ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ
ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Επιμέλεια: Αντώνης Βουζίκης

ΜΕΡΟΣ Α' - ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΑΠΟ ΤΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1- Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ - ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Έννοια της αλληλεπίδρασης
Δυο σώματα αλληλεπιδρούν όταν ασκούν μεταξύ τους δυνάμεις.
Παραδείγματα αλληλεπίδρασης
- η έλξη μεταξύ Γης και Σελήνης,
- η έλξη μεταξύ φορτισμένων σωμάτων
- η έλξη μεταξύ μαγνήτη και καρφίτσας

Η έννοια του συστήματος
Ως σύστημα σωμάτων μπορούμε να θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σύνολο δύο ή περισσοτέρων σωμάτων ,που αυθαίρετα διαχωρίζουμε απο το περιβάλλον και τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.
Ωστόσο τα σώματα αυτά επειδή αλληλεπιδρούν και με άλλα σώματα μπορούν να ανήκουν και σε άλλα συστήματα.

Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις
εσωτερικές είναι αυτές που ασκούνται αποκλειστικά από σώματα που ανήκουν στο σύστημα σε άλλα σώματα που επίσης ανήκουν στο σύστημα
εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος , από άλλα σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα.
Μονωμένο σύστημα είναι αυτό στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν.

2- Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

ΟΡΜΗ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ
Ορίζουμε ως **ορμή** $\vec{p}$ **ενός σώματος** το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα του σώματος.

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{\upsilon}} \quad (1)$$

Η ορμή, όπως προκύπτει από τη σχέση (1), είναι μέγεθος **διανυσματικό** που έχει:
- κατεύθυνση, ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος.
- μέτρο $p=m\upsilon$
- μονάδα μέτρησης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων S.I. , το $1\,kgm/s$.

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΟΡΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ
Ορίζουμε ως **ορμή** $\vec{p}_{ολ}$ **ενός συστήματος σωμάτων** το διανυσματικό άθροισμα των ορμών όλων των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα, δηλαδή:

$$\vec{p}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\ldots$$

Πως βρίσκουμε την συνολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων στην πράξη

Περίπτωση 1η:
τα σώματα κινούνται στην ίδια διεύθυνση (συγγραμικά)

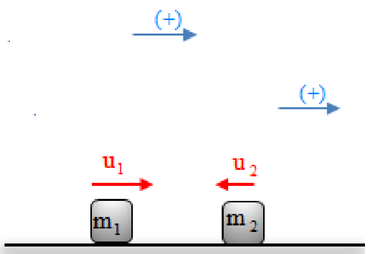
*1ος τρόπος, **χρησιμοποιώντας τα μέτρα** των ορμών και των ταχυτήτων*

Αν τα σώματα κινούνται στην ίδια κατεύθυνση (ομόρροπα)

$$\vec{p}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \rightarrow p_{ολ}=p_1+p_2 \rightarrow p_{ολ}=m_1υ_1+m_2υ_2$$

Αν τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις (αντίρροπα)

$$\vec{p}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \rightarrow p_{ολ}=p_1-p_2 \rightarrow p_{ολ}=m_1υ_1-m_2υ_2$$



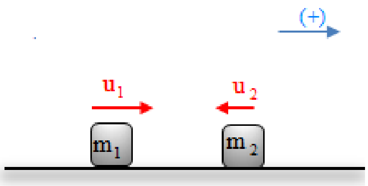
*Σε όλες τις παρακάτω σχέσεις τα σύμβολα p_1 , p_2 , $υ_1$ και $υ_2$ παριστάνουν τα **μέτρα** των αντίστοιχων μεγεθών, ενώ το αποτέλεσμα , ειναι η **αλγεβρική τιμή** της συνολικής ορμής, δηλαδή το πρόσημο μας δείχνει τη φορά.*

<u>*2ος τρόπος, **χρησιμοποιώντας τις αλγεβρικές τιμές** των ταχυτήτων:*</u>
Είτε τα σώματα κινούνται ομόρροπα είτε αντίρροπα , η συνολική ορμή γράφεται:

$$\vec{p}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \rightarrow p_{ολ}=p_1+p_2 \rightarrow p_{ολ}=m_1υ_1+m_2υ_2$$

*Στην παραπάνω σχέση τα σύμβολα p_1 , p_2 , $υ_1$ και $υ_2$ παριστάνουν τις **αλγεβρικές τιμές** των αντίστοιχων μεγεθών. Δηλαδή όταν αντικαθιστούμε τις τιμές των ταχυτήτων βάζουμε και τα αντίστοιχα πρόσημα, αφού ορίσουμε μια θετική φορά. Το αποτέλεσμα ειναι η αλγεβρική τιμή της συνολικής ορμής.*

Παράδειγμα: Δύο σώματα μάζας $m_1=2\,Kg$ και $m_2=3\,Kg$ κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα μέτρα των ταχυτήτων τους είναι $υ_1=5\,m/s$ και $υ_2=4\,m/s$. Να βρείτε την συνολική ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων.



Απάντηση
Ορίζουμε θετική φορά όπως στο σχήμα.

Α΄ τρόπος (με τα μέτρα των ορμών και ταχυτήτων)

$$\vec{P}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \Rightarrow P_{ολ}=p_1-p_2=m_1υ_1-m_2υ_2=2\cdot5-3\cdot4=10-12=-2\,Kgm/s$$

Β΄ τρόπος (με αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων)

$$\vec{P}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \Rightarrow P_{ολ}=p_1+p_2=m_1υ_1+m_2υ_2=2\cdot5+3\cdot(-4)=10-12=-2\,Kgm/s$$

Και στους δύο παραπάνω τρόπους το αποτέλεσμα -2 Kgm/s , σημαίνει οτι η φορά της συνολικης ορμής είναι ίδια με την φορά της ταχύτητας $υ_2$.

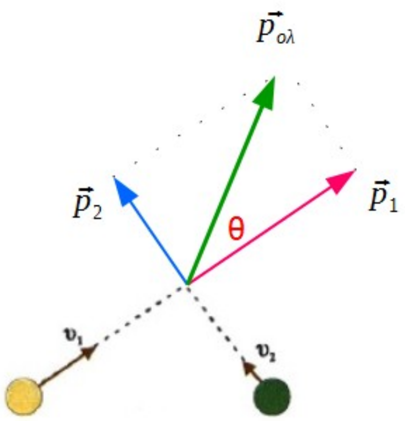
Περίπτωση 2η:
οι ταχύτητες των σωμάτων είναι κάθετες

Για να βρούμε την συνολική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων που κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις , προσθέτουμε διανυσματικά τις δυο **κάθετες** ορμές, με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

$$\vec{p}_{ολ}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \rightarrow$$

μέτρο της συνολικής ορμής: (απο το πυθαγόρειο θεώρημα)

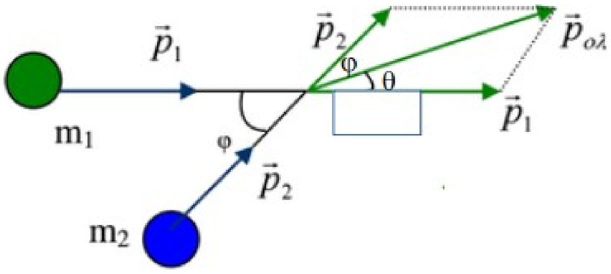
$$p_{ολ}=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$$



και **κατεύθυνση** της συνολικής ορμής $\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2}{p_1}$

Περίπτωση 3η:
οι ταχύτητες των σωμάτων σχηματίζουν γωνία $\hat{\varphi} \neq 90^o$

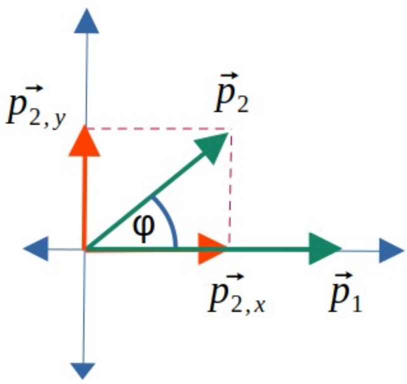
Για να βρούμε την συνολική ορμή ενός συστήματος **δύο σωμάτων** που κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνία $\hat{\varphi}$, προσθέτουμε διανυσματικά τις δυο ορμές, με τον κανόνα του παραλληλογράμμου και τη βοήθεια του νόμου συνιμητόνων:



$$\vec{p}_{ο\lambda} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \rightarrow p_{ο\lambda} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2 \eta\mu\varphi}{p_1 + p_2 \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Εναλλακτικά:



Ορίζουμε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων με τον άξονα x΄x στη διεύθυνση της ορμής $\vec{p}_1$.
Αναλύουμε την ορμή $\vec{p}_2$ σε συνιστώσες $\vec{p}_{2,x}$ και $\vec{p}_{2,y}$

$p_{2x} = p_2 \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $p_{2,y} = p_2 \eta\mu\varphi$

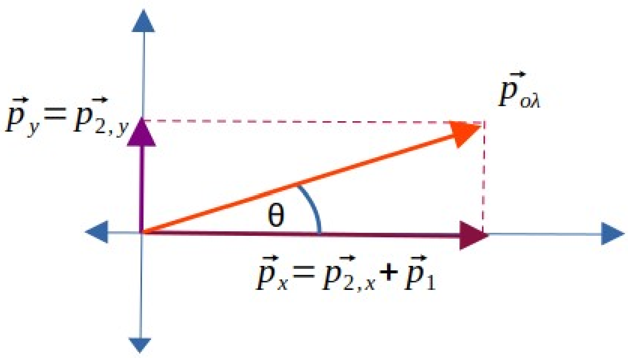
Βρίσκουμε τη συνισταμένη στον άξονα x΄x:

$$\vec{p}_x = \vec{p}_{2,x} + \vec{p}_1$$

Βρίσκουμε τη συνισταμένη στον άξονα y΄y:

$$\vec{p}_y = \vec{p}_{2,y}$$

Βρίσκουμε τη συνισταμένη ορμή $p_{ο\lambda} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$



ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Μεταβολή ορμής ενός σώματος είναι η διανυσματική διαφορά

$$\Delta\vec{p}=\vec{p}_{τελ}-\vec{p}_{αρχ}$$

Η μεταβολή της ορμής είναι διάνυσμα και άρα για να την υπολογίσουμε πρέπει να βρίσκουμε **το μέτρο** και **την κατεύθυνσή** του.

