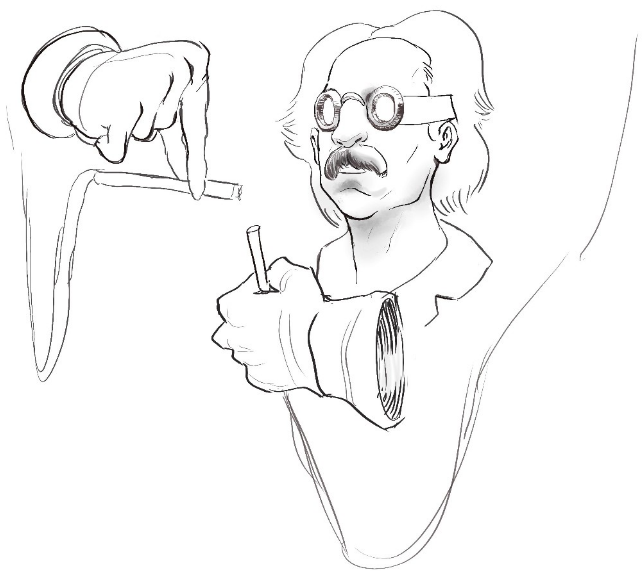
ΒΟΥΖΙΚΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ



Περιέχει:

- Θεωρία
- Λυμένα παραδείγματα

3.1 Εισαγωγή

«Ρευστά» χαρακτηρίζονται τα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία - αντίθετα με τα στερεά - δεν έχουν δικό τους σχήμα αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει.

Η διάκριση των ρευστών σε υγρά και αέρια βασίζεται στη σταθερότητα του όγκου τους (για ορισμένη θερμοκρασία).

- **Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα**, έχουν δηλαδή σταθερό όγκο, ανεξάρτητο από την πίεση.
- **Τα αέρια είναι συμπιεστά.** Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεσή τους.

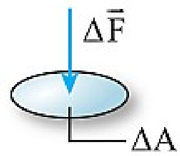
Πυκνότητα
ενός υγρού σε ένα σημείο του είναι το πηλίκο της στοιχειώδους μάζας Δm , προς τον στοιχειώδη όγκο ΔV, που περιβάλλει τη μάζα Δm.

$$\rho=\frac{\Delta m}{\Delta V}$$

- **στα υγρά** η πυκνότητα ειναι ίδια σε όλη τους την έκταση και δέν εξαρτάται απο την πίεση.
- **στα αέρια** σε ισορροπία η πυκνότητα ειναι ίδια σε όλη τους την έκταση αλλά εξαρτάται απο την πίεση.

Πίεση
Ως πίεση ορίζεται το πηλίκο του μέτρου της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μία επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής

$$P=\frac{F}{A} \qquad (1)$$



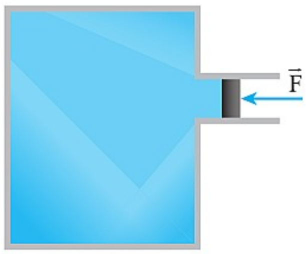
Στο S.I. η πίεση μετριέται σε Pa (Pascal). 1 Pa = 1N/m^2.

3.2 Υγρά σε ισορροπία

Η πίεση στα υγρά

Η πίεση στα διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό και στα τοιχώματα του δοχειου στο οποίο περιέχεται οφείλεται:

- στο βάρος του υγρού (υδροστατική πίεση)
- και σε κάποιο εξωτερικό αίτιο (ατμοσφαιρική πίεση , πίεση που προκαλείται μέσω ενός εμβόλου)



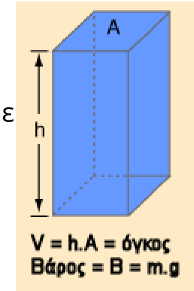
Υδροστατική πίεση

Η υδροστατική πίεση (η πίεση που οφείλεται στο βάρος του υγρού) σε κάποιο σημείο ενός υγρού σε ισορροπία είναι

$$p_{υδρ}=\rho g h \qquad (2)$$

όπου:

- h το βάθος του σημείου (η απόσταση από την ανώτερη επιφάνεια του υγρού) και
- ρ η πυκνότητα του υγρού.



Απόδειξη

Έστω ένα σημείο σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια του υγρού. Θεωρούμε μία οριζόντια επιφάνεια εμβαδού A στο βάθος h, οπότε η πίεση εξαιτίας του υγρού οφείλεται στο βάρος w της στήλης του υγρού πάνω από την επιφάνεια. Από τον ορισμό της πίεσης έχουμε:

$$P=\frac{F}{A}=\frac{w}{A}=\frac{mg}{A}=\frac{\rho Vg}{A}=\frac{\rho hAg}{A}=\rho gh$$

Πίεση στον πυθμένα ενός δοχείου

Αν στον πυθμένα, εμβαδού A , ενός δοχείου που περιέχει υγρο βάθους h , η πίεση είναι $P_{\pi\upsilon\theta}$, τότε η δύναμη που το υγρό ασκεί στον πυθμένα ειναι

$$F_{\pi\upsilon\theta}=P_{\pi\upsilon\theta}\cdot A \quad (1)$$

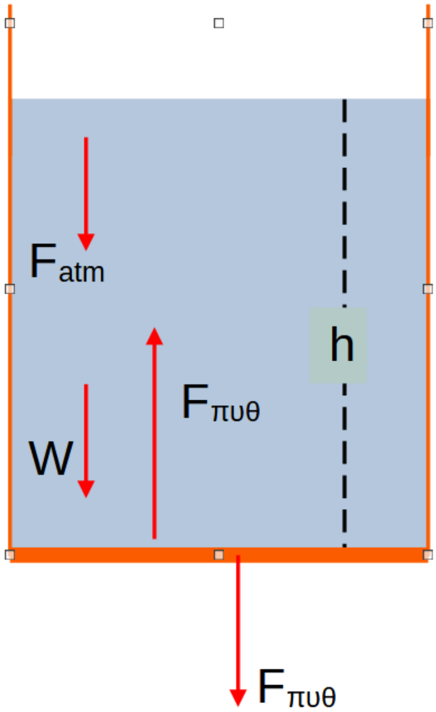
Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton το υγρό θα δέχεται απο τον πυθμένα δύναμη αντίθετης φοράς αλλά ίσου μέτρου $F_{\pi\upsilon\theta}$

Απο την (1) μπορούμε να γράψουμε

$$P_{\pi\upsilon\theta}=\frac{F_{\pi\upsilon\theta}}{A} \quad (2)$$

δηλαδή η πίεση στον πυθμένα ενός δοχείου ισούται με το πηλίκο της δύναμης που δέχεται το υγρό απο τον πυθμένα, προς το εμβαδό του δοχείου.

Αρα κάθε φορά που θέλουμε να βρούμε την πίεση στον πυθμένα, αρκεί να υπολογίσουμε την $F_{\pi\upsilon\theta}$ και μετά να εφαρμόσουμε τη σχέση (2)

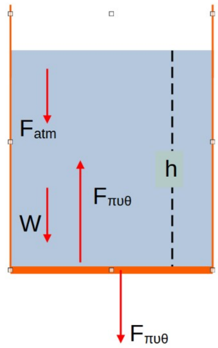


Οι δυνάμεις που δέχεται ένα υγρό που περιέχεται σε ενα δοχείο , όπως αυτό του σχήματος, είναι:

- απο την ατμόσφαιρα $F_{atm}=P_{atm}\cdot A$
- το βάρος του $W=mg=\rho Vg=\rho Ahg$
- απο τον πυθμένα $F_{\pi\upsilon\theta}$

- **Αν το υγρό ισορροπεί:**

$$\Sigma F=0 \Rightarrow F_{\pi\upsilon\theta}-W-F_{atm}=0 \Rightarrow F_{\pi\upsilon\theta}=W+F_{atm}$$

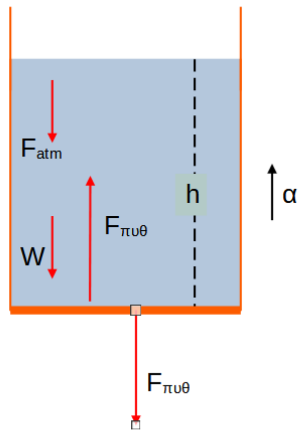


οπότε $$P_{\pi\upsilon\theta}=\frac{F_{\pi\upsilon\theta}}{A}=\frac{W+F_{atm}}{A}=\frac{\rho Agh+P_{atm}\cdot A}{A} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{\pi\upsilon\theta}=\rho gh + P_{atm}}$$

- **Αν το υγρό επιταχύνεται με επιτάχυνση α , κατακόρυφα προς τα πάνω:**

Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω (θετική τη φορά της επιτάχυνσης



$$\Sigma F=m\alpha \Rightarrow F_{\pi\upsilon\theta}-W-F_{atm}=m\alpha \Rightarrow F_{\pi\upsilon\theta}=W+F_{atm}+m\alpha$$

οπότε $$P_{\pi\upsilon\theta}=\frac{F_{\pi\upsilon\theta}}{A}=\frac{W+F_{atm}+m\alpha}{A} = \frac{\rho Agh+P_{atm}\cdot A+m\alpha}{A} \Rightarrow$$

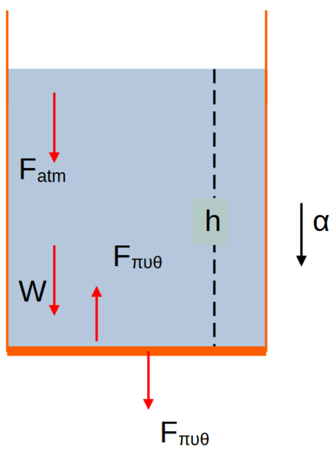
$$\boxed{P_{\pi\upsilon\theta}=\rho gh + P_{atm} + \frac{m\alpha}{A}} > P_{atm}+\rho gh$$

- **Αν το υγρό επιταχύνεται με επιτάχυνση α , κατακόρυφα προς τα κάτω:**

Θεωρούμε θετική φορά προς τα κάτω (θετική τη φορά της επιτάχυνσης

$$\Sigma F=m\alpha \Rightarrow W+F_{atm}-F_{\pi\upsilon\theta}=m\alpha \Rightarrow F_{\pi\upsilon\theta}=W+F_{atm}-m\alpha$$

οπότε $$P_{\pi\upsilon\theta}=\frac{F_{\pi\upsilon\theta}}{A}=\frac{W+F_{atm}-m\alpha}{A} = \frac{\rho Agh+P_{atm}\cdot A-m\alpha}{A}$$



$$\boxed{P_{\pi\upsilon\theta}=\rho gh + P_{atm} - \frac{m\alpha}{A}} < P_{atm}+\rho gh$$

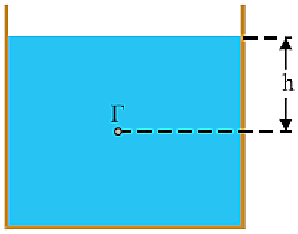
Αρχή του Pascal

Όταν ένα υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, σε όλη του την έκταση επικρατεί η ίδια πίεση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι:
η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του.

