{2}{3}wημφ} \quad (1)$$

β) $$ΣT_Γ=0 \Rightarrow N_1\frac{3L}{4}ημφ=w\frac{L}{4}ημφ+T_{στ}\frac{3L}{4}συνφ \Rightarrow$$

(αντικαθιστούμε $T_{στ}=\mu N_1$) $\boxed{3N_1ημφ=wημφ+3\mu N_1συνφ}$ (2)

$$ΣF_x=0 \Rightarrow T_{στ}=N_{2x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu N_1=N_2συνφ} \quad (3)$$

$$ΣF_y=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1+N_2ημφ=w} \quad (4)$$

(1) ^ (3) $\Rightarrow \quad \mu N_1=\frac{2}{3}wημφσυνφ \quad \Rightarrow \quad wημφ=\frac{3\mu N_1}{2συνφ}$ (5)

(2) ^ (5) $3N_1ημφ=\frac{3\mu N_1}{2συνφ}+3\mu N_1συνφ \Rightarrow \quad ημφ=\mu\left(\frac{1}{2συνφ}+συνφ\right) \quad \Rightarrow$

$$ημφ=\mu\left(\frac{2συν^2φ+1}{2συνφ}\right) \Rightarrow \quad \boxed{\mu=\frac{2ημφσυνφ}{2συν^2φ+1}}$$

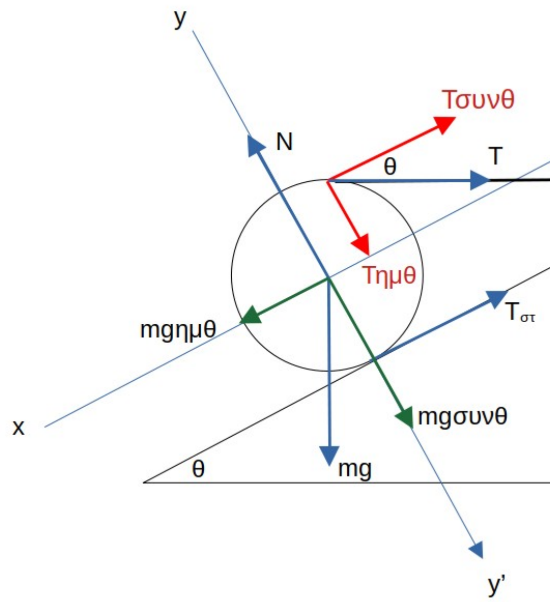
Παράδειγμα 3

Ένας τροχός μάζας M και ακτίνας R ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα με τη βοήθεια οριζόντιου νήματος AB. Να βρεθεί:

α) Το μέτρο της τάσης του νήματος

β) Να αποδείξετε οτι το μέτρο της κάθετης δύναμης στήριξης N που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στον τροχό, ισούται με το βάρος του

Απάντηση



α) Στροφική ισορροπία:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T \cdot R = T_{\sigma\tau} \cdot R \quad \Rightarrow \quad T = T_{\sigma\tau} \quad (1)$$

Μεταφορική ισορροπία x'x :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu\theta + T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\theta \quad (1) \Rightarrow \quad T\sigma\upsilon\nu\theta + T = mg\eta\mu\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{mg\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}} \quad (2)$$

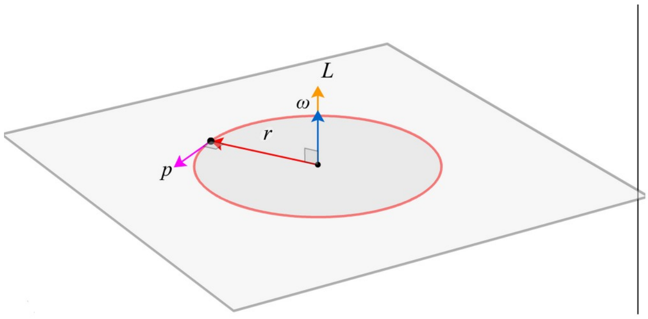
β) Μεταφορική ισορροπία y'y :

$$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow N = T\eta\mu\theta + mg\sigma\upsilon\nu\theta \quad (2) \Rightarrow \quad N = \frac{mg\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\eta\mu\theta + mg\sigma\upsilon\nu\theta \; =$$

$$\frac{mg\eta\mu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{mg\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = mg\frac{(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = mg\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = mg}$$