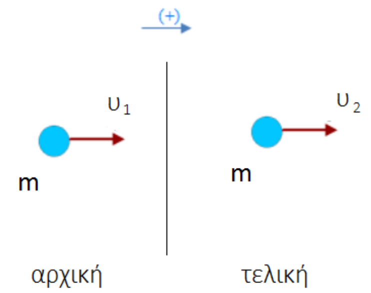
Περιπτώσεις υπολογισμού μεταβολής της ορμής

Α) Όταν αρχική και τελική ορμή έχουν την ίδια διεύθυνση.

Γα να βρούμε τη μεταβολή της ορμής (αλγεβρική τιμή) **ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα,** αφού επιλέξουμε μια θετική φορά της επιλογής μας) , **σχηματίζουμε τη διαφορά:**

αλγεβρική τιμή τελικής ορμής - αλγεβρική τιμή αρχικής ορμής = $(p_{τελ})$ - $(p_{αρχ})$

$$\Delta p=p_{τελ}-p_{αρχ}$$

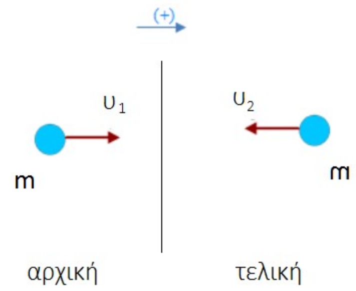


*α1) αρχική και τελική ορμή **ομόρροπα** διανύσματα.*

$p_{αρχ}=mυ_1$ $p_{τελ}=mυ_2$

και $\Delta p=p_{τελ}-p_{αρχ}=mυ_2-mυ_1$

το πρόσημο του Δp καθορίζει και τη φορά του.



α2) *αρχική και τελική ορμή **αντίρροπα** διανύσματα.*

$p_{αρχ}=mυ_1$ $p_{τελ}=-mυ_2$

$\Delta p=p_{τελ}-p_{αρχ}=-mυ_2-mυ_1$

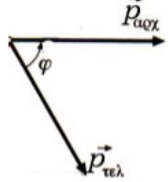
Β) όταν αρχική και τελική ορμή είναι διανύσματα που σχηματίζουν γωνία,

μετατρέπουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση, ως εξής:

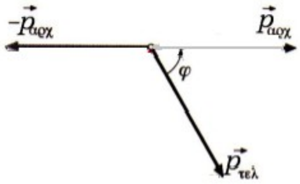
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ}-\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}+(-\vec{p}_{αρχ})$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

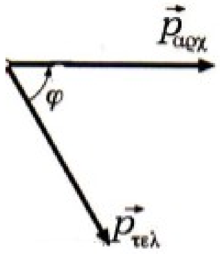
- Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{p}_{αρχ}$, $\vec{p}_{τελ}$ με κοινή αρχή.,

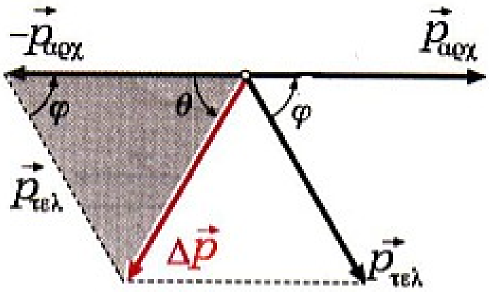


- Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $-\vec{p}_{αρχ}$



1. Προσθέτουμε διανυσματικά τα $\vec{p}_{τελ}$ και $-\vec{p}_{αρχ}$, με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.





Για το μέτρο του διανύσματος $\Delta\vec{p}$:

$$\Delta p=\sqrt{p_{αρχ}^2+p_{τελ}^2+2\,p_{τελ}\,p_{αρχ}\,συν(180-φ)}$$

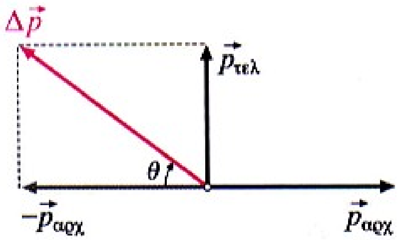
ή

$$\boxed{\Delta p=\sqrt{p_{αρχ}^2+p_{τελ}^2-2\,p_{τελ}\,p_{αρχ}\,συνφ}}$$

Νόμος ημιτόνων στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο: $\dfrac{ημθ}{P_{τελ}}=\dfrac{ημφ}{Δp}\rightarrow ημθ=\dfrac{P_{τελ}}{Δp}ημφ$

Ειδική περίπτωση: η αρχική και τελική ορμή είναι κάθετες μεταξύ τους.

- Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{p}_{αρχ}$, $\vec{p}_{τελ}$ με κοινή αρχή.
- Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $-\vec{p}_{αρχ}$
- Προσθέτουμε διανυσματικά τα $\vec{p}_{τελ}$ και $-\vec{p}_{αρχ}$



Έτσι:

διανυσματικά $\Delta\vec{p}=\vec{p}_{τελ}-\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}+(-\vec{p}_{αρχ})$

ενώ το μέτρο της μεταβολής είναι: $\boxed{\Delta p=\sqrt{p_{τελ}^2+p_{αρχ}^2}}$ και $\boxed{εφθ=\dfrac{p_{τελ}}{p_{αρχ}}}$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος, ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που αυτό δέχεται:

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \Sigma F = m\vec{\alpha}}$$

Παρατήρηση:
Όταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της ορμής διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η
Όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι σταθερός (δηλαδή στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη και κινείται με σταθερή επιτάζυνση) τότε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t}$$

Περίπτωση 2η
Όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι μεταβαλλόμενος (στο σώμα δεν ασκείται σταθερή δύναμη) τότε:
α) η **μέση τιμή** του μέτρου του ρυθμού μεταβολής δίνεται από την παραπάνω σχέση

$$\frac{|\Delta P|}{\Delta t} = \frac{|P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi}|}{\Delta t}$$

β) ενώ η **στιγμιαία τιμή** βρίσκεται από τη συνισταμένη δύναμη, $\boxed{\frac{\Delta P}{\Delta t} = \Sigma F = m\alpha}$ η οποία υπολογίζεται

είτε άμεσα απο το ΣF , είτε από το γινόμενο $m\alpha$.

Η ΟΡΜΗ ΚΑΙ Η ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$$K = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \Rightarrow 2Km = m^2 \upsilon^2 \Rightarrow 2Km = p^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{p^2}{2m}}$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα αυτοκίνητο, μάζας 1000 kg, κινείται ευθύγραμμα κατά τη θετική φορά του άξονα x'x, με ταχύτητα 20 m/s. Το αυτοκίνητο επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό και σταματάει σε 5 s.

Α. Η μεταβολή της ορμής του (στο SI) είναι

α. - 4000 **β.** +20000 **γ.** - 20000 **δ.** +40000

Β. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του (στο SI) είναι

α. - 4000 **β.** +20000 **γ.** - 20000 **δ.** +40000

2. Μια μπάλα, κινούμενη κατά τη θετική φορά του άξονα y'y, πέφτει κατακόρυφα σε οριζόντιο έδαφος με ορμή 10 kg·m/s. Η κρούση θεωρείται ελαστική και διαρκεί 0,2 s.

Α. Η μεταβολή της ορμής της (στο SI) είναι

α. - 20 **β.** - 10 **γ.** +20 **δ.** +10

Β. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της (στο SI) είναι

α. - 200 **β.** - 100 **γ.** +200 **δ.** +100

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

1. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος σταθερής μάζας είναι ανάλογη του τετραγώνου της ορμής του.

2. Ένα ποδήλατο κάνει το γύρο μιας κυκλικής πλατείας με ταχύτητα 10 m/s. Κατά την κίνηση:
α. Η ορμή του ποδηλάτου είναι σταθερή.
β. Η ταχύτητα του ποδηλάτου μεταβάλλεται.

3. Όταν σ' ένα σώμα ασκείται σταθερή δύναμη, τότε
α. η ταχύτητά του διατηρείται σταθερή.
β. η ορμή του διατηρείται σταθερή.
γ. ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του διατηρείται σταθερός.
δ. ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του διατηρείται σταθερός.

4. Το μέτρο της ορμής ενός σώματος που κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, διατηρείται συνεχώς σταθερό.
5. Η ορμή ενός υλικού σημείου είναι πάντα ομόρροπη με την επιτάχυνσή του.
6. Σ' ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, η ορμή κάθε σώματος παραμένει σταθερή.
7. Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει, ανεξάρτητα από το αν οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων που αποτελούν το μονωμένο σύστημα είναι συντηρητικές ή όχι.
8. Η ορμή ενός υλικού σημείου είναι ομόρροπη με την ταχύτητά του.
9. Ένα βλήμα που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω διασπάται με έκρηξη σε δύο τμήματα στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του. Τη στιγμή της έκρηξης η συνολική ορμή του συστήματος των δύο τμημάτων είναι ίση με μηδέν.