Εφαρμογές της αρχής του Pascal

1) Ισορροπία υγρού σε ανοιχτό δοχείο

Αν κάποιο υγρό ισορροπεί σε ανοιχτό δοχείο, στην ελεύθερη επιφάνειά του ασκείται η ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι η πίεση (συνολική πίεση) σε βάθος h θα είναι

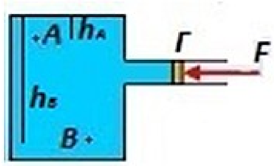


$$p = p_{ατμ} + \rho g h \quad (3)$$

ακριβώς επειδή, όπως προβλέπει η αρχή του Pascal, η ατμοσφαιρική πίεση μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού.

2) Ολική πίεση υγρού σε κλειστό δοχείο (εντός πεδίου βαρύτητας)

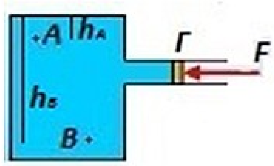
στο κλειστό δοχείο του διπλανού σχήματος , αν F είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη στο έμβολο εμβαδού Α, η ολική πίεση στα σημεία Α και Β είναι αντίστοιχα:



$$P_A = \frac{F}{A} + \rho g h_A \quad \text{και} \quad P_B = \frac{F}{A} + \rho g h_B$$

3) Ολική πίεση υγρού σε κλειστό δοχείο (εκτός πεδίου βαρύτητας)

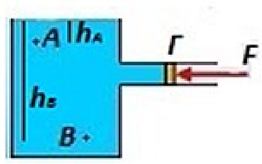
στο κλειστό δοχείο του διπλανού σχήματος , αν F είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη στο έμβολο εμβαδού Α, η ολική πίεση στα σημεία Α και Β είναι αντίστοιχα:



$P_A = P_B = \frac{F}{A}$ δηλαδή μόνο η πίεση που προκαλεί η F η οποία και μεταδίδεται σε όλα τα σημεία του υγρού.

4) Ολική πίεση υγρού σε ανοικτό δοχείο

Στο ανοιχτό δοχείο του διπλανού σχήματος η εξωτερική πίεση του εμβόλου δεν μεταδίδεται απλά εξισορροπεί την υδροστατική πίεση που επικρατεί στο υγρό που είναι σε επαφή με το έμβολο. Όμως η ατμοσφαιρική πίεση μέσω της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού με αποτέλεσμα η πίεση στα σημεία Α και Β τώρα να είναι:



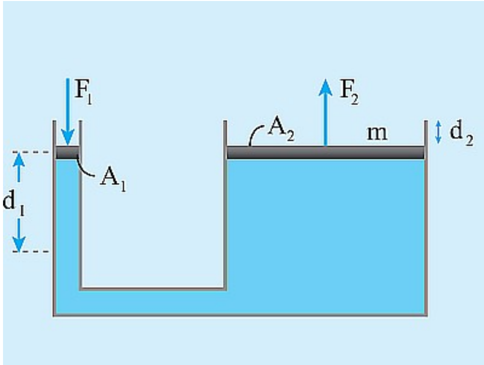
$$P_A = P_{atm} + \rho g h_A \quad \text{και} \quad P_B = P_{atm} + \rho g h_B \quad \text{με} \quad P_B > P_A$$

5) Υδραυλικός ανυψωτήρας

Η λειτουργία ενός υδραυλικού ανυψωτή, στηρίζεται στην αρχή του Pascal. Ένα έμβολο με μικρή διατομή A_1 ασκεί μία δύναμη F_1 στην επιφάνεια του υγρού.

Δύναμη

Η εφαρμοζόμενη στο έμβολο A_1 πίεση, Δp_1 μεταδίδεται αμετάβλητη σε όλα τα σημεία του υγρού, άρα και στο έμβολο διατομής A_2 δηλαδή



$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

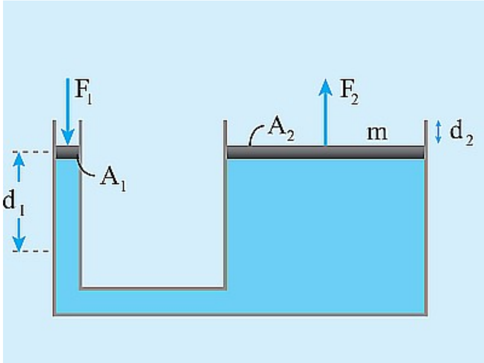
Άρα ο υδραυλικός ανυψωτής πολλαπλασιάζει τη δύναμη κατά παράγοντα ίσο με το λόγο των εμβαδών των δύο εμβόλων.

Έργο (sos)

Για να συγκρίνουμε τα έργα των δυνάμεων F_1 και F_2 , σχηματίζουμε το πηλίκο τους.

$\frac{W_1}{W_2} = \frac{F_1 \cdot d_1}{F_2 \cdot d_2}$ όμως $\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$ οπότε

$\frac{W_1}{W_2} = \frac{A_1 \cdot d_1}{A_2 \cdot d_2} = \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = 1$ αφού $\Delta V_1 = \Delta V_2$ επειδή τα υγρά είναι ασυμπίεστα.



Έτσι **$W_1 = W_2$**

6) Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων,

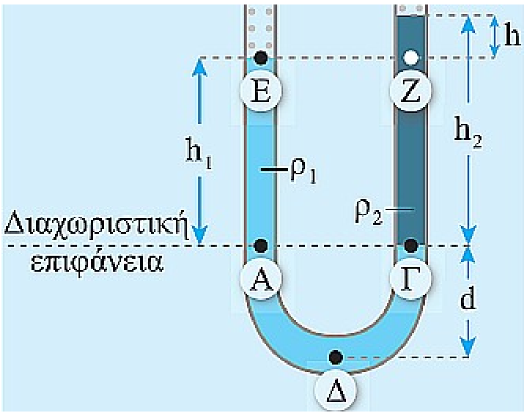
Ένα υγρό ασκεί κάθετη δύναμη σε κάθε επιφάνεια που έρχεται σε επαφή με αυτό, δηλαδή στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει και στην επιφάνεια ενός σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό. Ένα υγρό σε ηρεμία, προκαλεί την ίδια πίεση προς όλες τις κατευθύνσεις σε ορισμένο βάθος. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην **αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων**, σύμφωνα με την οποία:

Δύο σημεία που βρίσκονται στο ίδιο υγρό που ισορροπεί, όταν βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχουν την ίδια ολική πίεση.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω ειναι ακόμα οτι: η ελέυθερη επιφάνεια υγρού που βρίσκεται σε ισορροπία είναι οριζοντια επιφάνεια.

7) Ισορροπία δύο υγρών που δεν αναμειγνύονται

Στα σημεία Α και Γ ισχύει έχουν την ίδια πίεση αφού βρίσκονται στο ίδιο υγρό και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



$$p_A = p_\Gamma$$

$$P_{atm} + \rho_1 g h_1 = P_{atm} + \rho_2 g h_2$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

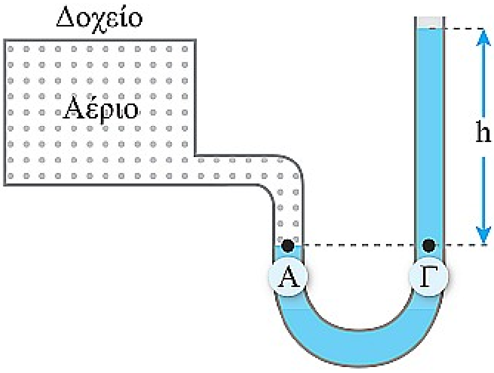
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

7) Μανόμετρο ανοιχτού σωλήνα

Αποτελείται απο ένα κλειστό δοχείο συνδεδεμένο με σωλήνα σχληματος U που περιέχει υγρό πυκνότητας ρ (συνήθως υδράργυρο). Μετράμε το ύψος h.

Η πίεση του αερίου υπολογίζεται ως εξής:

Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο υγρό και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο άρα:



$$P_A = P_Γ$$

όμως $P_A = P_{αερίου}$ *και* $P_Γ = P_{ατμ} + \rho g h$

οπότε $P_{αερίου} = P_{ατμ} + \rho g h$

3.3 Ρευστά Σε Κίνηση

Δυνάμεις κατά την κίνηση των ρευστών

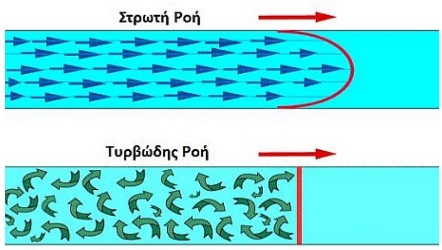
Κατά την κίνηση των ρευστών αναπτύσσονται

i. **δυνάμεις εσωτερικής τριβής (ιξώδες)** , δηλαδή δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων τους.

ii. **δυνάμεις συνάφειας**, δηλαδή δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων τους και των τοιχωμάτων του σωλήνα μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση .

Τυρβώδης ή στροβιλώδης ροή

λέγεται η ροή όταν το ρευστό δημιουργεί κατά τη ροή του δίνες και δημιουργείται όταν οι δυνάμεις (εσωτερικής τριβής και συνάφειας) υπερβούν κάποιο όριο.
Στην τυρβώδη ροή δεν υπάρχει εικόνα μόνιμης κατάστασης.Η ροή γίνεται ακανόνιστη και χαοτική και μόρια του ρευστού διαπερνούν τις συνοριακές επιφάνειες των σωλήνων ροής.



Στρωτή ροή

Είναι αυτή που δεν παρουσιάζει στροβίλους.

Ιδανικό ρευστό ειναι αυτό που

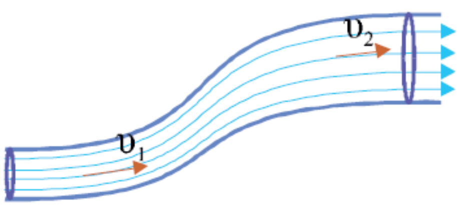
- δεν παρουσιάζει δυνάμεις εσωτερικής τριβής (ιξώδες)
- δεν παρουσιάζει δυνάμεις συνάφειας.
- είναι ασυμπίεστο.

Πραγματικά ρευστά

Τα πραγματικά ρευστά παρουσιάζουν συμπεριφορά αρκετά διαφορετική από τα ιδανικά και για να τα διακρίνουμε τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά.**

Ρευματική γραμμή είναι η τροχιά ενός μορίου του υγρού.

- η ταχύτητα του μορίου σε κάθε θέση, θα είναι εφαπτομένη της ρευματικής γραμμής, πράγμα που σημαίνει ότι
- δύο ρευματικές γραμμές δεν είναι δυνατόν να τέμνονται



Φλέβα

Είναι ένας νοητός σωλήνας, που σχηματίζεται απο τις ρευματικές γραμμές που περνούν απο κάθε σημείο του περιγράμματος μιας επιφάνειας Α κάθετης στη διεύθυνση του σωλήνα, μέσα στον οποίο κινείται ένα ρευστό

- το ρευστό που κυλάει σε κάποια φλέβα δεν αναμιγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του σωλήνα.

3.4 Διατήρηση Ύλης και η Εξίσωση Συνέχειας

Παροχή

Ορισμός παροχής

Παροχή ονομάζεται το πηλίκο $\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ (4) του όγκου ΔV του υγρού που περνά από μια διατομή του σωλήνα ή της φλέβας σε χρόνο Δt, προς το χρόνο Δt. Μετριέται σε m^3/s.

Αν η διατομή του σωλήνα είναι Α και το υγρό στο χρονικό διάστημα Δt έχει μετατοπιστεί κατά Δx, μπορούμε να γράψουμε

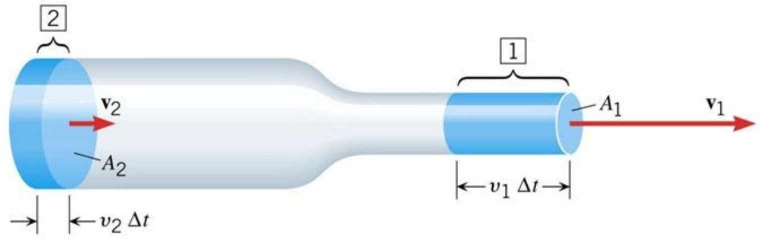
$$\Delta V = A\cdot\Delta x \quad \text{Οπότε} \quad \Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\cdot\Delta x}{\Delta t} \rightarrow$$

Τύπος παροχής $\boldsymbol{\Pi = A\cdot\upsilon}$ (5)

Αρχή διατήρησης της ύλης (μάζας)

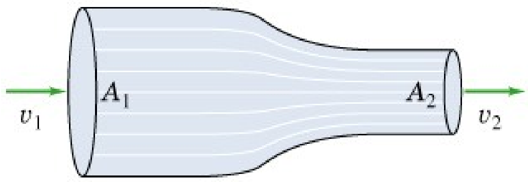
Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό που ρέει μέσα σ' ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής. Υποθέτουμε ότι η ροή είναι στρωτή. Για ένα ασυμπίεστο ρευστό θα πρέπει η μάζα $\boldsymbol{\Delta m_1}$ που περνάει από μία διατομή $\boldsymbol{A_1}$ του σωλήνα σε χρόνο Δt να είναι ίση με τη μάζα $\boldsymbol{\Delta m_2}$ που περνάει στο ίδιο χρονικό διάστημα από μία άλλη διατομή του σωλήνα $\boldsymbol{A_2}$.

Αυτό συμβαίνει επειδή κατα μήκος του σωλήνα η μάζα δεν εξαφανίζεται αλλα ούτε και παράγεται. έτσι:



$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \rightarrow \rho\,\Delta V_1 = \rho\,\Delta V_2 \rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2 \rightarrow A_1\,\Delta x_1 = A_2\,\Delta x_2 \rightarrow A_1\,\upsilon_1\,\Delta t = A_2\,\upsilon_2\,\Delta t \rightarrow$$

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \quad \text{ή} \quad \Pi_1 = \Pi_2 \qquad (6)$$



δηλαδή: Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μιας φλέβας η παροχή διατηρείται σταθερή.

Συμπεράσματα απο την εξίσωσης συνέχειας.

Από τη σχέση (6) φαίνεται οτι τα ποσά ταχύτητα του υγρού και διατομή του σωλήνα, ειναι αντιστρόφως ανάλογα. Κατά μήκος ενός σωλήνα που δεν έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα του υγρού δεν είναι παντού ίδια.

$\Pi_1 = \Pi_2 \rightarrow A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ και αφού $A_1 > A_2$ θα ειναι και $\upsilon_2 > \upsilon_1$

Δηλαδή, **σε σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη.**

3.5 Η Διατήρηση Ενέργειας και η Εξίσωση του Bernoulli

Η εξίσωση του Bernoulli συνδέει τα δύο βασικά χαρακτηριστικά των ρευστών, που είναι ταχύτητα ροής και πίεση με το ύψος απο την επιφάνεια του εδάφους.

Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών και είναι στην ουσία η εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε στα ρευστά.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+\rho gh+P=\sigma\tau\alpha\theta.$$

Όπου: P η πίεση

$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ η κινητική ενέργεια ανα μονάδα όγκου

ρgh η δυναμική ενέργεια ανα μονάδα όγκου

Απόδειξη:

Σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού στην περιοχή του Β μετατοπίζεται κατά Δs_1 ενώ ένα αντίστοιχο τμήμα του ρευστού ίσης μάζας, άρα και ίσου όγκου, στην περιοχή του Γ μετατοπίζεται κατά Δs_2 .

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το ρευστό στο τμήμα ΒΓ και για την στοιχειώδη μετακίνηση που αυτό εκτελεί στο χρονικό διάστημα Δt

$$K_\Gamma - K_B = W + W_B \quad (1)$$

Στην παραπάνω σχέση:

W, είναι το έργο των δυνάμεων που δέχεται το υγρό στο τμήμα ΒΓ απο το περιβάλλον ρευστό και W_B είναι το έργο του βάρους .

α) Έργο απο το περιβάλλον ρευστό

Οι δυνάμεις που δέχεται το υγρό στο τμήμα ΒΓ απο το περιβάλλον ρευστό είναι:

δύναμη $F_1=P_1A_1$	ασκείται στο ρευστό (ΒΓ) και στο σημείο Β, με φορά προς τα δεξιά , απο το ρευστό που υπάρχει πριν το Β. A_1 είναι η διατομή του σωλήνα στο σημείο Β
δύναμη $F_2=P_2A_2$	ασκείται στο ρευστό (ΒΓ) και στο σημείο Γ, με φορά προς τα αριστερά , απο το ρευστό που υπάρχει μετά το Γ. A_2 είναι η διατομή του σωλήνα στο σημείο Γ

Για τα έργα των παραπάνω δυνάμεων ισχύει:

$WF_1=F_1\Delta s_1=P_1A_1\Delta s_1 \rightarrow WF_1=P_1\Delta V_1$ | F_1 ομόρροπη της ταχύτητας, άρα $W_{F1}>0$

$WF_2=-F_2\Delta s_2=-P_2A_2\Delta s_2 \rightarrow WF_2=-P_2\Delta V_2$ | F_2 αντίθετη της ταχύτητας, άρα $W_{F2}<0$.