4.5 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

1) Στροφορμή υλικού σημείου



Ορίζουμε στροφορμή L ενός **υλικού σημείου** μάζας m ως προς ένα άξονα z΄z που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της, το **διανυσματικό μέγεθος** , που εχει:

μέτρο $L=pr=m\upsilon r$ (1)

όπου p *η ορμή του υλικού σημείου :* $p=m\upsilon$

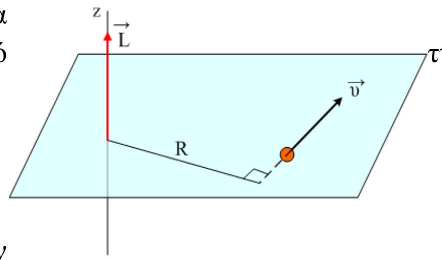
διεύθυνση αυτή του άξονας z΄z
φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Μονάδα μέτρησης στροφορμής είναι το $1\,kg\,m^2/s$.

Παρατήρηση 1
Η παραπάνω σχέση (1) μπορεί να πάρει και άλλες μορφές, χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$\upsilon=\omega r$, $\omega=2\pi f$, $f=\dfrac{1}{T}$

- $L=mur=m(\omega r)r \quad \Rightarrow \quad L=m\omega r^2$
- $L=m\omega r^2=m(2\pi f)r^2 \quad \Rightarrow \quad L=2\pi mfr^2$
- $L=2\pi mfr^2 \quad \Rightarrow \quad L=\dfrac{2\pi mr^2}{T}$

Παρατήρηση 2



Ένα υλικό σημείο έχει στροφορμή ως προς σημείο ή ως προς άξονα ακόμα και όταν κινείται ευθύγραμμα.Το μέτρο της υπολογίζεται από την εξίσωση

$$L=m\upsilon r$$

Όπου R η απόσταση του φορέα της ταχύτητας από το σημείο ή τον άξονα.

3) Στροφορμή συστήματος σωμάτων
Η ολική στροφορμή ενός συστήματος είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των στοιχείων του

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\vec{L}_2+\ldots$$

4) Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής. (Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου στη στροφική κίνηση)

α) Για ένα στερεό σώμα:

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού, ισούται με την συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που δρούν στο σώμα.

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\Sigma\vec{\tau}$$

β) για σύστημα σωμάτων

$$\Sigma\tau=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}+\Sigma\tau_{\varepsilon\sigma}=\frac{dL}{dt}$$

Όμως, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του νεύτωνα, ειναι $\Sigma\tau_{\varepsilon\sigma}=0$, αφού αυτές εμφανίζονται κατα ζεύγη αντίθετων δυνάμεων (δράση αντίδραση)

Έτσι τελικά:

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=\frac{dL}{dt}$$

5) Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

Σε ενα σώμα

Αν σε ένα στερεό σώμα η συνισταμένη των ροπών είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του σώματος διατηρείται σταθερή:

$$\Sigma\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \quad \rightarrow L_{\alpha\rho\chi}=L_{\tau\varepsilon\lambda}$$

Σε ένα σύστημα σωμάτων

*Αν σε ένα σύστημα σωμάτων, η συνισταμένη των **εξωτερικών** ροπών είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή*:

$$\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi}=\frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{\mathrm{dt}}=0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1- Διατήρηση της στροφορμής υλικού σημείου</u>

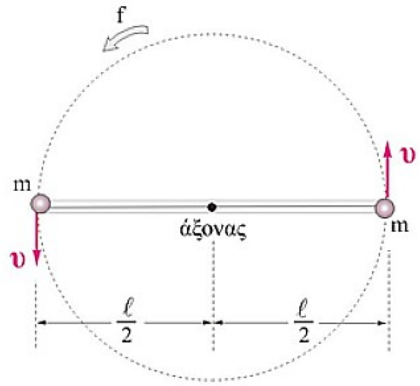
Για ένα υλικό σημείο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, άρα η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται ειναι η κεντρομόλος, η οποία δεν ασκει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$L_1=L_2\rightarrow \quad m\upsilon_1 r_1=m\upsilon_2 r_2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 - *Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου* $\frac{dL}{dt}=\Sigma_\tau$

1) Όταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σώματος:

Αν γνωρίζουμε όλες τις δυνάμεις που δρούν στο σώμα, τότε εφαρμόζουμε τη σχέση $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau$ και υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών $\Sigma_\tau = F_1\cdot d_1 + F_2\cdot d_2 + \ldots$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3

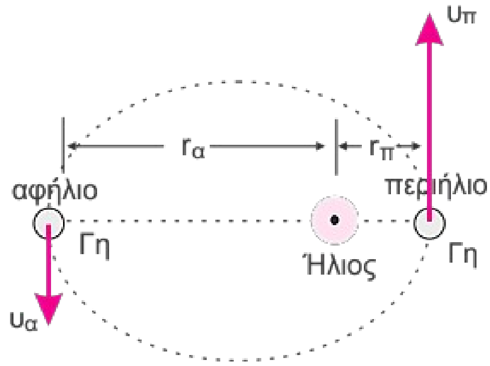
Απο τη σχέση $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau$ προκύπτει οτι η μεταβολή της στροφορμής ενός στερεού, εξαρτάται μόνο απο την συνισταμένη ροπή και απο το χρονικό διάστημα που αυτή ασκείται. Έτσι, αν σε δύο διαφορετικά στερεά ασκήσουμε την ίδια ροπή για τον ίδιο χρόνο, τότε αυτά θα υποστουν την ίδια μεταβολή στην στροφορμή τους.

Γενικότερα αν θέλουμε να συγκρίνουμε τις μεταβολές της στροφορμής δύο στερεών, τότε εφαρμόζουμε τη σχέση

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2}=\frac{\Sigma\tau_1\cdot\Delta t_1}{\Sigma\tau_2\cdot\Delta t_2}$$

Παράδειγμα 1

Η Γη στρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το κοντινότερο σημείο ονομάζεται Περιήλιο (π) και το πιο απομακρυσμένο Αφήλιο (α). Αν θεωρήσουμε τη Γη υλικό σημείο τότε για τις αντίστοιχες αποστάσεις ισχύει $r_\alpha = 2r_\pi$. Αν υ_α και υ_π οι ταχύτητες με τις οποίες η Γή περνά απο το αφήλιο και το περιήλιο αντίστοιχα, να βρείτε τους λόγους: $\frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\pi}$ και $\frac{K_\alpha}{K_\pi}$



Απάντηση:

Θεωρούμε τη Γη ως υλικό σημείο που περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς της και περνά από το κέντρο του Ήλιου. Έτσι,

$$L_\alpha = L_\pi \rightarrow m\upsilon_\alpha r_\alpha = m\upsilon_\pi r_\pi \rightarrow \upsilon_\alpha 2r_\pi = \upsilon_\pi r_\pi \rightarrow \upsilon_\pi = 2\upsilon_\alpha \Rightarrow \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\pi}=\frac{1}{2}$$

και

$$K_\pi = \frac{1}{2}m\upsilon_\pi^2 = \frac{1}{2}m(2\upsilon_\alpha)^2 = \frac{1}{2}m4\upsilon_\alpha^2 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}m\upsilon_\alpha^2\right) = 4\,\frac{K_\alpha}{K_\pi}=\frac{1}{4}$$

Παράδειγμα 2

Δύο σημειακές μεταλλικές σφαίρες από σιδηρομαγνητικό υλικό, που η καθεμιά έχει μάζα $m=0{,}05\,Kg$ είναι τοποθετημένες σε μια πλαστική κούφια αβαρή ράβδο, μήκους $\ell=1\,m$ με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε αυτή. Στο μέσον της ράβδου και εσωτερικά είναι τοποθετημένος ένας αβαρής ηλεκτρομαγνήτης τον οποίο μπορούμε να ενεργοποιούμε από απόσταση. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου όπως δείχνεται στο σχήμα (κάτοψη). Αρχικά ο ηλεκτρομαγνήτης είναι απενεργοποιημένος, το σύστημα στρέφεται με συχνότητα $f=\frac{10}{\pi}\,Hz$ και οι σφαίρες βρίσκονται στα άκρα της ράβδου συγκρατούμενες με λεπτό αβαρές νήμα που διατρέχει την κούφια ράβδο. Ενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη οπότε οι σφαίρες μετακινούνται ταυτόχρονα και πλησιάζουν σε απόσταση $\frac{\ell}{4}$ η καθεμιά από το μέσον της ράβδου , όπου και σταματούν με τη βοήθεια κατάλληλου εσωτερικού μηχανισμού.