Εφαρμογές θεωρίας (2^o θέμα)

1. Δύο αυτοκίνητα κινούνται με ταχύτητες μέτρου 60 km/h. Ποια άλλα δεδομένα χρειαζόσαστε, για να συμπεράνετε αν οι ορμές τους είναι ίσες;

2. Ένα αυτοκίνητο μάζας 1 tn κινείται με ταχύτητα 72 km/h. Κάποια στιγμή προσκρούει σε τοίχο και σταματάει. Αν η διάρκεια της σύγκρουσης είναι 0,2 s, να βρείτε
α. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του.
β. το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε στον τοίχο.
[Απ. (α) 20.000 kg·m/s, (β) 100.000 N]

5. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις
α. ταχύτητας-χρόνου. **β.** Ορμής-χρόνου. **γ.** δύναμης-χρόνου.

6. Η ορμή ενός σώματος μεταβάλλεται από 7 kg·m/s σε 10 kg·m/s, σε χρόνο 2 s. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του (στο SI) είναι:
α. 1,5 **β.** 3 **γ.** 0,6 **δ.** 2
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

7. Ένα βλήμα εκτοξεύεται από ακίνητο όπλο με ορμή μέτρου 100 kg·m/s. Εξ αιτίας της ανάκρουσης η ορμή του όπλου, αμέσως μετά την εκπυρσοκρότηση, θα έχει μέτρο
α. 100 kg·m/s
β. μεγαλύτερο από 100 kg·m/s
γ. μικρότερο από 100 kg·m/s
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

8. Μπορεί ένα σώμα να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή; Μπορεί να έχει ορμή χωρίς να έχει κινητική ενέργεια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

9. Μπορεί ένα σύστημα σωμάτων να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή; Μπορεί να έχει ορμή χωρίς να έχει κινητική ενέργεια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Ένα ελαφρύ και ένα βαρύ αυτοκίνητο κινούνται, έχοντας την ίδια ορμή. Για ποιο από τα δυο θα ξοδέψουμε περισσότερη ενέργεια για να το σταματήσουμε;

11. Μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια ή η ορμή ενός σώματος που κάνει ομαλή κυκλική κίνηση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

12. Ποιες δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων λέγονται εσωτερικές και ποιες εξωτερικές; Πότε ένα σύστημα σωμάτων λέγεται μονωμένο;

13. Να διατυπώσετε την αρχή διατήρησης της ορμής. Χρησιμοποιώντας τον τρίτο νόμο του Newton να δείξετε ότι, κατά την κρούση δύο σωμάτων, η συνολική μεταβολή της ορμής του συστήματος των σωμάτων είναι ίση με μηδέν.

32. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και εφάπτονται στα άκρα ελατηρίου που συγκρατούμε συσπειρωμένο. Αφήνουμε το ελατήριο να αποσυσπειρωθεί. Να δείξετε ότι, όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων είναι αντιστρόφως ανάλογος με το λόγο των κινητικών τους ενεργειών.

33. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας σώματος, σταθερής μάζας, σε συνάρτηση με την ορμή του.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Πύραυλος κινείται στο διάστημα με ταχύτητα $υ_0$ = 4000 m/s. Με κατάλληλη εκρηκτική διάταξη διασπάται σε δύο ίσα μέρη που εξακολουθούν να κινούνται στην ίδια διεύθυνση. Με πόση ταχύτητα $υ_2$ θα κινηθεί το ένα μέρος του πυραύλου, αν το άλλο κινείται κατά την αρχική φορά με ταχύτητα
α. $υ_1$ = 2000 m/s **β.** $υ_1$ = 8000 m/s **γ.** $υ_1$ = 10000 m/s
[Απ. (α) 6000 m/s, (β) 0, (γ) – 2000 M m/s]

2. Από ύψος H = 1,8 m πάνω από οριζόντιο δάπεδο εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω, με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 8 m/s, μεταλλική σφαίρα μάζας m = 1 kg. Η σφαίρα, αφού προσκρούσει στο δάπεδο, αναστρέφει την κίνησή της με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 6 m/s. Η διάρκεια επαφής σφαίρας - δαπέδου είναι ίση με Δt = 0,1 s. Να βρείτε:
α. το μέτρο της ορμής της σφαίρας, τη στιγμή που φθάνει στο δάπεδο.
β. το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε από το δάπεδο στη σφαίρα.
Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

[Απ. (α) 10 kg·m/s, (β) 170 N]

3. Ένας σωλήνας κάμπτεται κατά ορθή γωνία. Μέσα στο σωλήνα κινείται μικρή σφαίρα μάζας m = 0,1 kg. Η ταχύτητα της σφαίρας πριν από τη στροφή είναι $υ_1$ = 40 m/s και μετά τη στροφή γίνεται $υ_2$ = 30 m/s. Αν η στροφή διαρκεί Δt = 0,01 s, να βρείτε τη μέση δύναμη που ασκεί ο σωλήνας στη σφαίρα.

[Απ. 500 N, εφφ = 4/3]

4. Ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα $υ_0$ = 100 m/s. Το βλήμα σε χρόνο 2 s μετά την εκτόξευσή του διασπάται με έκρηξη σε δύο ίσα κομμάτια από τα οποία το ένα συνεχίζει προς τα πάνω και φτάνει σε ύψος h = 5 m από το σημείο της έκρηξης. Να βρείτε τις ταχύτητες των θραυσμάτων αμέσως μετά την έκρηξη. Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

[Απ. 10 m/s, 150 m/s]

5. Άνθρωπος μάζας 80 kg στέκεται σε παγωμένη λίμνη και πετάει οριζόντια μια μπάλα μάζας 4 kg με ταχύτητα 8 m/s. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ των παπουτσιών του ανθρώπου και του πάγου είναι 0,01, να βρείτε

α. σε πόσο χρόνο ο άνθρωπος θα σταματήσει.

β. πόσο διάστημα θα έχει διατρέξει μέχρι να σταματήσει.

[Απ. (α) 4 s, (β) 0,8 m]

6. Μία μπάλα μάζας m = 0,4 kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x, με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 5 m/s. Η μπάλα συγκρούεται με τοίχο και αντιστρέφει την κίνησή της με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 4 m/s. Να βρείτε

α. τη μεταβολή της ορμής της μπάλας.

β. τη μέση δύναμη που ασκείται στη μπάλα από τον τοίχο, αν η επαφή μπάλας -τοίχου διαρκεί Δt = 5 ms.

[Απ. (α) - 3,6 kg·m/s, (β) - 720 N]

7. Σώμα μάζας m = 1 kg κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x, με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 4 m/s. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F = 30 N, για χρονικό διάστημα Δt = 0,1 s, κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα y'y. Να βρείτε

α. την τελική ορμή του σώματος.

β. την ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα μέσω του έργου της F .

[Απ. (α) 5 kg·m/s, εφθ = 3/4, (β) 4,5 J]

8. Σώμα μάζας m = 6 kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x, με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 10 m/s. Κάποια στιγμή διασπάται, λόγω εσωτερικής αιτίας, σε δύο κομμάτια Α και Β. Το κομμάτι Α, μάζας m_1 = 4 kg, εκτοξεύεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 12 m/s. Να βρείτε

α. την ταχύτητα του κομματιού Β.

β. πόση ενέργεια από αυτή που ελευθερώθηκε από την έκρηξη, μεταφέρθηκε στα κομμάτια Α και Β με τη μορφή κινητικής ενέργειας.

γ. την ώθηση που ασκήθηκε στο κομμάτι Β εξαιτίας της έκρηξης.

[Απ. (α) 6 m/s, (β) 24 J, (γ) - 8 N·s]

9. Βόμβα, που είναι ακίνητη πάνω σε οριζόντιο έδαφος, πυροδοτείται και χωρίζεται σε δύο κομμάτια Α και Β που έχουν μάζες 2 kg και 1 kg αντίστοιχα. Το κομμάτι Α κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και φτάνει σε ύψος h = 100 m, ενώ το κομμάτι Β εισχωρεί στο έδαφος σε βάθος s = 1 m. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της δύναμης που άσκησε το έδαφος στο κομμάτι Β. Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

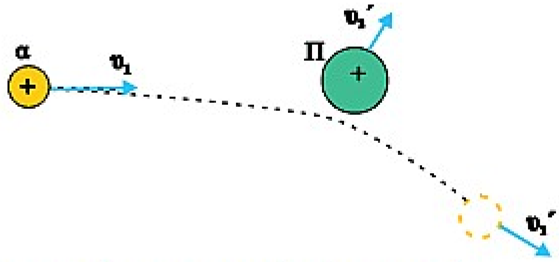
[Απ. 4.010 N]

1. ΜΕΡΟΣ Β΄ - ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Ονομάζουμε κρούση το φαινόμενο κατά το οποίο δύο ή περισσότερα σώματα αλληλεπιδρούν για ελάχιστο χρόνο με πολύ ισχυρές δυνάμεις με αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή στην κινητική κατάσταση τουλάχιστον ενός απο αυτά.

Στο μικρόκοσμο, η κρούση δεν είναι απαραίτητο να αναφέρεται σε σύγκρουση (επαφή) των σωμάτων. Για παράδειγμα όταν ένα σωματίδιο α (πυρήνας He) κινείται προς ένα άλλο πυρήνα (Π), οι αλληλεπιδράσεις τους, που είναι πολύ ασθενείς όταν βρίσκονται μακριά, γίνονται πολύ ισχυρές όταν τα σωματίδια πλησιάσουν με αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή στην κινητική τους κατάσταση.

Τα σωματίδια ποτέ δεν έρχονται σε επαφή, όμως θεωρούμε ότι έχουμε κρούση, που στην περίπτωση



Κρούση ενός σωματίου α, με αρχικά ακίνητο πυρήνα.

αυτή ονομάζεται **σκέδαση** .