Ακόμα $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$

Οπότε:

Το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού, από το Β ως στο Γ ,λόγω διαφοράς πίεσης από το περιβάλλον ρευστό, θα είναι:

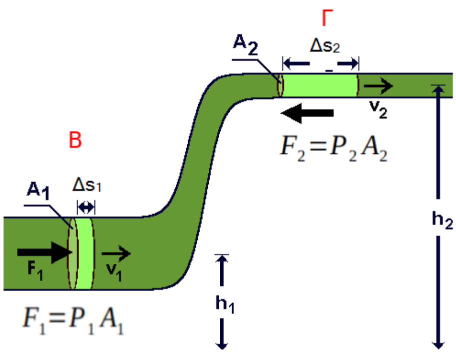
$$W = W_1 + W_2 = P_1\Delta V - P_2\Delta V = \mathbf{(P_1 - P_2)\,\Delta V}$$

β) έργο του βάρους

Η μετακίνηση του ρευστού στο χρόνο Δt ισοδυναμεί , με την μετακίνηση ενός τμήματος του ρευστού μάζας Δm από το ύψος h_1 (θέση Β) στο ύψος h_2 (θέση Γ), έτσι το έργο του βάρους

θα είναι

$$W_B = -\Delta m g(h_2 - h_1)$$



Αντικαθιστώντας τα παραπάνω έργα στη σχέση (1) έχουμε:

$$K_\Gamma - K_B = W + W_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_1^2 = P_1\Delta V - P_2\Delta V - \Delta mg(h_2 - h_1)$$

$$\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_1^2 + P_1\Delta V + \Delta mgh_1 = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2 + P_2\Delta V + \Delta mgh_2$$

και επειδή $\Delta m = \rho\,\Delta V$

ή $$\frac{1}{2}\rho\Delta V\upsilon_1^2 + P_1\Delta V + \rho\Delta Vgh_1 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\upsilon_2^2 + P_2\Delta V + \rho\Delta Vgh_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho gh_2$$

$$P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho gh = \sigma\tau\alpha\theta$$

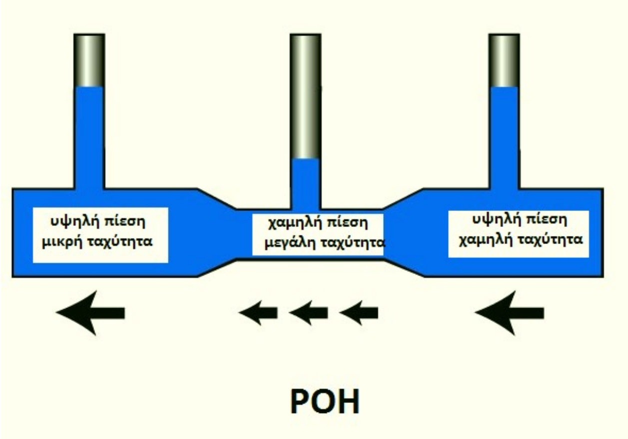
Συμπεράσματα και παρατηρήσεις απο την εξίσωση του Bernoulli.

1) Από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει ότι:

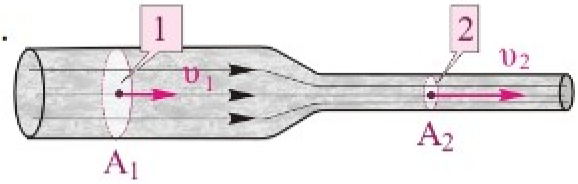
- το άθροισμα της πίεσης (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου (ρgh) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής γραμμής.
- Αν ο σωλήνας είναι οριζόντιος η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή

$$P+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2=\sigma\tau\alpha\theta$$

από όπου φαίνεται ότι σε περιοχές όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές (μικρή διατομή του σωλήνα) και η ταχύτητα ροής αυξάνεται η πίεση μειώνεται .



2) Μεταβολή της ανα μονάδα όγκου κινητικής ενέργειας σε οριζόντιο σωλήνα



Η κινητική ενέργεια ανα μονάδα όγκου του ρευστού, δίνεται όπως αναφέρθηκε πιο πάνω απο τη σχέση $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$. Μπορούμε να γράψουμε

κινητική ενέργεια ανα μονάδα όγκου = $\frac{K}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\,\upsilon^2$

Άρα η μεταβολή της ανα μονάδα όγκου κινητικής ενέργειας, όταν το ρευστό περνά απο την περιοχή 1 στην περιοχή 2, θα είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2-\frac{1}{2}\rho\,\upsilon_1^2$$

και επειδή $A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2$ → $\upsilon_1=\frac{A_2}{A_1}\upsilon_2$ με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\frac{\Delta K}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2-\frac{1}{2}\rho\,\upsilon_1^2 \quad = \quad \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2\left(1-\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

3) Μια άλλη ανάγνωση της εξίσωσης bernoulli

Η ενέργεια που προσφέρεται σε μια μάζα ρευστού Δm, απο το περιβάλλον ρευστό (λόγω διαφοράς πίεσης μεταξύ των σημείων Β και Γ) είναι οπως έχουμε αναφέρει, ίση με το έργο των δυνάμεων F_1 και F_2 που ασκούνται απο το περιβάλλον ρευστό και ισούται με

$$W=W_1+W_2=P_1\Delta V-P_2\Delta V \quad = \quad (P_1-P_2)\Delta V$$

Έτσι, <u>η ανα μονάδα όγκου</u> προσφερόμενη ενέργεια απο το περιβάλλον ρευστό, είναι

$$\frac{(P_1-P_2)\Delta V}{\Delta V}=P_1-P_2$$

Εφαρμογές της εξίσωσης του Bernoulli.

Εφαρμογή 1 - Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli να αποδείξετε τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής $P_{υδρ} = ρ \cdot g \cdot h$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Α και Β και έχουμε:

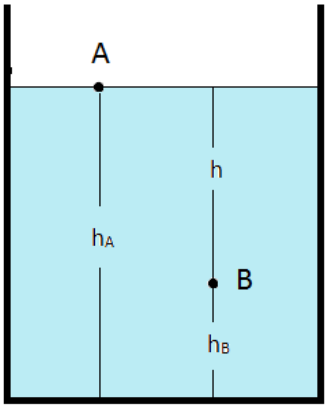
$$\frac{1}{2}\rho υ_A^2 + P_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho υ_B^2 + P_B + \rho g h_B \rightarrow$$

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho υ_A^2 - \frac{1}{2}\rho υ_B^2 + \rho g(h_A - h_B)$$

όμως:

$υ_A = υ_B = 0$, $P_A = P_{ατμ}$, $P_B = P_{ατμ} + P_{υδρ}$, $h_A - h_B = h$ και με αντικατάσταση

$$\mathbf{P_{υδρ} = \rho g h}$$



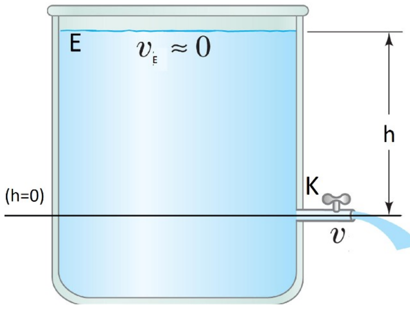
Εφαρμογή 2 – (ΘεώρημαTorricelli)

Ταχύτητα εκροής υγρού από <u>ανοικτό</u> δοχείο και απο μία <u>πολύ μικρή</u> οπή (πολύ μικρή σε σχέση με την επιφάνεια του δοχείου).

Η ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνειά του είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h.

$$\boldsymbol{υ = \sqrt{2gh}}$$

Απόδειξη
Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τις θέσεις Ε (ελεύθερη επιφάνεια) και Κ (στόμιο εκροής), έχοντας υπ'όψιν δύο σημαντικά σημεία:



- Η πίεση στην επιφάνεια και στο σημείο Κ ειναι ίση με $P_{ατ}$
  $P_E = P_K = P_{ατμ}$
- **Η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του υγρού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα (υ=0) συγκριτικά με την ταχύτητα με την οποία ρέει το υγρό στο Κ($υ_E$ = 0)**

Έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho υ_E^2 + P_E + \rho g h = \frac{1}{2}\rho υ_K^2 + P_K$$

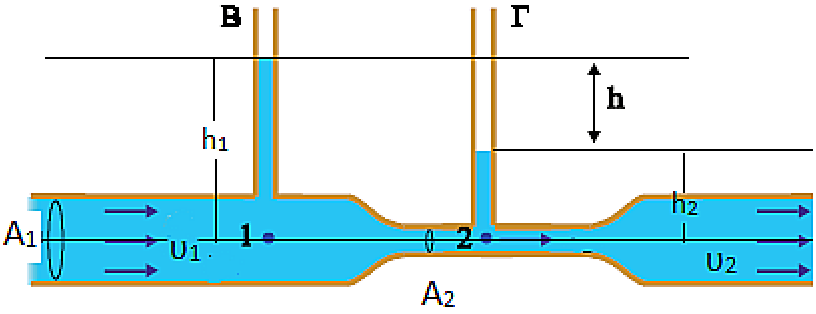
$$P_{ατμ} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho υ_K^2 + P_{ατμ} \rightarrow \rho g h = \frac{1}{2}\rho υ_K^2 \rightarrow υ_K = \sqrt{2gh}$$

Παρατήρηση:
1) Αν η οπή δέν είναι τόσο μικρή ώστε η επιφάνεια να μην κατέρχεται, τότε θα πρέπει να δίνεται το εμβαδό της επιφάνειας του δοχείου και της οπής (ή έστω η σχέση τους) και εφγαρμόζουμε Bernouli και συνέχεια..
2) Αν η οπή ειναι πολύ μικρή (ή η επιφάνεια του δοχείου πολύ μεγάλη) ώστε η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η επιφάνεια να είναι μηδέν, τότε η ταχύτητα εκροής δίνεται απο τη σχέση $υ = \sqrt{2gh}$ και άρα είναι ανεξάρτητη απο το εμβαδό της μικρής οπής. Αν δίνεται το εμβαδό της

οπής, τότε αυτό μας επιτρέπει να βρούμε και την παροχή του υγρού που εξέρχεται απο την οπή.

Εφαρμογή 3 - Το ροόμετρο του Ventouri.

