1ο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Καρδίτσας

Διανέμεται δωρεάν

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Περιστροφή της γης (Ιστορικό αρχείο του σχολείου)

Καρδίτσα 2022-2023

Προσανατολισμός

Ενότητα **1η:** Στοιχεία κυκλικής κίνησης

Ενότητα **2η:** Υπολογισμός ροπής δύναμης

Ενότητα **3η:** Ισορροπία στερεού

Ενότητα **4η:** Ροπή αδράνειας

Ενότητα **5η:** Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης
1η Κατηγορία ασκήσεων

Ενότητα **6η:** Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης
2η Κατηγορία ασκήσεων
3η Κατηγορία ασκήσεων

Ενότητα **7η:** Στροφορμή

Ενότητα **8η:** Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής

Ασκήσεις διαγωνισμών φυσικής.

Διαγωνίσματα

Συμπλήρωμα 1,2,3

1. Ασκήσεις πανελληνίων εξετάσεων.
2. Τι λέμε σήμερα για τη στατική τριβή και την τριβή ολισθήσεως
3. Προβλήματα

Πρόλογος

Η μηχανική του στερεού σώματος είναι μέρος της ύλης της φυσικής της Γ΄ Λυκείου, καθώς και σε πολλά τμήματα των Α.Ε.Ι. Στα τμήματα αυτά θα χρειασθούν αρκετά στοιχεία από το περιεχόμενο του βιβλίου, καθώς ο μαθηματικός φορμαλισμός πρέπει να έχει στοιχεία διαφορικού λογισμού, ολοκληρώματα, χρήση διανυσμάτων (διανυσματικός λογισμός). Επίσης αποτελεί τη φυσική συνέχεια της διδακτέας ύλης των προηγουμένων τάξεων της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Επειδή μεσολαβεί αρκετό χρονικό διάστημα έως και σήμερα γίνεται μια αναλυτική περιγραφή, σε θέματα όπως η κυκλική κίνηση, ο σχεδιασμός δυνάμεων, του έργου δύναμης, και της κινητικής ενέργειας.

Ο χωρισμός σε ενότητες διευκολύνει την διδακτική πορεία η οποία είναι προγραμματισμένη για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Κάθε ενότητα περιλαμβάνει ερωτήσεις που καλύπτουν το βάθος των εννοιών.

Επίσης προτείνεται συγκεκριμένη μεθοδολογία για την λύση των προβλημάτων, που ακολουθούν στο τέλος κάθε ενότητας. Αυτό βέβαια μπορεί να χαρακτηριστεί ότι βοηθάει τη μηχανική εκμάθηση και λειτουργία του μαθητή - φοιτητή. Σε εξεταστική διαδικασία όμως περιορισμένου χρόνου, η συγκρότηση της σκέψης βοηθά περισσότερο την αυτενέργεια του υποψηφίου.

Ο τελικός στόχος της προσπάθειας στο βιβλίο είναι να ακολουθήσει ο μαθητής – φοιτητής τη διδακτική πορεία μόνος του χωρίς πρόσθετη βοήθεια, για τις εξετάσεις του.

Καλή μελέτη στους Εξαιρετικούς μαθητές του τμήματος Φυσικής Προσανατολισμού Γ΄ Τάξης του ιστορικού σχολείου της πόλης μας.

Βαγενάς Αθανάσιος

Φυσικός MSc

Ενότητα $1^{η}$

1. **Πώς ορίζεται το υλικό σημείο, και σε τι μας εξυπηρετεί;**

Το υλικό σημείο είναι ένα υποθετικό σώμα που έχει όλες τι ιδιότητες της ύλης εκτός από τις διαστάσεις. Μας χρησιμεύει διότι μη έχοντας διαστάσεις έχει την δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.

2. **Τι λέμε μηχανικό στερεό;**

Σε ένα στερεό σώμα, αν του ασκηθούν δυνάμεις, τότε αυτό θα παραμορφωθεί μόνιμα η προσωρινά. Εκείνα, τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται μηχανικά στερεά. Έτσι όταν αναφερόμαστε σε στερεό θα εννοούμε μηχανικό στερεό.