α) Να υπολογιστεί η αρχική στροφορμή του συστήματος.

β) Να υπολογιστεί η νέα συχνότητα περιστροφής του συστήματος.

Απάντηση

Επειδή δίνεται η συχνότητα , μετασχηματίζουμε κατάλληλα τον τύπο για την στροφορμή του υλικού σημείου:

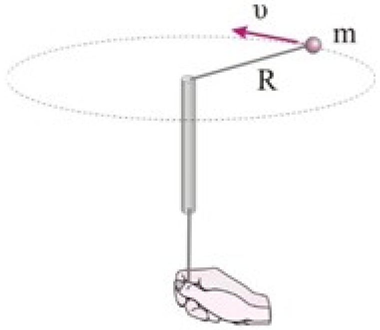
$$L=m\upsilon r=m\omega r\cdot r=m(2\pi f)r^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{L=2\pi mfr^2}$$

α) $L=2\pi mf^2=2\pi\, m\, f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2+2\pi\, m\, f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=4\pi mf\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=4\pi\, 0{,}05\,\frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad L=0{,}5\,Kgm^2/s$

β) Η δύναμη του ηλεκτρομαγνήτη δεν ασκεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

$$L'=L\Rightarrow 2\pi mf'r'^2=2\pi mf\,r^2\Rightarrow f'=f\left(\frac{r}{r'}\right)^2 \quad\Rightarrow f'=f\left(\frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{l}{4}}\right)^2\Rightarrow f'=4f \quad\Rightarrow\quad f'=\frac{40}{\pi}\,Hz$$

Παράδειγμα 3



Ένα μικρό σώμα μάζας $m=1\,kg$ κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R=1\,m$ σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι δεμένο στο άκρο ενός σχοινιού. Το σχοινί έχει αμελητέα μάζα και περνάει από μια μικρή τρύπα που υπάρχει στο τραπέζι και στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς του σώματος όπως δείχνεται στο σχήμα. Κρατώντας ακίνητο το ελεύθερο άκρο του σχοινιού, κάτω από το τραπέζι, θέτουμε το σώμα σε στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\omega_o=10\,rad/s$.

Τραβάμε σιγά σιγά, το άκρο του σχοινιού μειώνοντας την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, μέχρι αυτή να γίνει $r=0{,}5\,m$.

Να βρείτε:

α. την τελική γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

β. το έργο που δαπανήσαμε τραβώντας το σχοινί.

γ. την ελάχιστη ακτίνα κυκλικής τροχιάς που μπορεί να διαγράψει το σώμα αν το σχοινί έχει όριο θραύσης $T_{\theta\rho}=400\,N$. Δεν υπάρχουν φαινόμενα τριβών μεταξύ σχοινιού και τραπεζιού.

Απάντηση

α) Η δύναμη που δέχεται το σώμα από το σχοινί δεν ασκεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, οπότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

$$L\tau\varepsilon\lambda = L_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow m\omega_{oR}^2 = m\omega r^2 \Rightarrow \omega = \omega_o\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (1)$$

και με αντικατάσταση των τιμών στην (1) $\boldsymbol{\omega = 40\,rad/s}$.

β) ΘΜΚΕ $\quad W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\,\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\,\upsilon_o^2$

και αντικαθιστώντας $\upsilon_o = \omega_o \cdot R = 10 \cdot 1 = 10\,m/s$, $\upsilon = \omega \cdot r = 40 \cdot 0{,}5 = 20\,m/s$ έχουμε τελικά,

$$W_F = \frac{1}{2} \cdot 1\;40^2 - \frac{1}{2} \cdot 1\;10^2 = \mathbf{750\,j}$$

γ) Η τάση του νήματος λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη άρα

$T_{\theta\rho} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow T_{\theta\rho} = m\,\omega^2 r$ και αντικαθιστώντας απο την (1) $\omega = \omega_o\left(\frac{R}{r}\right)^2$, προκύπτει,

$$T_{\theta\rho} = m\,\omega_o^2\frac{R^4}{r^3} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{m\,\omega_o^2 R^4}{T_{\theta\rho}} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{1 \cdot 100 \cdot 1}{400} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 0{,}25\,m}$$