Είναι μία διάταξη που χρησιμεύει για τη μέτρηση της ταχύτητας ροής σε ένα σωλήνα. Αν



είναι γνωστά:
οι διατομές A_1 και A_2, του σωλήνα
και η υψομετρική διαφορά *h* στη στάθμη των δύο κατακόρυφων ανοιχτών σωλήνων Β και Γ,
υπολογίζουμε: την ταχύτητα $υ_1$

Υπολογισμός
για σημεία 1 και 2 που βρίσκονται στο ίδιο ύψος

- Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli
- εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας την οποία λύνουμε ως προς $υ_2$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση Bernouli

$$\frac{1}{2}\rho υ_1^2+P_1=\frac{1}{2}\rho υ_2^2+P_2 \rightarrow \frac{1}{2}\rho υ_1^2+P_{ατ}+\rho g h_1=\frac{1}{2}\rho υ_2^2+P_{ατ}+\rho g h_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho υ_1^2+\rho g h_1=\frac{1}{2}\rho υ_2^2+\rho g h_2 \rightarrow \frac{1}{2}υ_1^2+g h_1=\frac{1}{2}υ_2^2+g h_2 \rightarrow \frac{1}{2}υ_1^2+g h_1-g h_2=\frac{1}{2}υ_2^2 \rightarrow$$

$$υ_1^2+2gh=υ_2^2$$

απο την εξίσωση της συνέχειας στα σημεία 1 και 2 έχουμε $A_1 υ_1=A_2 υ_2 \rightarrow \quad υ_2^2=\frac{A_1^2}{A_2^2}υ_1^2$

οπότε με αντικατάσταση . . . .

$$2gh=\left(\frac{A_1^2}{A_2^2}-1\right)υ_1^2 \rightarrow \qquad \boxed{υ_1=\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}}}$$

Παρατηρήσεις

Λυμένα παραδείγματα

1) Πίεση σε σημείο γνωστής διαμέτρου.

Σ' ένα σημείο οριζοντίου σωλήνα κυκλικής διατομής παροχής νερού , πυκνότητας $\rho = 10^3$ kg /m^3 , η πίεση είναι $P_1 = 5 \cdot 10^4$ Pa και η ταχύτητα ροής του νερού είναι $\upsilon_1 = 4$ m/s . Σ' ένα δεύτερο σημείο , Β η διάμετρος του σωλήνα είναι διπλάσια από τη διάμετρο στο πρώτο σημείο, να βρεθεί η πίεση P_2 στο δεύτερο σημείο.

Απάντηση

Απο την εξίσωση της συνέχειας έχουμε

$$\Pi_1=\Pi_2 \rightarrow A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2 \rightarrow \pi\frac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1=\pi\frac{\delta_2^2}{4}\upsilon_2 \quad\rightarrow\quad \pi\frac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1=\pi\frac{4\delta_1^2}{4}\upsilon_2 \quad\rightarrow\quad \upsilon_2=\frac{\upsilon_1}{4}$$

Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernouli για οριζόντια φλέβα

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+P_1=\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+P_2 \quad\rightarrow\quad P_2=P_1+\frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right) \quad\rightarrow$$

$$P_2=5\cdot10^4+\frac{1}{2}10^3\left(4^2-1\right) \quad\rightarrow\quad P_2 = 5{,}75\cdot10^4 \text{ Pa}$$

2) Βάθος ανοίγματος απο την ταχύτητα εκροής.

Απο το πλευρικό άνοιγμα μιας ανοιχτής δεξαμενής βγαίνει νερό με ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/s . Να βρείτε το βάθος στο οποίο βρίσκεται το άνοιγμα.

Απάντηση

Ισχύει η εξίσωση Torricelli : $\upsilon=\sqrt{2gh}$ για την ταχύτητα εκροής.

Λύνοντας ως προς h παίρνουμε: $h=\dfrac{\upsilon^2}{2g}$ = ή 20 cm

3) Χρόνος γεμίσματος μπουκαλιού.

Μια ανοικτή δεξαμενή που περιέχει νερό έχει στο πλευρικό τοίχωμά της και σε βάθος h = O ,8 m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού , μια βρύση διατομής A = 0,25cm^2 . Τότε για να γεμίσει με νερό ένα μπουκάλι όγκου 1C απαιτείται χρόνος :

α) t = 10 s β) t = 5 s γ) t = 20 S δ) t = 2,5 s.

Απάντηση

Με εφαρμογή της αρχής Torricelli, βρίσκουμε την ταχύτητα εκροής:

$$\upsilon=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot10\cdot0{,}8}=4\,m/s$$

και απο τον ορισμό της παροχής

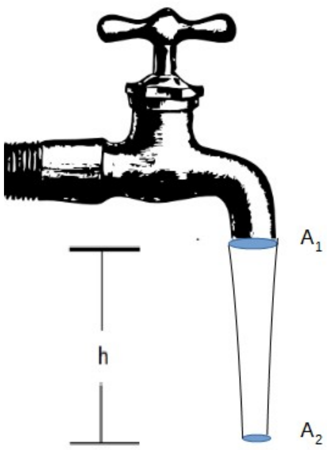
$$\Pi=\frac{V}{t}=A\cdot\upsilon \Rightarrow t=\frac{V}{A\cdot\upsilon} \Rightarrow t=\frac{10^{-3}}{25\cdot10^{-6}\cdot4} \Rightarrow t=10\,sec$$

4) Υπολογισμός παροχής απο τη διατομή του νερού.

Απο μια βρύση εμβαδού διατομής $A_1=\sqrt{2}\,cm^2$ πέφτει νερό.Αν σε απόσταση h = 30 cm από το στόμιο της βρύσης η φλέβα νερού λεπταίνει και γίνεται $A_2=\dfrac{A_1}{2}$ να βρεθεί η παροχή της βρύσης.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία 1 και 2

$$P_{ατμ}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+\rho gh=P_{ατμ}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \rightarrow \quad \upsilon_1^2+2gh=\upsilon_2^2 \quad (1)$$



Απο την εξίσωση συνέχειας έχουμε

$$A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2 \rightarrow A_1\upsilon_1=\frac{A_1}{2}\upsilon_2 \quad \rightarrow \quad \upsilon_2=2\upsilon_1 \quad (2)$$

(1)και (2) $\rightarrow \upsilon_1=\sqrt{\frac{2gh}{3}} = \sqrt{2}m/s$

οπότε $\Pi = A_1\upsilon_1 = 2\cdot10^{-4}\ m^3/s$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΡΕΥΣΤΩΝ

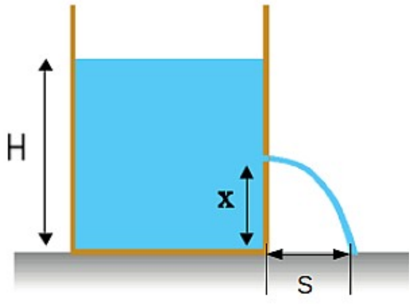
Ορισμός πίεσης	$P=\frac{dF}{dA}$
Θεμελιώδης νόμος της υδροστατική	$p_{υδρ}=\rho g h$
Αρχή του Pascal	η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του.
Πίεση (συνολική πίεση) σε βάθος h	$p=p_{ατμ}+\rho gh$
Παροχή	$\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad \Pi=A\upsilon$
Εξίσωση Συνέχειας	$A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2$
Εξίσωση του Bernoulli	$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+P_1+\rho gh_1=\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+P_2+\rho gh_2$
Θεώρημα Torricelli	$\upsilon=\sqrt{2gh}$

Τέσσερα ερωτήματα, στην εκροή υγρού απο μικρή οπή, ανοιχτής δεξαμενής σταθερού βάθους.

Σε δεξαμενή βάθους Η, το οποίο διατηρείται σταθερό, ανοίγουμε μία μικρή οπή, που βρίσκεται σε ύψος x απο το έδαφος.

Ερώτημα 1ο
Σε ποση απόσταση θα φτάσει η φλέβα του υγρού που εκτοξεύεται;

Απο το θεώρημα Torricelli, το νερό εκτοξεύεται με ταχύτητα



$$\upsilon=\sqrt{2g(H-x)}$$

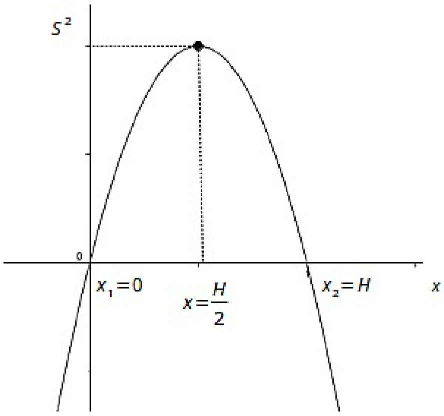
Φτάνει στο έδαφος σε χρόνο $x=\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2x}{g}}$

Οπότε η οριζόντια απόσταση στην οποία φτάνει είναι

$$S=\upsilon\cdot t=\sqrt{2g(H-x)}\cdot\sqrt{\frac{2x}{g}} \rightarrow S=2\sqrt{(H-x)x} \quad \textbf{(1)}$$

Ερώτημα 2ο
α) Σε ποιό ύψος απο τον πυθμένα πρέπει να ανοίξουμε την οπή, ώστε το υγρό να φτάσει στη μέγιστη απόσταση;
β) Ποιά ειναι η μέγιστη απόσταση στην οποία φτάνει η φλέβα;

α’ τρόπος:
α) Αναζητούμε την τιμή του **x** για την οποία η απόσταση **S** γίνεται μέγιστη. Το S γίνεται μέγιστο, για την τιμή του x που η υπόριζη ποσότητα, $y=(H-x)x=-x^2+Hx$
γίνεται μέγιστη.