Η Διατήρηση της Ορμής Στην Κρούση

Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο χρόνο, οι εξωτερικές δυνάμεις (αν υπάρχουν) προκαλούν αμελητέες μεταβολές ορμής κατά την κρούση. Έτσι το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί **μονωμένο**, **επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται**.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{p}_{,αρχ} = \vec{p}_{,τελ}$$

Για δύο σώματα, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1{}' + \vec{P}_2{}' \quad \rightarrow \quad \vec{P}_1 - \vec{P}_1{}' = \vec{P}_2{}' - \vec{P}_2$$

$$\text{ή} \quad -\Delta\vec{P}_1 = \Delta\vec{P}_2$$

Δηλαδή οι μεταβολές της ορμής κάθε σώματος είναι αντίθετες.

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει, όταν ζητείται η μεταβολή της ορμής ενός από τα δύο σώματα που συγκρούονται, εμείς να βρίσκουμε τη μεταβολή εκείνου που είναι πιο εύκολο να βρεθεί.

Η Μηχανική ενέργειας στην κρούση

Με δεδομένο ότι η χρονική διάρκεια μιας κρούσης είναι πολύ μικρή, θεωρούμε ότι πρακτικά η κρούση δύο σωμάτων συμβαίνει σε ένα σημείο του χώρου και τα σώματα δεν μετακινούνται κατά τη διάρκεια της. Έτσι η δυναμική ενέργεια των σωμάτων παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Έτσι, στις κρούσεις όταν αναφερόμαστε σε απώλεια ή διατήριση μηχανικής ενέργειας εννοούμε πάντα , μόνον την κινητική ενέργεια.

Είδη κρούσεων

1. Με κριτήριο την ενέργεια, διακρίνουμε τις κρούσεις σε:

α) Ανελαστική

ονομάζεται η κρούση κατα την οποία ένα μέρος της αρχικής μηχανικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Ισχύει:

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} + Q$$

για σύστημα δύο σωμάτων

$$\boldsymbol{K_{1,αρχ} + K_{2,αρχ} = K_{1,τελ} + K_{2,τελ} + Q}$$

β) Πλαστική

είναι μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων , στη δημιουργία συσσωματώματος. Ισχύει:

$$\boldsymbol{K_{1,αρχ} + K_{2,αρχ} = K_{συσ,τελ} + Q}$$

γ) Ελαστική

ονομάζεται η κρούση κατά την οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή. Τα σώματα παραμορφώνονται κατα την κρούση , επανέρχονται όμως στην αρχική τους μορφή χωρίς απώλειες ενέργειας.

Ισχύει:

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)}$$

ή για σύστημα δύο σωμάτων

$$K_{1,αρχ} + K_{2,αρχ} = K_{1,τελ} + K_{2,τελ}$$

Πόρισμα:

Στην ελαστική κρούση ισχύει η διατήρηση της κινητικής ενέργειας άρα:

$$\boldsymbol{K_{1,αρχ} + K_{2,αρχ} = K_{1,τελ} + K_{2,τελ}} \Rightarrow$$

ή $$\boldsymbol{K_{1,αρχ} - K_{1,τελ} = K_{2,τελ} - K_{2,αρχ}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{ΔK_1 = -ΔK_2}$$

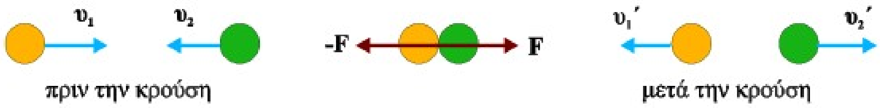
ή $$\frac{ΔK_1}{ΔK_2} = -1$$

δηλαδή: οι μεταβολές των κινητικών ενεργειών των σωμάτων είναι αντίθετες ή η αύξηση της κινητικής ενέργειας του ενός σώματος ισούται με την μείωση της κινητικής ενέργειας του άλλου.

2. Με κριτήριο τις διευθύνσεις που κινούνται τα σώματα πριν συγκρουστούν, διακρίνουμε τις κρούσεις σε:

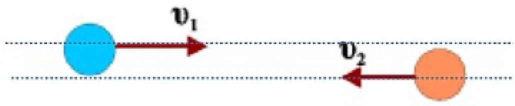
- ***Κεντρική**, **(ή μετωπική) κρούση***

ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία



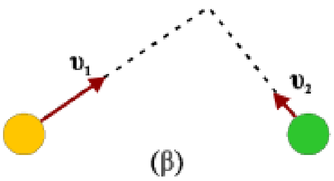
- ***Έκκεντρη κρούση***

ονομάζεται η κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες



- ***Πλάγια κρούση***

ονομάζεται η κρούση, όταν οι ταχύτητες των σωμάτων βρίσκονται σε τυχαίες διευθύνσεις.

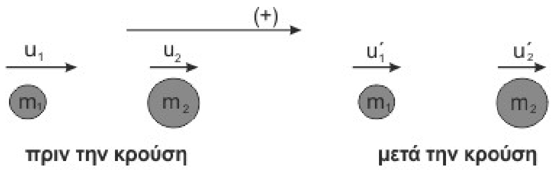


(β)

ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Στην ανελαστική κρούση, πάντα δίνεται η ταχύτητα του ενός σώματος μετά την κρούση, ή κάποια δεδομένα για να βρούμε μία από τις ταχύτητες υ_1' ή υ_2'.

- **Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. ως εξής:**



$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2 \;=\; m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'$$

Στην παραπάνω σχέση οι τιμές των ταχυτήτων είναι οι αλγεβρικές και όχι τα μέτρα τους.

- *Κατά την ανελαστική κρούση έχουμε* ***απώλεια κινητικής ενέργειας:***

$$|\Delta K|=K_{αρχ}-K_{τελ}=\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2\right)$$

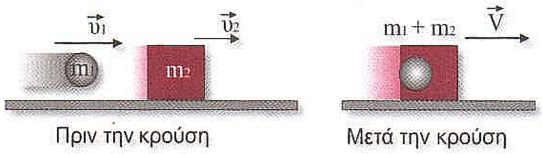
- *Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος βρίσκεται αντίστοιχα:*

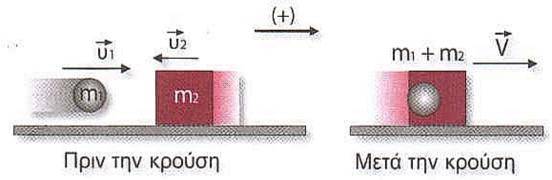
$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1 \upsilon'_1 - m_1 \upsilon_1 \quad \text{και} \quad \Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2 \upsilon_2' - m_2 \upsilon_2$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι ταχύτητες ειναι αλγεβρικές τιμές, δηλαδή αντικαθίστανται με τα πρόσημά τους.

ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Η πλαστική κρούση είναι μία ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης, στην οποία τα δύο σώματα συγκολώνραι και δημιουργούν συσσωμάτωμα.





- **Για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος, εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής:**

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$$

$$m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow \quad V = \frac{m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Στην παραπάνω σχέση , αντικαθιστούμε τις ταχύτητες με τις αλγεβρικές τους τιμές, όπως αυτές καθορίζονται από την θετική φορά που ορίσαμε.

- *Κατά την πλαστική κρούση έχουμε* ***απώλεια κινητικής ενέργειας η οποία εκλύεται ως θερμότητα*** $(|\Delta K| = Q)$ ***και ισχύει:***

$$Q = |\Delta K| = K_{αρχ} - K_{τελ} = \left(\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

- *Η μεταβολή της ορμής* ***κάθε σώματος*** *βρίσκεται αντίστοιχα:*

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1 V - m_1 \upsilon_1$$

$$\text{και} \quad \Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2 V - m_2 \upsilon_2$$

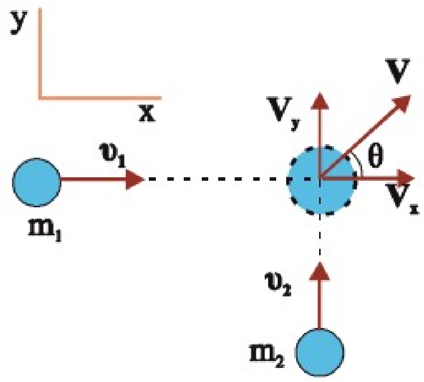
δηλαδή παρόλη τη δημιουργία συσσωματώματος, θεωρούμε ματά την κρούση, κάθε σώμα ξεχωριστά να κινείται με ταχύτητα V.

ΠΛΑΓΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Στην πλάγια κρούση στην οποία δημιουργείται συσσωμάτωμα, εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής σε κάθε άξονα ξεχωριστά.

Παράδειγμα: Δύο σώματα με μάζες m_1= 2 kg και m_2= 3 kg κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες $υ_1$= 10 m/s και $υ_2$= 5 m/s και κάποια στιγμή συγκρούονται πλαστικά. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται από την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων (μέτρο και κατεύθυνση).

Λύση



Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ σε κάθε άξονα ξεχωριστά:

$$p=p' \rightarrow \begin{array}{l} p_x=p_x' \\ p_y=p_y' \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} m_1 υ_1=(m_1+m_2)V_x & (1) \\ m_2 υ_2=(m_1+m_2)V_y & (2) \end{array}$$

οπότε

από την (1) βρίσκουμε: $V_x=\frac{m_1}{(m_1+m_2)}υ_1=4m/s$

από την (2) βρίσκουμε: $V_y=\frac{m_2}{(m_1+m_2)}υ_2=3m/s$

και τελικά $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5m/s$ ενώ $εφθ=\frac{V_y}{V_x}=\frac{3}{4}$

Παρατήρηση

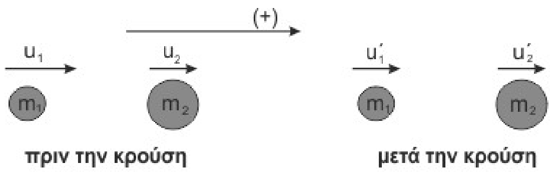
Αν θέλουμε να βρούμε μόνο το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος, στην παραπάνω περίπτωση που οι ταχύτητες των δύο σωμάτων ειναι κάθετες, μπορούμε να εργαστούμε όπως παρακάτω:

$$P_{τελ}=P_{αρχ}\Rightarrow(m_1+m_2)V=\sqrt{(m_1υ_1)^2+(m_2υ_2)^2} \quad \Rightarrow \quad V=\frac{\sqrt{(m_1υ_1)^2+(m_2υ_2)^2}}{m_1+m_2}$$

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Γενική περίπτωση

Δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 που κινούνται με ταχύτητες υ_1 και υ_2 που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.