απο την άλγεβρα (Α’ Λυκείου) είναι γνωστό οτι κάθε τριώνυμο με $\alpha<0$, έχει μέγιστο για $x=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ όπου ρ_1 και ρ_2 οι ρίζες του, δηλαδή ιο τιμές που το μηδενίζουν.
Οι ρίζες της παράστασης $y=-x^2+Hx$ είναι:

$$-x^2+Hx=0 \rightarrow x=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x=H$$

άρα το μέγιστο παρουσιάζεται για $x=\frac{H+0}{2} \rightarrow x=\frac{H}{2}$ (2)

β) Η μέγιστη απόσταση βρίσκεται απο την (1) για $x=\frac{H}{2}$

Έχουμε: $S_{max}=2\sqrt{\left(H-\frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}}=2\sqrt{\frac{H}{2}\frac{H}{2}}=2\sqrt{\frac{H_2}{4}} \rightarrow S_{max}=H$

β' τρόπος:
α) βρίσκουμε την τιμή του x που μηδενίζει την πρώτη παράγωγο της παράστασης :

$$\left(-x^2+Hx\right)'=0 \rightarrow -2x+H=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{H}{2} \ (3)$$

β) Η μέγιστη απόσταση βρίσκεται απο την (1) για $x=\frac{H}{2}$

Έχουμε: $S_{max}=2\sqrt{\left(H-\frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}}=2\sqrt{\frac{H}{2}\frac{H}{2}}=2\sqrt{\frac{H^2}{4}} \rightarrow S_{max}=H$

γ' τρόπος:
Απο την (1) υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$S=2\sqrt{(H-x)x} \rightarrow S^2=-4x^2+4Hx \quad \rightarrow \quad 4x^2-4Hx+S^2=0$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις η παραπάνω εξίσωση πρέπει , $\Delta \geq 0$ άρα:

$$16H^2-4\cdot 4\cdot S^2 \geq 0 \rightarrow 16S^2 \leq 16H^2 \rightarrow S^2 \leq H^2 \rightarrow S \leq H$$

άρα η μέγιστη τιμή του S είναι $\boldsymbol{S_{max}=H}$

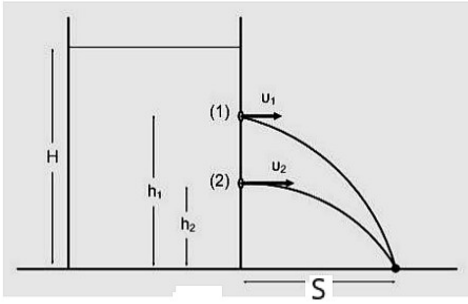
Για να βρούμε την απόσταση x απο τον πυθμένα που πρέπει να ανοιχτεί η τρύπα, ώστε να έχουμε μέγιστο βεληνεκές αντικαθιστούμε $S=H$ στην (1) και έχουμε:

$$S=2\sqrt{(H-x)x} \rightarrow H=2\sqrt{(H-x)x} \rightarrow H^2=4(H-x)x \rightarrow H^2=-4x^2+4Hx \rightarrow 4x^2-4Hx+H^2=0$$

Διακρίνουσα $\Delta=16H^2-4\cdot 4H^2=0$ οπότε: $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=4\frac{H}{2\cdot 4} \rightarrow x=\frac{H}{2}$

Ερώτημα 3ο

Σε ποιά ύψη h_1 και h_2 απο τον πυθμένα πρέπει να ανοίξουμε δύο (μικρές) οπές, ώστε το υγρό να φτάνει στην ίδια απόσταση;



Α΄ τρόπος

Το βεληνεκές της φλέβας ειναι σύμφωνα με την (1)

$S=2\sqrt{(H-h)h}$ όπου h το ύψος απο το έδαφος.

Άρα θα πρέπει:

$S_1 = S_2 \rightarrow 2\sqrt{(H-h_1)h_1} = 2\sqrt{(H-h_2)h_2} \rightarrow$

$-h_1^2+Hh_1=-h_2^2+Hh_2 \rightarrow h_2^2-h_1^2=Hh_2-Hh_1 \rightarrow (h_2-h_1)(h_2+h_1)=H(h_2-h_1) \rightarrow$
$\rightarrow h_2+h_1=H \rightarrow h_2=H-h_1$

δηλαδή η μία οπή απέχει απο την επιφάνεια, όσο η άλλη απο τον πυθμένα.

Β΄ τρόπος

Θέτουμε το ερώτημα ως εξής:
Σε ποιό ύψος απο τον πυθμένα, πρέπει να ανοίξουμε μια μικρή οπή, ωστε το υγρό να φτάσει σε οριζόντια απόσταση S;

$$S=\upsilon t \rightarrow S = \sqrt{2g(H-h)}\cdot\sqrt{2\frac{h}{g}} \rightarrow S^2 = 4(H-h)h \rightarrow -4h^2+4Hh+S^2=0$$

Η τελευταία σχέση είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το h.
Απο τους τύπους Vieta, $\left(x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}\right)$ το άθροισμα των ριζών αυτής της εξίσωσης θα είναι:

$$h_1+h_2=-4\frac{H}{-4} \rightarrow h_1+h_2=H$$

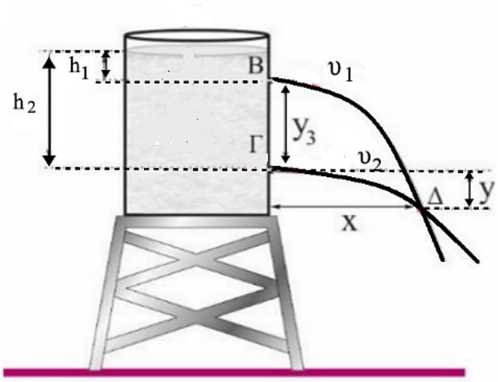
Δηλαδή για να φτάσει το νερό σε οριζόντια απόσταση S, μπορούμε να κάνουμε την οπή σε δύο βάθη, τέτοια ώστε $h_1+h_2=H$

οπότε αν η μία τρύπα ειναι σε βάθος h_1 , η άλλη θα πρέπει να γίνει σε βάθος $h_2=H-h_1$

Ερώτημα 4ο

Σε δοχείο γεμάτο με υγρό, ανοίγουμε δύο μικρές οπές σε βάθη h_1 και h_2 απο την επιφάνεια. Να βρείτε τη θέση του σημείου στο οποίο θα συναντηθούν (τέμνονται) οι δύο φλέβες (ο πυθμένας του δοχείου απέχει αρκετά απο το έδαφος)

Α' τρόπος



Για την οριζόντια απόσταση του σημείου Δ απο το δοχείο θα ισχύει:

$$x_1 = x_2 \rightarrow \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (1)$$

Για τις κατακόρυφες αποστάσεις του σημείου Δ απο τις οπές Β και Γ, θα ισχύει:

$$y_3 + y = \frac{1}{2} g t_1^2 \rightarrow \quad h_2 - h_1 + y = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (2) \qquad y = \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (3)$$

Διαιρώντας κατα μέλη τις (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{h_2 - h_1 + y}{y} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \rightarrow απο\, την (1) \quad \rightarrow \quad \frac{h_2 - h_1 + y}{y} = \frac{h_2}{h_1} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = h_1}$$

δηλαδή το σημείο συνάντησης βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση ,απο την οπή Γ, ίση με το βάθος της οπής Β.

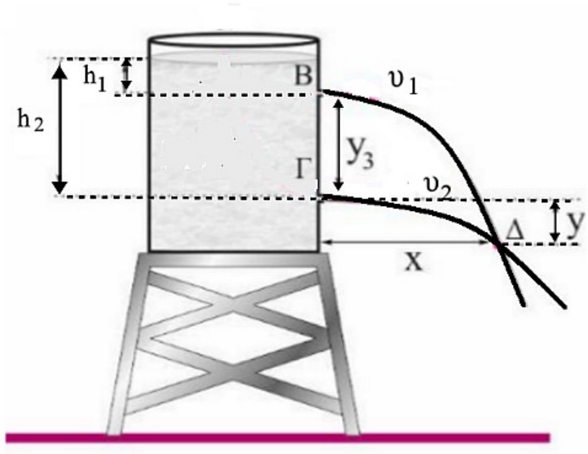
Ακόμα, $x = \upsilon_2 t_2 = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2y}{g}} = (y = h_1) = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \rightarrow \quad x = 2\sqrt{h_1 h_2}$

Β' τρόπος

Για την οριζόντια απόσταση του σημείου Δ απο το δοχείο θα ισχύει:

$$\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \Rightarrow \quad \sqrt{2gh_1}\sqrt{\frac{2(y_3 + y)}{g}} = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2y}{g}} \quad \Rightarrow \quad h_1(y_3 + y) = h_2 y \quad (1)$$

Απο το σχήμα: $y_3 = h_2 - h_1$ (2)



και απο τις (1) και (2) : $h_1(h_2 - h_1 + y) = h_2 y$

$h_1 h_2 - h_1^2 + h_1 y = h_2 y$

$(h_2 - h_1) y = h_1 (h_2 - h_1) \quad \Rightarrow \quad y = h_1$

δηλαδή το σημείο συνάντησης βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση ,απο την οπή Γ, ίση με το βάθος της οπής Β.

Ενώ η οριζόντια απόσταση του σημείου συνάντησης θα είναι:,

$$x = \upsilon_2 t_2 = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2y}{g}} = (y = h_1) = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \rightarrow \quad x = 2\sqrt{h_1 h_2}$$

Γ' τρόπος (ίδιος με τον Β΄τρόπο αλλά με διαφορά στο σχήμα)

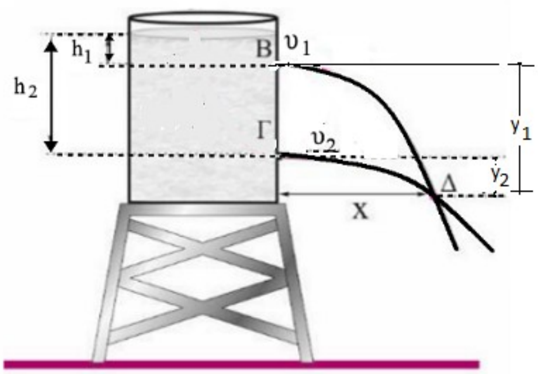
Σκοπός μας είναι να βρούμε τα y_1 , y_2 και x. (τα h_1 και h_2 ειναι γνωστά)

Χρειαζόμαστε λοιπόν δύο σχέσεις ωστε να έχουμε ενα σύστημα 2x2.