Ισχύει η Α.Δ.Ο. αλλά και η διατήρηση της Κινητικής ενέργειας.

$$\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ} \quad \text{και} \quad K_{1,αρχ}+K_{2,αρχ}=K_{1,τελ}+K_{2,τελ}$$

Τελικά προκύπτει ότι: (η απόδειξη στο σχολικό βιβλίο)

$$\vec{\upsilon}_1'=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_2+\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_1 \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_1+\frac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ*: στους παραπάνω τύπους, αντικαθιστούμε τα διανύσματα των ταχυτήτων με τις αλγεβρικές τους τιμές δηλαδή με τα μέτρα των ταχυτήτων μαζί* ***με το πρόσημό τους.***

Ειδικές περιπτώσεις

i) Το ένα σώμα αρχικά ακίνητο ($\upsilon_2 = 0$)

οι σχέσεις γίνονται:

$$\vec{\upsilon}_1'=\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_1 \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_1$$

ii) Τα σώματα έχουν ίσες μάζες

Ισχύει:

$$\boldsymbol{\upsilon_1'=\upsilon_2} \quad \textbf{και} \quad \boldsymbol{\upsilon_2'=\upsilon_1}$$

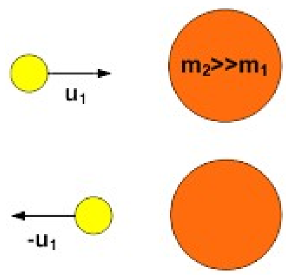
δηλαδή τα σώματα **ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους.**

iii) Σώμα πολύ μικρής μάζας m, πέφτει με ταχύτητα υ πάνω σε ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας M

τότε $\upsilon_1'=-\upsilon$ ***και*** $\upsilon_2'=0$

Δηλαδή: το μικρό σώμα ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου ενώ το πολύ μεγάλο σώμα παραμένει πρακτικά ακίνητο.

Απόδειξη: επειδή m << M θεωρούμε οτι $\frac{m}{M}\rightarrow 0$,έτσι:



$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon = \frac{\frac{m}{M}-\frac{M}{M}}{\frac{m}{M}+\frac{M}{M}}\upsilon = \frac{0-1}{0+1}\upsilon = -\upsilon$$

και $$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon = \frac{2\frac{m}{M}}{\frac{m}{M}+\frac{M}{M}}\upsilon = \frac{2\cdot 0}{0+1}\upsilon = 0\cdot\upsilon = 0$$

Εφαρμογή:
Να δείξετε οτι μετα την κρούση, η ορμή του αρχικά ακίνητου σώματος πολύ μεγάλης μάζας, ειναι διπλάσια απο την αρχική ορμή του σώματος μικρής μάζας m.

Απάντηση:
Για την ταχύτητα του αρχικά ακίνητου σώματος πολύ μεγάλης μάζας ισχύει (αφού m αμελητέο)

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon = \frac{2m}{M}\upsilon$$

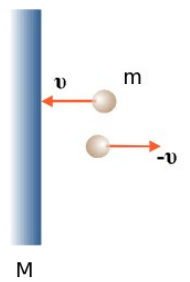
άρα για την ορμή του ισχύει

$$P_2' = M\cdot\upsilon_2' = M\cdot 2\frac{m}{M}\upsilon = 2m\upsilon = 2p_1$$

δηλαδή η ορμή του αρχικά ακίνητου σώματος πολύ μεγάλης μάζας μετά την κρούση είναι διπλάσια από την αρχική ορμή του σώματος πολύ μικρής μάζας.

Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζει η ελαστική κρούση μίας σφαίρας με ακλόνητο εμπόδιο, όπως ένας τοίχος, αν η σφαίρα προσκρούει με ταχύτητα κάθετη στην επιφάνεια του τοίχου.

Δηλαδή αν το σώμα προσκρούσει σε ελαστικό τοίχο με ταχύτητα μέτρου υ, επιστρέφει με ταχύτητα ίσου μέτρου δηλαδή μα ταχύτητα -υ.



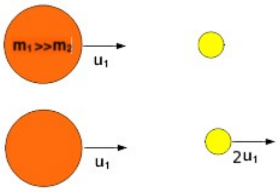
Εφαρμογή:
Σώμα πολύ μεγάλης μάζας $m_1 >> m_2$ πέφτει με ταχύτητα υ_1 πάνω σε **ακίνητο** σώμα μάζας m_2. Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση:

Απάντηση:
αφού $m_1 \gg m_2$ τότε $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$.Εφαρμόζουμε τους τύπους για κινούμενο και ακινητο σώμα:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{\frac{m_1}{m_1}-\frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}\upsilon_1 = \frac{1-0}{1+0}\upsilon_1 = \upsilon_1$$

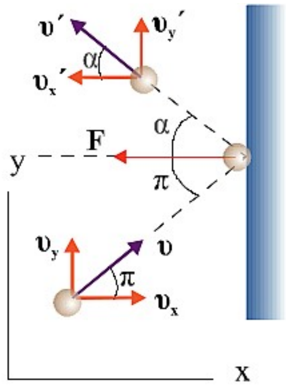
Δηλαδή το σώμα πολύ μεγάλης μάζας m_1 συνεχίζει ανεπηρέαστο την πορεία του, ενώ $\upsilon'_2=\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{2\frac{m_1}{m_1}\upsilon_1}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}\upsilon_1=\frac{2\upsilon_1}{1+0}=2\upsilon_1$

δηλαδή το αρχικά ακίνητο σώμα πολύ μικρής μάζας, εκτοξεύεται με ταχύτητα διπλάσια της υ_1.



v) πλάγια ελαστική κρούση σε (λείο) επίπεδο τοίχο.

Αναλύουμε την ταχύτητά της σε δύο συνιστώσες, τη μία υ_x κάθετη στον τοίχο και την άλλη υ_y παράλληλη με αυτόν .



Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της

$$\upsilon'_x=-\upsilon_x$$

Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα κατά την κρούση είναι κάθετη στον τοίχο, άρα η y συνιστώσα της ταχύτητας δε μεταβάλλεται

$$\upsilon'_y=\upsilon_y$$

Το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση είναι $\upsilon'=\sqrt{\upsilon'^2_x+\upsilon'^2_\upsilon}=\sqrt{\upsilon^2_x+\upsilon^2_\upsilon}=\upsilon$

Ενώ για τις γωνίες π και α ισχύει

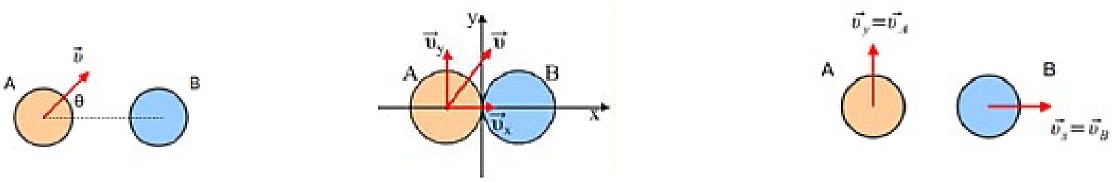
$\eta\mu\pi=\frac{\upsilon_y}{\upsilon}=\frac{\upsilon'_y}{\upsilon'}=\eta\mu\alpha$ άρα π = α

Συμπέρασμα (τα εφαρμόζουμε χωρίς απόδειξη)
το μέτρο της ταχύτητας δεν μεταβάλεται και η γωνία ανάκλασης ισούται με την γωνία πρόσπτωσης.

Μεθοδολογία και περιπτώσεις έκεντρης κρούσης

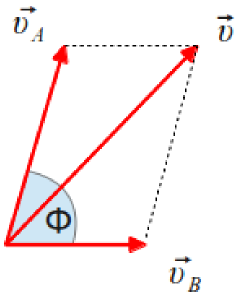
- ΕΚΚΕΝΤΡΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΚΙΝΟΥΜΕΝΗΣ ΜΕ ΑΚΙΝΗΤΗ ΟΜΟΙΑ ΣΦΑΙΡΑ
- (με απόδειξη)

Όταν λεία και ελαστική κινούμενη σφαίρα, συγκρούεται πλάγια με άλλη όμοια **ακίνητη** σφαίρα, μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις.



πριν την κρούση **κρούση** **μετά την κρούση**

Α’ τρόπος
Εφαρμόζουμε ΑΔΟ:



$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\vec{\upsilon}=m\vec{\upsilon}_A+m\vec{\upsilon}_B \quad \rightarrow \quad \vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_A+\vec{\upsilon}_B$$

όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα της σφαίρας Α πριν την κρούση , $\vec{\upsilon}_A$ και $\vec{\upsilon}_B$ η ταχύτητες των σφαιρών Α και Β μετά την κρούση.

Η παραπάνω σχέση αποδίδεται γραφικά στο διπλανό σχήμα , οπότε για τα μέτρα των $\vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon}_A$ και $\vec{\upsilon}_B$ ισχύει:

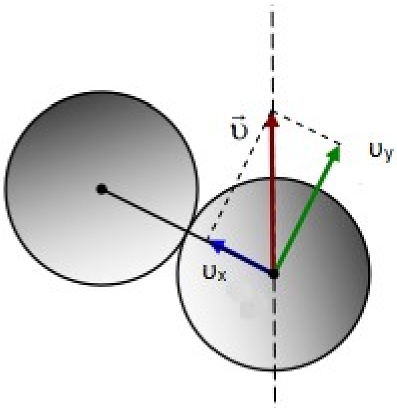
$$\upsilon^2=\upsilon_A^2+\upsilon_B^2+2\upsilon_A\upsilon_B\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

Από ΑΔΕ:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\upsilon_A^2+\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 \quad \rightarrow \quad \upsilon^2=\upsilon_A^2+\upsilon_B^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $2\upsilon_A\upsilon_B\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=0 \rightarrow \varphi=90^o$

β' τρόπος



Επειδή οι σφαίρες είναι λείες κατά την διάρκεια της κρούσης η δύναμη που ασκεί η μία σφαίρα στην άλλη, είναι κατά μήκος της διακέντρου. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι όταν μία σφαίρα συγκρουστεί ελαστικά και κεντρικά με άλλη όμοια, αρχικώς ακίνητη σφαίρα, ανταλλάσσουν ταχύτητες. Δηλαδή μετά την κρούση η ακίνητη θα κινείται με την ταχύτητα της πρώτης ενώ η πρώτη θα παραμείνει ακίνητη.

Εδώ η κρούση είναι πλάγια, δηλαδή ο φορέας της ταχύτητας της κινούμενης σφαίρας δεν διέρχεται από το κέντρο της ακίνητης.

Έστω $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση. Αναλύουμε αυτήν σε δύο κάθετες συνιστώσες:

- την , υ_x κατά μήκος της διακέντρου των δύο σφαιρών,
- και την υ_y , κάθετη στην διάκεντρο.

Κατά την διεύθυνση της διακέντρου λαμβάνει χώρα ελαστική και κεντρική κρούση. Ως εκ τούτου:
η ακίνητη σφαίρα κινείται μετά την κρούση με ταχύτητα υ_x ,
ενώ η κινούμενη σφαίρα χάνει την ταχύτητά της σε αυτή την διεύθυνση

Κατά την κάθετη στην διάκεντρο διεύθυνση, δεν λαμβάνει χώρα κρούση. Ως εκ τούτου η κινούμενη σφαίρα , απλά διατηρεί την ταχύτητά της υ_y , στην διεύθυνση της οποίας κινείται μετά την κρούση. Συνεπώς οι σφαίρες μετά την κρούση κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις .

ΕΚΚΕΝΤΡΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ- ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ - μεθοδολογία

Γενικά σε μια έκκεντρη ελαστική κρούση εφαρμόζουμε γενικά την εξής διαδικασία:
Αναλύουμε τις ταχύτητες των σωμάτων σε συνιστώσες και εφαρμόζουμε:

- ΑΔΟ στον άξονα x’x
- ΑΔΟ στον άξονα y’y
- Διατήρηση κινητικής ενέργειας

και λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων

Παράδειγμα 1

Σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1 = m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 6\,m/s$ και συγκρούεται με άλλη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 2m$, που είναι αρχικά ακίνητη. Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική και η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Μετά την κρούση, η σφαίρα Σ_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}'_1$, που έχει διεύθυνση **κάθετη στη διεύθυνση της** $\vec{\upsilon}_1$. Να υπολογιστεί:

α) το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}'_2$ της σφαίρας Σ_2, μετά την κρούση.

β) το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}'_1$, της σφαίρας Σ_1, μετά την κρούση.

γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.

δ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας *Σ₁* κατά τη κρούση, αν $m_2 = 2\,Kg$.

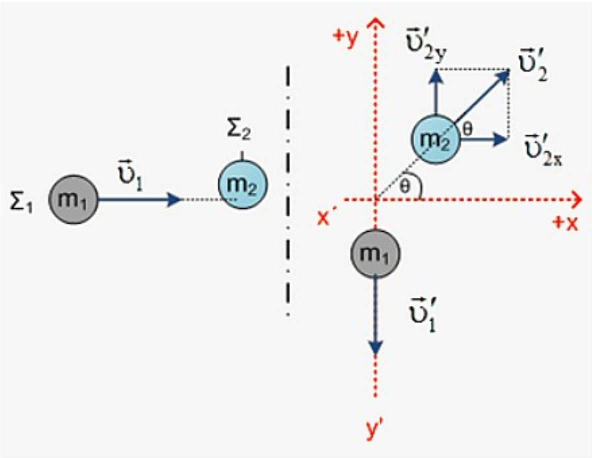
Δίνεται η τριγωνομετρικη σχέση: $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$

Απάντηση

α) και β)

ΑΔΟ άξονας xx':

$m\upsilon_1 = 2m\upsilon'_{2x} \rightarrow \upsilon_1 = 2\cdot\upsilon'_{2x}$ $\quad \upsilon'_{2x} = 3\,m/s$ **(1)**



ΑΔΟ άξονας yy': $0 = 2m\cdot\upsilon'_{2y} - m\upsilon'_1$

$\upsilon'_1 = 2\upsilon'_{2y}$ **(2)**

ΑΔΜΕ

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon'^2_1 + \frac{1}{2}2m\upsilon'^2_2 \rightarrow \upsilon_1^2 = \upsilon'^2_1 + 2\upsilon'^2_2$$

και αντικαθιστώντας $\upsilon_1 = 6\,m/s,\ \upsilon'^2_2 = \upsilon'^2_{2x} + \upsilon'^2_{2y}$ και $\upsilon'_{2x} = 3\,m/s$ (απο την (1))

παίρνουμε τελικά $\quad 18 = \upsilon'^2_1 + 2\upsilon'^2_{2y}$ **(3)**

οι εξισώσεις (2) και (3) αποτελούν σύστημα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εύκολα δίνει

$\upsilon'_1 = 2\sqrt{3}$ m/s και $\upsilon'_{2y} = \sqrt{3}\ m/s$ οπότε $\upsilon'_2 = \sqrt{\upsilon'^2_{2x} + \upsilon'^2_{2y}} = \sqrt{9+3} \rightarrow$

$\upsilon'_2 = 2\sqrt{3}$ m/s

Για την κατεύθυνση της $\vec{\upsilon}'_2$;έχουμε: $\quad \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\upsilon'_{2y}}{\upsilon'_{2x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = 30^o$

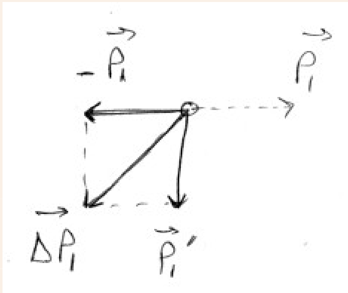
γ) Αφού το Σ_2 ήταν αρχικά ακίνητο, η ενεργεια που μεταφέρθηκε απο το Σ_1 ειναι αυτή που το Σ_2 εχει μετά την κρούση, δηλαδή η

$K'_2=\frac{1}{2}m_2 \upsilon'^2_2=\frac{1}{2}2m\upsilon'^2_2$ ενώ η αρχική ενέργεια του Σ1 ειναι $K_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$ έτσι το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{K'_2}{K_1}=\frac{m\upsilon'^2_2}{\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}=\frac{\upsilon'^2_2}{\frac{1}{2}\upsilon_1^2}=\frac{(2\sqrt{3})^2}{\frac{1}{2}6^2}=\frac{2}{3}$$ ή σε ποσοστό $\frac{2}{3}\cdot 100\%=66{,}66\%$

δ) Μπορούμε να βρούμε την μεταβολή της ορμής του $Σ_1$, με δύο τρόπους.

Πρώτος τρόπος: (άμεσα) $\Delta\vec{p}_1=\vec{p}\,'_1-\vec{p}_1$ ή $\Delta\vec{p}_1=\vec{p}\,'_1+(-\vec{p}_1)$ και επειδή τα διανύσματα $\vec{p}_1$ και $-\vec{p}\,'_1$ είναι κάθετα, έχουμε: $\Delta p_1=\sqrt{p_1^2+p'^2_1}$



τα μέτρα είναι:

$p_1=m\upsilon_1=1\cdot 6=6\,Kgm/s$ και $p'_1=m\upsilon'1=1\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,Kgm/s$, έτσι:

$$\Delta p_1=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\,Kgm/s$$

Δεύτερος τρόπος – ο καλύτερος : (έμμεσα)

Ας θυμηθούμε ότι σε κάθε κρούση ισχύει $\Delta\vec{p}_1=-\Delta\vec{p}_2$ (προκύπτει απο την διατήρηση της ορμής) έτσι:

$$\Delta\vec{p}_1=-\Delta\vec{p}_2=\vec{p}\,'_2-\vec{p}_2=m_2\upsilon'_2-0=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,Kgm/s$$

Σχόλιο: Ο δεύτερος τρόπος είναι προτιμότερος, όταν το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο, οπότε η εύρεση της μεταβολής της ορμής του ειναι πολυ εύκολη.

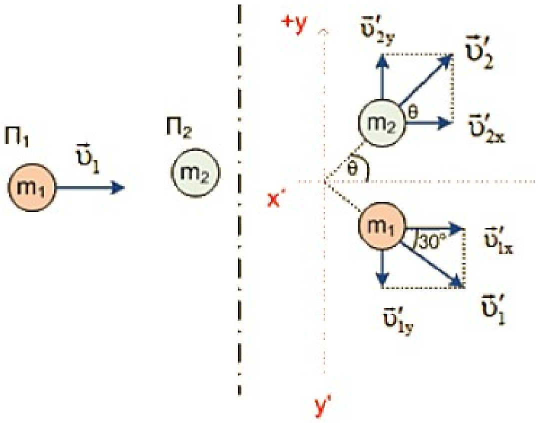
Παράδειγμα 2

Ένα πρωτόνιο $Π_1$ μάζας $m_1=m$ κινούμενο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1=10^6\,m/s$ αλληλεπιδρά (συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά) με ένα άλλο ακίνητο πρωτόνιο $Π_2$ μάζας $m_2=m$. Μετά την κρούση το πρωτόνιο $Π_1$ κινείται σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\varphi=30^o$ σε σχέση με την αρχική του πορεία.