1η σχέση:Για την οριζόντια απόσταση του σημείου Δ απο το δοχείο θα ισχύει:

$$\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \Rightarrow \quad \sqrt{2gh_1}\sqrt{\frac{2y_1}{g}} = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2y_2}{g}} \quad \Rightarrow \quad h_1 y_1 = h_2 y_2 \quad (1)$$

2η σχέση: Απο το σχήμα, $y_1 - y_2 = h_2 - h_1$ (2)



απο την (1) λύνουμε ως προς y_1 και αντικαθιστούμε στην (2). Μετά τις πράξεις παίρνουμε:

$\Rightarrow \quad y_2 = h_1$

Ενώ η οριζόντια απόσταση του σημείου συνάντησης θα είναι:,

$$x = \upsilon_2 t_2 = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2y_2}{g}} = (y_2 = h_1) = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \rightarrow \quad x = 2\sqrt{h_1 h_2}$$

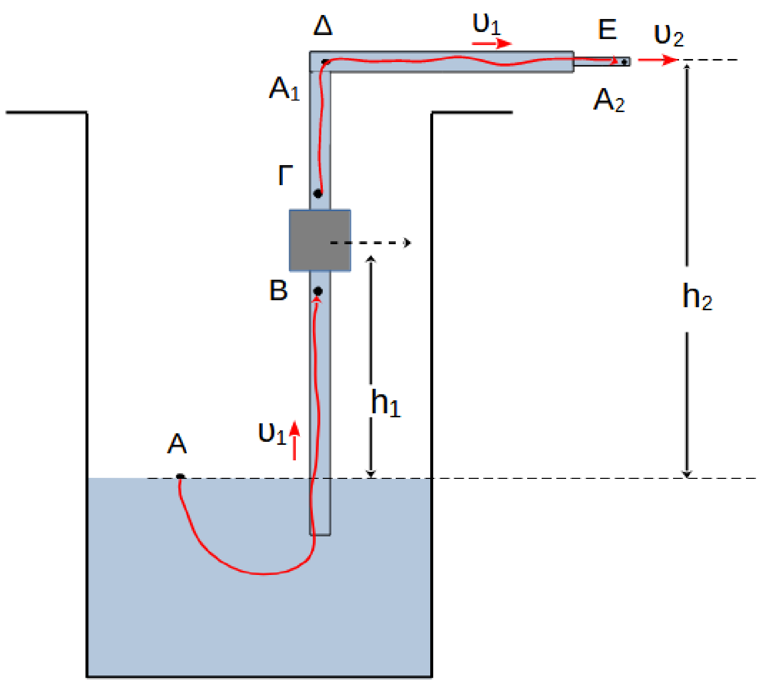
ΑΝΤΛΙΕΣ

Αντλία, είναι μια διάταξη, η οποία παραλαμβάνει ρευστό απο μια δεξαμενή, (δεξαμενή άντλησης), όπου το ρευστό βρίσκεται ακίνητο και προσφέροντας την απαραίτητη ενέργεια (έργο της αντλίας):

i. το ανεβάζει σε ύψος h_2 από την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής, και
ii. του προσδίδει ταχύτητα υ_2, κατά την έξοδό του από το σωλήνα απορροής.

Τοποθέτηση της αντλίας

Μια αντλία μπορεί να τοποθετηθεί σε με ποικιλία θέσεων, απο το κάτω άκρο του σωλήνα άντλησης μέχρι το τελικό άκρο του σωλήνα εξόδου. Για να καταφέρει να λειτουργήσει όμως, πρέπει **η πίεση στην είσοδο της αντλίας να είναι μεγαλύτερη απο το μηδέν.**



Βασικά χαρακτηριστικά

Σε μια διάταξη που περιλαμβάνει αντλία, τα βασικά μεγέθη είναι:

- Η **ισχύς** της αντλίας, $\left(P_{αντ} = \dfrac{\Delta W_{αντ}}{\Delta t}\right)$ η οποία ισούται με τον ρυθμό που η αντλία προσφέρει ενέργεια στο ρευστό.
- Η **παροχή** που αυτή πετυχαίνει κατά την άντληση και η οποία φυσικά, παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος του σωλήνα, έως την έξοδο.
- Η **πίεση στην είσοδο** $\left(P_{εισ}\right)$ και η **πίεση στην έξοδο** $\left(P_{εξ}\right)$ της αντλίας.
- Η **ταχύτητα** του ρευστού, κατα μήκος του σωλήνα.

Ισχύς της αντλίας

Η ισχύς της αντλίας μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους όσοι και οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που η αντλία προσφέρει στο ρευστό.

Α΄τρόπος

Η ενέργεια (έργο), που η αντλία προσφέρει σε μία στοιχειώδη μάζα ρευστου Δm, μπορεί να υπολογιστεί απο την αύξηση της μηχανικής ενέργειας (δυναμικής και κινητικής) μιας στοιχειώδους μάζας ρευστού Δm, μεταξύ των σημείων A και E. Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, στη θέση Α, το ρευστό στη θέση αυτή θα έχει μηδενική μηχανική ενέργεια, αφού έχει και μηδενική ταχύτητα. Έτσι, η ενέργεια (έργο), που η αντλία προσφέρει σε μία στοιχειώδη μάζα ρευστού Δm, μεταρέπεται σε:

- δυναμική ενέργεια $\Delta m g h_2$
- και κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}\Delta m \upsilon_2^2$

οπότε $$\Delta W_{αντλ} = \Delta m g h_2 + \frac{1}{2}\Delta m \upsilon_2^2 \quad (1)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν εφαρμόσουμε το $ΘΜΚΕ$ για μία μάζα ρευστού Δm, από το σημείο A στην επιφάνεια της δεξαμενής άντλησης,μέχρι το σημείο E όπου το ρευστό βγαίνει στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα υ_2.

$$K_E - K_A = \Delta W_{αντ} + W_B \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta m \upsilon_2^2 - 0 = \Delta W_{αντ} - \Delta m g h_2 \Rightarrow \Delta W_{αντλ} = \Delta m g h_2 + \frac{1}{2}\Delta m \upsilon_2^2$$

Για να υπολογίσουμε την ισχύ της αντλίας, διαιρούμε τη σχέση (1), με Δt :

$$\Delta W_{αντλ} = \Delta m g h_2 + \frac{1}{2}\Delta m \upsilon_2^2 \Rightarrow \frac{\Delta W_{αντλ}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} g h_2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon_2^2 \Rightarrow (αντικαθιστούμε\ \ \Delta m = \rho \Delta V)$$

$$P_{αντ} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} g h_2 + \frac{1}{2}\rho \frac{\Delta V}{\Delta t}\upsilon^2$$ και επειδή $$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \Pi = A_2 \upsilon_2$$

τελικά $$P_{αντ} = \rho g h_2 \Pi + \frac{1}{2}\rho \Pi \upsilon_2^2$$ ή $$P_{αντ} = \rho g h_2 A_2 \upsilon_2 + \frac{1}{2}\rho A_2 \upsilon_2^3 \quad (2)$$

όπου:

h_2 : το ύψος του σημείου εξόδου από την επιφάνεια του ρευστού στη δεξαμενή άντλησης
υ_2 : η ταχύτητα του ρευστού στην έξοδο
Π : η παροχή της αντλίας
A_2 : το εμβαδό του σωλήνα εξόδου

στην περίπτωση που ο σωλήνας <u>στην είσοδο και στην έξοδο της αντλίας έχει την ίδια διατομή,</u> η παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$P_{αντ} = \rho g h_2 \Pi + \frac{1}{2}\rho \Pi \upsilon^2$$ και $$P_{αντ} = \rho g h_2 A \upsilon + \frac{1}{2}\rho A \upsilon^3$$

Υπογραμμίζεται ότι:
το ύψος h_2 υπολογίζεται από την επιφάνεια του ρευστού στην δεξαμενή άντλησης και όχι από το βάθος στο οποίο βρίσκεται η αντλία, ή το άκρο του σωλήνα άντλησης .

Β΄τρόπος

Η ενέργεια $\Delta W_{\alpha\nu\tau}$ που η αντλία προσφέρει στη στοιχειώδη μάζα $\Delta m=\rho\Delta V$, μπορεί να υπολογιστεί, μελετώντας μόνο τι συμβαίνει απο την είσοδο έως και την έξοδο της αντλίας και όχι απο το σημείο άντλησης Α, έως την τελική έξοδο Ε.

Το συνολικό έργο $\Delta W_{\alpha\nu\tau}$ της αντλίας, πάνω στη μάζα Δm , εκδηλώνεται με δύο όρους:

- ΔW_1 : μεταβολή της ενέργειας λόγω διαφοράς πίεσης μεταξύ των σημείων Β και Γ, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta W_1=(P_\Gamma-P_B)\Delta V$$

- ΔW_2 : μεταβολή της κινητικής ενέργειας της στοιχειώδους μάζας Δm

$$\Delta W_2=\frac{1}{2}\Delta m\,\upsilon_\Gamma^2-\frac{1}{2}\Delta m\,\upsilon_B^2 \quad \text{ή} \quad \Delta W_2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\,\upsilon_\Gamma^2-\frac{1}{2}\rho\Delta V\,\upsilon_B^2$$

οπότε, $\Delta W_{\alpha\nu\tau}=\Delta W_1+\Delta W_2=(P_\Gamma-P_B)\Delta V+\frac{1}{2}\rho\Delta V\,\upsilon_\Gamma^2-\frac{1}{2}\rho\Delta V\,\upsilon_B^2$

Διαιρούμε την παραπανω σχέση με Δt και έτσι η **ισχύς της αντλίας** δίνεται απο τη σχέση:

$$P_{\alpha\nu\tau}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=(P_\Gamma-P_B)\frac{\Delta V}{\Delta t}+\frac{1}{2}\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}\upsilon_\Gamma^2-\frac{1}{2}\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}\upsilon_B^2 \quad \text{όμως} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t}=\Pi$$

οπότε $$P_{\alpha\nu\tau}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=(P_\Gamma-P_B)\Pi+\frac{1}{2}\rho\,\Pi\,\upsilon_\Gamma^2-\frac{1}{2}\rho\,\Pi\,\upsilon_B^2 \quad (7)$$

ή $$P_{\alpha\nu\tau}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=(P_{\varepsilon\xi.}-P_{\varepsilon\iota\sigma.})\Pi+\frac{1}{2}\rho\,\Pi\,\upsilon_{\varepsilon\xi.}^2-\frac{1}{2}\rho\,\Pi\,\upsilon_{\varepsilon\iota\sigma.}^2$$

όπου $\Pi=A_B\upsilon_B=A_\Gamma\upsilon_\Gamma$

Στην περίπτωση που ο σωλήνας <u>στην είσοδο και στην έξοδο της αντλίας έχει την ίδια διατομή,</u> η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P_{\alpha\nu\tau}=(P_{\varepsilon\xi.}-P_{\varepsilon\iota\sigma.})\Pi \quad (8)$$

Την παραπάνω σχέση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οταν μας δίνονται οι πιέσεις στην είσοδο και έξοδο της αντλίας.