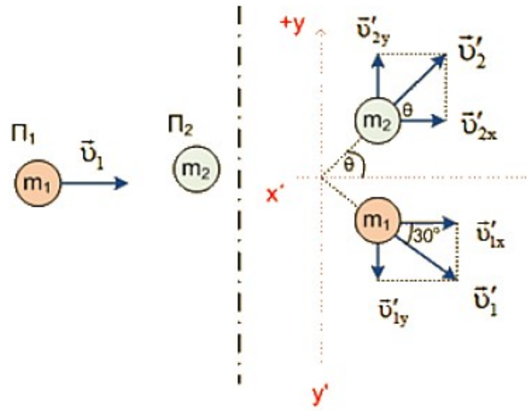
Α. Να υπολογισθεί αμέσως μετά τη κρούση:

α) το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου $Π_1$.

β) η ταχύτητα του πρωτονίου $Π_2$.



Β. Να βρεθεί το ποσοστό κινητικής ενέργειας του πρωτονίου $Π_1$ που μεταφέρεται στο πρωτόνιο $Π_2$.
γ) στην παραπάνω κρούση. δ) αν η κρούση ήταν κεντρική.



Απάντηση

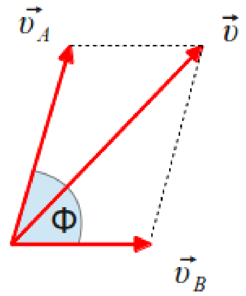
Αποδεικνύουμε οτι ο δύο σφαίρες (τα δύο πρωτόνια) θα κινηθούν μετά την κρούση με ταχύτητες που σχηματίζουν γωνία 90^o, έτσι η γωνία $θ = 60^o$

Εφαρμόζουμε ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ} \rightarrow m\vec{υ}=m\vec{υ}_A+m\vec{υ}_B \rightarrow$$

$$\vec{υ}=\vec{υ}_A+\vec{υ}_B$$

όπου $\vec{υ}$ η ταχύτητα της σφαίρας Α πριν την κρούση , $\vec{υ}_A$ και $\vec{υ}_B$ η ταχύτητες των σφαιρών Α και Β μετά την κρούση.



Η παραπάνω σχέση αποδίδεται γραφικά στο διπλανό σχήμα , οπότε για τα μέτρα των $\vec{υ}$, $\vec{υ}_A$ και $\vec{υ}_B$ ισχύει:

$$υ^2=υ_A^2+υ_B^2+2υ_Aυ_Bσυνφ \quad (1)$$ (1)

Από ΑΔΕ:

$$\frac{1}{2}mυ^2=\frac{1}{2}mυ_A^2+\frac{1}{2}mυ_B^2 \rightarrow \quad υ^2=υ_A^2+υ_B^2 \quad (2)$$

ΑΔΟ x'x: $$mυ_1 = mυ_2^{'}συν60+mυ_1^{'}συν30 \rightarrow 10^6=\frac{υ_2^{'}}{2}+\frac{υ_1^{'}\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

ΑΔΟ y'y: $$mυ_2^{'}ημ60^o-mυ_1^{'}ημ30^o=0 \rightarrow \frac{υ_2^{'}\sqrt{3}}{2}-\frac{υ_1^{'}}{2}=0 \quad (4)$$

Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4):

(4) → $υ_1^{'}=\sqrt{3}\cdot υ_2^{'} \quad (5)$ και αντικαθιστώντας στην (3)

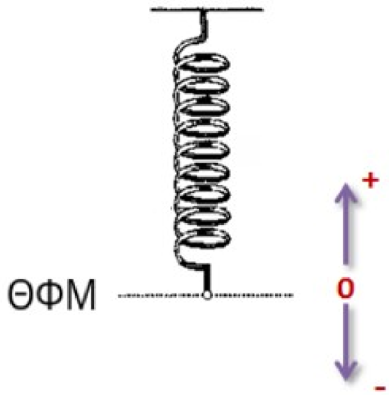
$$2\cdot 10^6=υ_2^{'}+3\cdot υ_2^{'} \rightarrow υ_2^{'}=\frac{1}{2}10^6 \quad m/s$$

και $υ_1^{'}=\sqrt{3}\cdot υ_2^{'} \rightarrow υ_1^{'}=\frac{\sqrt{3}}{2}10^6 m/s$

Σε όλες τις περιπτώσεις για το ελατήριο θα ισχύει ότι:είναι αβαρές και ικανοποιεί το νόμο του Hooke δηλαδή θα υπόκειται μόνο σε ελαστικές παραμορφώσεις.

Θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.) - Παραμόρφωση.

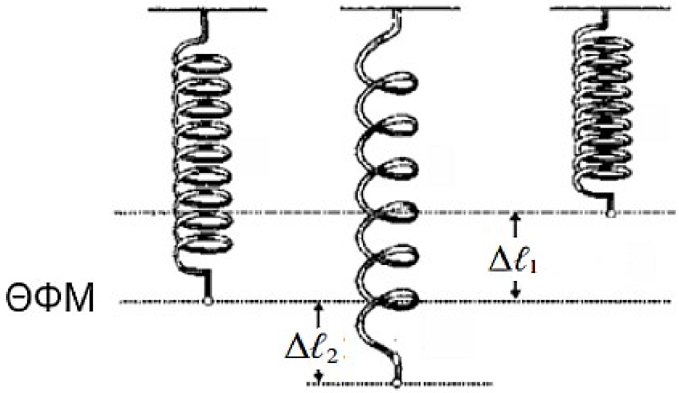
Όταν το ελατήριο είναι ελεύθερο, δεν ασκείται δηλαδή καμμία δύναμη σ'αυτό, λέμε ότι βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Αν επιπλέον το ένα άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, η θέση του άλλου άκρου λέγεται θέση φυσικού μήκους **(Θ.Φ.Μ.)**.



Παραμόρφωση($\Delta\ell$) του ελατηρίου, είναι η αλγεβρική τιμή της απόστασης του άκρου του ελατηρίου από τη θέση φυσικού μήκους. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta\ell_1<0$ και

$\Delta\ell_2>0$.

Η παραμόρφωση του ελατηρίου αναφέρεται ως **συσπείρωση** όταν το ελατήριο είναι συμπιεσμένο και ως **επιμήκυνση,** όταν το ελατήριο είναι τεντωμένο.



Παρατήρηση: Συνήθως η συσπείρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου συμβολίζεται με $\Delta\ell$, ώστε να μη συγχέεται με την απομάκρυνση της ταλάντωσης (x) που είναι η αλγεβρική τιμή της απόστασης του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας.

Δύναμη ελατηρίου

Όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο ή επιμηκυσμένο, ασκεί δύναμη στα δύο του άκρα. Η δύναμη του ελατηρίου προσπαθεί πάντα να επαναφέρει το ελατήριο στην κατάσταση φυσικού μήκους.

Η δύναμη του ελατηρίου έχει πάντα κατεύθυνση προς τη Θ.Φ.Μ.

- Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:

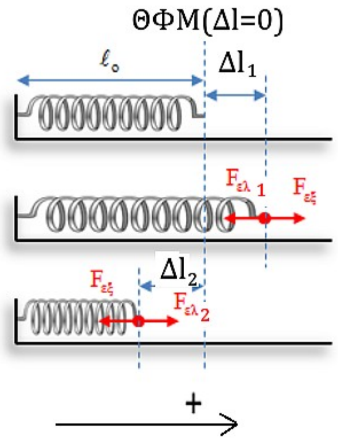
$$F_{\varepsilon\lambda}=k|\Delta\ell|$$

όπου Δℓ η παραμόρφωση του ελατηρίου.

- Η αλγεβρική τιμή της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_{\varepsilon\lambda}=-k\Delta\ell$$

Παράδειγμα:
στο παρακάτω σχήμα:



- όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου ειναι $\Delta\ell_1$
  - η δύναμη του ελατηρίου έχει αλγεβρική τιμή $F_{\varepsilon\lambda 1}=-k\Delta\ell_1$
  - και αφού $\Delta\ell_1>0$, θα είναι $F_{\varepsilon\lambda},1<0$
  - άρα η δύναμη $F_{\varepsilon\lambda,1}$ έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση (άρα προς τη θέση φυσικού μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα)
- όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου ειναι $\Delta\ell_2$
  - η δύναμη του ελατηρίου έχει αλγεβρική τιμή $F_{\varepsilon\lambda 2}=-k\Delta\ell_2$
  - και αφού $\Delta\ell_2<0$ είναι $F_{\varepsilon\lambda},2>0$
  - άρα η δύναμη $F_{\varepsilon\lambda},2$ έχει φορά προς την θετική κατεύθυνση (άρα προς τη θέση φυσικού μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα)

Δυναμική ενέργεια τον ελατηρίου

Το παραμορφωμένο ελατήριο έχει αποθηκευμένη ενέργεια, η οποία:

- χαρακτηρίζεται ως **δυναμική ενέργεια** του ελατηρίου
- είναι ίση με το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε για να συσπειρώσουμε ή επιμηκύνουμε το ελατήριο, ως την καθορισμένη θέση
- υπολογίζεται από τον τύπο

$$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

όπου $\Delta\ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου.

Έργο της δύναμης του ελατηρίου

Όταν το ελατήριο ειναι συνδεδεμένο με ένα σώμα, τότε το σώμα, εκτός απο άλλες πιθανές δυνάμεις (βάρος κ.λ.π.) δέχεται και την δύναμη του ελατηρίου. Έτσι όταν το σώμα μετακινείται, η δύναμη του ελατηρίου εκτελεί έργο πάνω στο σώμα. Η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική δύναμη. Επομένως το έργο της εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική συσπείρωση του ελατηρίου και δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\varepsilon\lambda(1\to2)}=U_{\varepsilon\lambda,1}-U_{\varepsilon\lambda,2}=\frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2-\frac{1}{2}k\Delta\ell_2^2$$

όπου $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$ η αρχική και τελική συσπείρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου.