Πίεση στην είσοδο και στην έξοδο της αντλίας

Μπορούμε να εφαρμόσουμε:

i. την εξίσωση του **Bernoulli** σε μία ρευματική γραμμή που ενώνει δύο σημεία που βρίσκονται στο τμήμα, πριν ή μετά την αντλία, δηλαδή:
   - απο την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού (σημείο Α), μέχρι την είσοδο της αντλίας (σημείο Β)

- ◦ απο την έξοδο της αντλίας (σημείο Γ) έως οποιοδήποτε σημείο του σωλήνα, μέχρι την τελική έξοδο του ρευστού.

ii. Την εξίσωση της συνέχειας σε όλο το μήκος του σωλήνα.

Πίεση εισόδου P_B

Θεωρούμε οτι η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού παραμένει σταθερή. Αυτό είναι ακριβές όταν η άντληση γίνεται π.χ. απο μια λίμνη, πηγάδι κ.λ.π.)

Απο τη συνέχεια, $\upsilon_1 = \frac{A_2}{A_1}\upsilon_2$ (3)

- Bernoulli A → B

$$P_{atm}+0+0=P_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+\rho g h_1 \quad \Rightarrow \quad P_B=P_{atm}-\rho g h_1-\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$ και αντικαθιστώντας την (3),

$$P_{εισόδου}=P_B=P_{atm}-\rho g h_1-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\upsilon_2^2 \quad (4)$$

Στην περίπτωση που η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή, ισχύει δηλαδή $A_1=A_2=A$ και $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$ οι παραπάνω σχέση γίνεται: $P_{εισόδου}=P_B=P_{atm}-\rho g h_1$

Πίεση εξόδου $P_Γ$ (θεωρούμε οτι το σημείο Γ βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το σημείο Β, δηλαδή η αντλία έχει αμελητέες διαστάσεις)

- Bernoulli Γ → Ε

$$P_Γ+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+\rho g h_1=P_{atm}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+\rho g h_2$$ και αντικαθιστώντας την (3),

$$P_{εξόδου}=P_Γ=P_{ατμ}+\rho g(h_2-h_1)+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) \quad (5)$$

Στην περίπτωση που η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή, ισχύει δηλαδή $A_1=A_2=A$ και $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$ οι παραπάνω σχέση γίνεται: $P_{εξόδου}=P_Γ=P_{ατμ}+\rho g(h_2-h_1)$

Μέγιστο ύψος τοποθέτησης αντλίας

Για να λειτουργεί μία αντλία θα πρέπει $P_{εισ}>0$ αφού η πίεση δέν μπορεί να είναι αρνητική. Έτσι, απο την (4) :

$$P_{εισόδου}=P_B=P_{atm}-\rho g h_1-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\upsilon_2^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho g h_1<P_{atm}-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$h_1 < \frac{P_{atm}}{\rho g} - \frac{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\upsilon_2^2}{\rho g}$$ και τελικά $$h_1 < \frac{P_{atm}}{\rho g} - \frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\frac{\upsilon_2^2}{g} \quad (6)$$

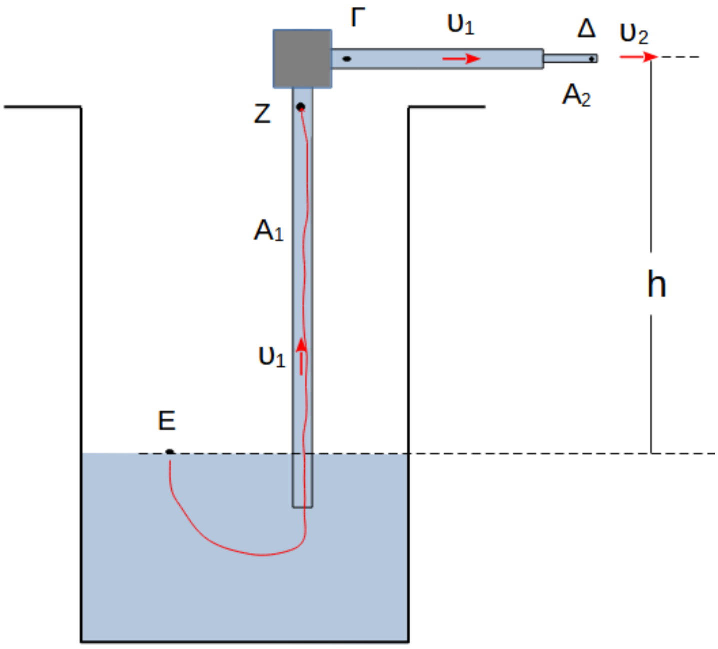
Στην περίπτωση που η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή, ισχύει δηλαδή $A_1=A_2=A$ και $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

(7) ➔ $h_1 < \frac{P_{atm}}{\rho g} - \frac{\upsilon^2}{2g}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Αντλία, αντλεί ρευστό απο πηγάδι βάθους **h=4 m** , με σωλήνα διατομής **A_1=20 cm^2**. Από το άκρο του σωλήνα το οποίο έχει στενότερη διατομή $A_2=\frac{A_1}{4}=5\,cm^2$, εξέρχεται με ταχύτητα **υ_2 = 20 m/s**.

Να βρείτε:



α) τον ρυθμό με τον οποίο η αντλία προσφέρει ενέργεια στο ρευστό (ισχύς της αντλίας).
β) την ταχύτητα υ_1 του ρευστού στο σωλήνα.
γ) την πίεση στα σημείο Ζ, και Γ. (είσοδος και έξοδος της αντλίας)

Λύση

α) Η ενέργεια (έργο), που η αντλία προσφέρει σε μία στοιχειώδη μάζα ρευστού Δm, μετατρέπεται σε:

- δυναμική ενέργεια Δmgh
- και κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2$ (κατα την τελική εξοδο απο το σωλήνα)

Τα παραπάνω εκφράζονται με την εξίσωση:

$\Delta W_{\alpha\nu\tau\lambda}=\Delta mgh+\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2$ οπότε $\frac{\Delta W_{\alpha\nu\tau\lambda}}{\Delta t}=\frac{\Delta m}{\Delta t}gh+\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon_2^2 \Rightarrow$

$P_{\alpha\nu\tau}=\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}gh+\frac{1}{2}\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}\upsilon_2^2$

και επειδή $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \Pi = A_2 \upsilon_2$

τελικά $P_{\alpha\nu\tau} = \rho g h A_2 \upsilon_2 + \frac{1}{2}\rho A_2 \upsilon_2^3$ = $10^3 \cdot 10 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 10^{-4}) 20 + \frac{1}{2} 10^3 5 \cdot 10^{-4} \cdot (2 \cdot 10)^3$ = **2400 W**

β) Απο την εξίσωση της συνέχειας

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \Rightarrow 4 A_2 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{\upsilon_2}{4} = \frac{20}{4} = 5\, m/s$$

γ)

Για το σημείο Ζ

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernouli απο ένα σημείο Ε της επιφάνειας του ρευστού στο πηγάδι (η οποία δεν κατέρχεται αλλά παραμένη σταθερή) έως το σημείο Ζ, όπου η ταχύτητα λόγω της συνέχειας θα είναι $\upsilon_Z = \upsilon_\Gamma = \upsilon_1 = 5\, m/s$. Έτσι:

$$P_{\alpha\tau\mu} = P_Z + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 \quad \Rightarrow \quad P_Z = P_{\alpha\tau\mu} - \rho g h - \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2$$

και αντικαθιστώντας: $P_Z = 10^5 - 0{,}4 \cdot 10^5 - 0{,}125 \cdot 10^5$ ή $P_Z = 0{,}475\, Atm$

Παρατήρηση: πρέπει να ισχύει $P_z > 0$

Για το σημείο Γ

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernouli σε μια ρευματική γραμμή, απο το σημείο Γ έως το σημείο Δ:

$P_\Gamma + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad P_\Gamma = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2$ και μετά τις πράξεις $P_\Gamma = 2{,}875\, Atm$

Παρατήρηση: Αν ο σωλήνας εξόδου είχε σταθερή διατομή, θα ίσχυε $\upsilon_1 = \upsilon_2$, οπότε η πίεση στο σημείο Γ θα προέκυπτε ίση με $P_{\alpha\tau\mu}$

δ) ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο ρευστό λόγω διαφοράς πίεσης στα σημεία Γ και Δ θα είναι:

$$\frac{(P_\Gamma - P_\Delta)\Delta V}{\Delta t} = (2{,}875 - 0{,}475) 10^5 \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{με} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \Pi = A_2 \upsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 20 = 10^{-3}\, m^3/s$$

οπότε $\frac{(P_\Gamma - P_\Delta)\Delta V}{\Delta t} = 240\, W$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (προσεχώς)