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ – ΣΩΜΑ

Αν στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς K , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, δέσουμε ένα σώμα μάζας m, τότε έχουμε ένα σύστημα αποτελούμενο απο δύο σώματα: το ελατήριο και το σώμα μάζας m.

Σε ενα τέτοιο σύστημα,

- **το σώμα** μπορεί να έχει κινητική και δυναμική ενέργεια, ενώ
- **το ελατήριο** μπορεί να έχει μόνο δυναμική ενέργεια, επειδή θεωρείται αβαρές και δεν μπορεί να έχει κινητική ενέργεια.

ΑΔΜΕ ΚΑΙ ΘΜΚΕ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ – ΣΩΜΑ

Όταν ένα τέτοιο σύστημα κινείται μόνο με την επίδραση **συντηρητικών δυνάμεων** όπως:

- το βάρος του σώματος
- και η δύναμη του ελατηρίου

αλλα και **δυνάμεων που δεν εκτελούν έργο** (όπως πχ η κάθετη αντίδραση του δαπέδου)

τότε ισχύει η ΑΔΜΕ η οποία εφαρμόζεται ως εξής:

$$K_{\alpha\rho\chi,\sigma\acute{\omega}\mu.}+U_{\alpha\rho\chi,\sigma\acute{\omega}\mu.}+U_{\alpha\rho\chi,\varepsilon\lambda\alpha\tau.}=K_{\tau\varepsilon\lambda,\sigma\acute{\omega}\mu.}+U_{\tau\varepsilon\lambda,\sigma\acute{\omega}\mu.}+U_{\tau\varepsilon\lambda,\varepsilon\lambda\alpha\tau.}$$

Αν στο σώμα ασκούνται και μη συντηριτικές δυνάμεις (όπως η τριβή ή μία δύναμη F που εκτελεί έργο πάνω στο σώμα) τότε εφαρμόζουμε υποχρεωτικά ΘΜΚΕ:

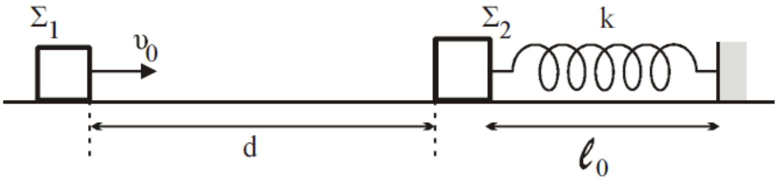
$$K_{\tau\varepsilon\lambda,\sigma\omega\mu.}-K_{\alpha\rho\chi.\sigma\omega\mu.}=W_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}+W_{\beta\alpha\rho}+W_{\tau\rho.}+W_F$$

Στην παραπάνω σχέση:

- Το έργο του βάρους υπάρχει μόνο όταν το σώμα κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο.
- Το έργο της τριβής μόνο όταν το σώμα κινείται σε μή λείο δάπεδο
- και το έργο της F , μόνο στην περίπτωση που ασκείται και κάποια δύναμη F.

Παράδειγμα 1: ***ΘΕΜΑ Γ (2013)***

Σώμα $Σ_1$ με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα $Σ_2$ με μάζα $m_2 = 2 m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k, και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0. . Έστω $υ_0$ η ταχύτητα που έχει το σώμα $Σ_1$ τη στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση $d=1m$ από το σώμα $Σ_2$. Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αμέσως μετά τη κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα $Σ_1$ αποκτά ταχύτητα με μέτρο $υ_1'=\sqrt{10}m/s$ και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας. Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι μ = 0,5 και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 10 m/s^2.

Γ1. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ του σώματος $Σ_1$. Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα $Σ_1$ στο σώμα $Σ_2$ κατά την κρούση. Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος $Σ_1$ από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.

Δίνεται: $\sqrt{10}=3,2$ Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι $m_2=1kg$ και $k=10^5 N/m$. Μονάδες 7

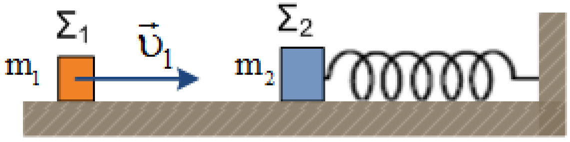
Θεωρήστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και ότι τα δύο σώματα συγκρούονται μόνο μία φορά.

Λύση:

Παράδειγμα 2

Σώμα Σ_2 μάζας $m_2=4\,Kg$ βρίσκεται ακίνητο σε <u>λείο</u> οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\,Kg$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1=10\,m/s$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το Σ_2 .

Να υπολογίσετε:



α) τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

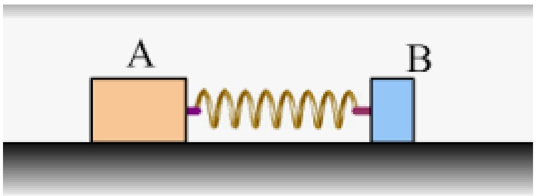
β) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ2.

γ) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 **που μεταφέρθηκε στο σώμα** Σ_2

δ) τη μέγιστη συσπείρωση $\Delta\ell$ του ελατηρίου.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $k=100\,N/m$.

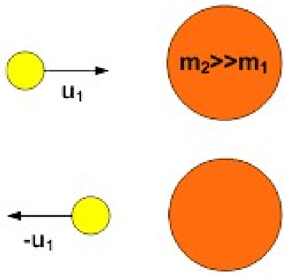
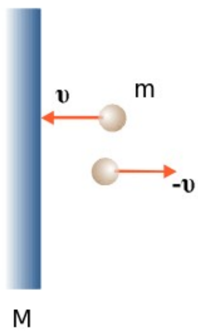
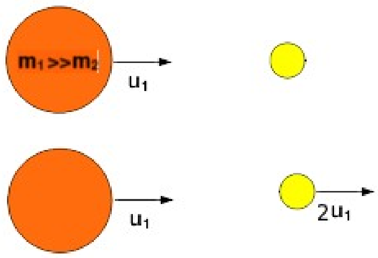
Παράδειγμα 3



Τα σώματα του διπλανού σχηματος έχουν μάζες $m_1 = 2\,Kg$ και $m_2 = 3\,Kg$ και είναι σε επαφήμε με τα άκρα οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς K = 100 N/m. Το δάπεδο είναι λείο και το ελατήριο διατηρείται συμπιεσμένο , ώστε η δύναμη που ασκεί να ισούται με 40N. Κάποια στιγμή το ελατήριο αφήνεται ελεύθερο. Να βρείτε τις ταχύτητες με τις οποίες θα κινηθούν τα σώματα, όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

Ορμή γενικά		
Ορμή ενός σώματος	$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$	**ορμή p ενός σώματος** είναι το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα του σώματος.
Ορμή συστήματος	$\vec{p}_{\text{ολ}}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+.$	
Μεταβολή ορμής	$\vec{\Delta p}=\vec{p}_{\text{τελ}}-\vec{p}_{\text{αρχ}}$	
Ανελαστική κρούση		
Μηχανική ενέργεια	$K_{\text{ολ}(\text{αρχ})}=K_{\text{ολ}(\text{τελ})}+Q$ ή $K_{1,\text{αρχ}}+K_{2,\text{αρχ}}=K_{1,\text{τελ}}+K_{2,\text{τελ}}+Q$	
Α.Δ.Ο	$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'$	
Πλαστική κρούση		
Μηχανική ενέργεια	$K_{\text{ολ}(\text{αρχ})}=K_{\text{ολ}(\text{τελ})}+Q$	
ΑΔΟ	$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)V$	
Ταχύτητα συσσ/τος	$V=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}$	
απώλεια κινητικής ενέργειας (θερμότητα)	$Q=\lvert\Delta K\rvert=K_{\text{αρχ}}-K_{\text{τελ}}=\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right)-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$	
Πλάγια πλαστική κρούση	$p=p'\rightarrow \begin{matrix} p_x=p_x' \\ p_y=p_y' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} m_1\upsilon_1=(m_1+m_2)V_x & (1) \\ m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)V_y & (2) \end{matrix}$	
Ελαστική κρούση (γενική περίπτωση)		
Μηχανική ενέργεια	$K_{1,\text{αρχ}}+K_{2,\text{αρχ}}=K_{1,\text{τελ}}+K_{2,\text{τελ}}$ ή $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2}=-1$	
ΑΔΟ		
Ταχύτητες σωμάτων μετά την κρούση	$\vec{\upsilon}_1'=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_2+\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_1+\frac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}\vec{\upsilon}_2$	
Ελαστική κρούση (ειδικές περιπτώσεις)		

Το ένα σώμα αρχικά ακίνητο ($\upsilon_2 = 0$)	$\vec{\upsilon}_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1$
Τα σώματα έχουν ίσες μάζες	$\boldsymbol{\upsilon_1' = \upsilon_2}$ **και** $\boldsymbol{\upsilon_2' = \upsilon_1}$ δηλαδή τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους
Σώμα μικρής μάζας m, συγκρούεται με ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας M	$\boldsymbol{\upsilon_1{'} = -\upsilon_1}$ ***και*** $\boldsymbol{\upsilon_2{'} = 0}$ 
κρούση μίας σφαίρας με ακλόνητο εμπόδιο	$\upsilon_1{'} = -\upsilon_1$ *και* $\upsilon_2{'} = 0$ 
Σώμα πολύ μεγάλης μάζας $m_1 >> m_2$ πέφτει με ταχύτητα υ_1 πάνω σε ακίνητο σώμα μάζας m_2	$\upsilon_1{'} = \upsilon_1$ *και* $\upsilon_2{'} = 2\upsilon_1$ 
Έκκεντρη κρούση	Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ορμής και διατήρηση της κινητικής ενέργειας