3. **Για σώματα που έχουνε διαστάσεις να γραφτούν τα είδη κίνησης που μπορούν να εκτελέσουν.**

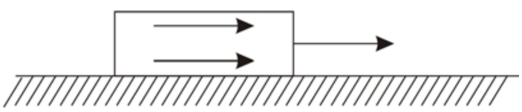
Πέρα από την μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελούν δηλαδή περιστροφική η στροφική κίνηση. Ακόμη μπορούν να κάνουν σύνθετη κίνηση, η οποία να είναι αποτέλεσμα μεταφορικής και στροφικής κίνησης, που γίνονται ταυτόχρονα.

4. **Ποια κίνηση ονομάζουμε μεταφορική ; Να διακριθεί ανάλογα με το είδος της τροχιάς του στερεού σώματος.**

Στην μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Από αυτή προκύπτει και το είδος της τροχιάς του σώματος, η οποία μπορεί να είναι ευθύγραμμη και καμπυλόγραμμη.

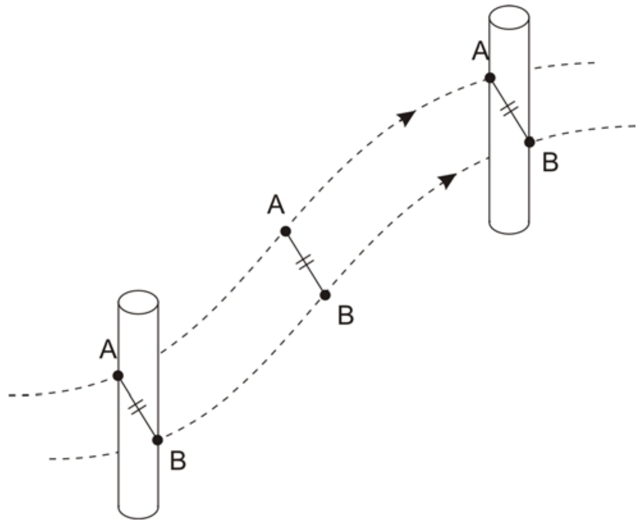
5. **Να αναφέρετε παράδειγμα μεταφορικής ευθύγραμμης κίνησης, καθώς και της καμπυλόγραμμης.**

Η κίνηση ενός κιβωτίου που ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο (σχ.1), είναι μεταφορική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα.



σχ. 1

Μεταφορική κίνηση μπορεί να είναι και η καμπυλόγραμμη κίνηση. Εδώ όμως θα αναρωτηθεί κανείς πως είναι δυνατόν δύο τυχαία σημεία Α και Β ενός σώματος που η τροχιά του είναι καμπυλόγραμμη να έχουν ίσες ταχύτητες. Αυτό μπορεί να γίνει αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο τυχαία σημεία μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. Η τροχιά του στερεού σώματος (κύλινδρος) που κάνει μεταφορική κίνηση είναι καμπύλη. (σχ.2)



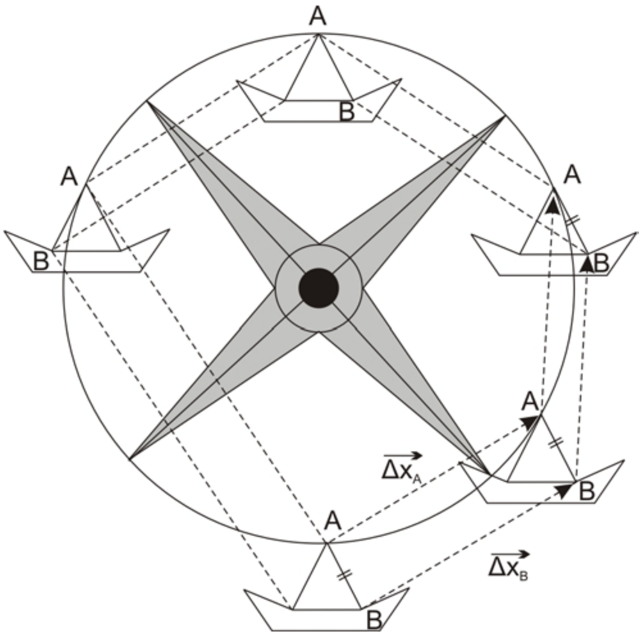
σχ. 2

6. **Για το στερεό σώμα που εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση. Να δικαιολογηθεί η μεταφορική κίνηση ενός σώματος, καθώς ένα ευθύγραμμο τμήμα του παραμένει διαρκώς παράλληλο προς τον εαυτό του.**

Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία Α και Β στερεού σώματος (σχ.3) τα οποία μετακινούνται για τα μικρά χρονικά διαστήματα $\overrightarrow{\Delta x_A}$ και $\overrightarrow{\Delta x_B}$ αντίστοιχα. Εφόσον το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία, μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό του, σε κάθε διαδοχική θέση του στερεού σώματος, η ταχύτητα του κάθε σημείου υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\vec{U} = \frac{\vec{\Delta} x}{\Delta t}, \quad \text{όπου} \quad \vec{U}_A = \frac{\vec{\Delta} x_A}{\Delta t}, \kappa\alpha\iota \quad \vec{U}_B = \frac{\vec{\Delta} x_B}{\Delta t}$$

Η μετατόπιση Δx_A είναι ίση με την μετατόπιση Δx_B , άρα και οι ταχύτητες είναι ίσες, για κάθε επόμενη θέση.



Σχ.3 :

Παρότι η ρόδα του λούνα Πάρκ εκτελεί κυκλική κίνηση ο Θαλαμίσκος όμως κάνει μεταφορική κίνηση. Να σημειωθεί εδώ ότι ο θαλαμίσκος μπορεί να έχει σε κάθε θέση διαφορετική ταχύτητα. Τα Α, Β όμως σε κάθε θέση έχουν την ίδια ταχύτητα $U_A = U_B$

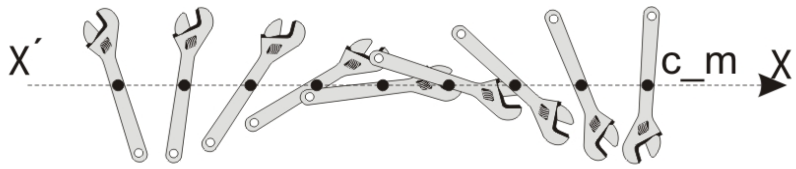
7. **Τι ονομάζουμε κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος, και σε τι μας χρησιμεύει;**

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος, ονομάζεται το θεωρητικό ή υποθετικό σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με συνολική μάζα ίση με την μάζα του στερεού σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Η έννοια του κέντρου μάζας απλοποιεί την μελέτη της κίνησης του στερεού σώματος.

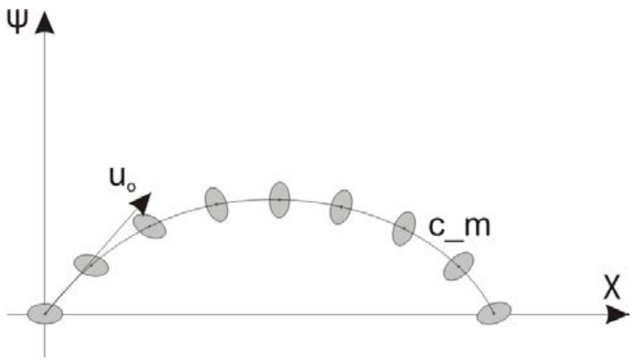
8. **Να αναφέρεις παραδείγματα της κίνησης του κέντρου μάζας στερεού σώματος.**

Εάν σπρώξουμε ένα κλειδί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, αυτό θα κινηθεί και θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση(εξαρτάται από το σημείο εκτός του c.m. που γίνεται το στιγμιαίο χρόνο Δt σπρώξιμο του σώματος). Το κέντρο μάζας του όμως, καθώς η συνολική δύναμη είναι μηδέν, θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. (σχ. 4)



σχ. 4

Επίσης, εάν βάλλουμε πλάγια ένα δίσκο, το κέντρο μάζας του θα εκτελέσει παραβολική τροχιά όπως και ένα υλικό σημείο που εκτοξεύεται με τον ίδιο τρόπο. (σχ.5)



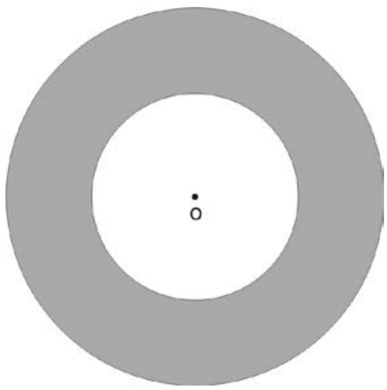
σχ. 5

9. Πώς βρίσκουμε το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων ;

Το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Η εύρεσή του, γίνεται με γεωμετρικούς υπολογισμούς. Έτσι το κέντρο μάζας ενός κύβου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και μιας σφαίρας είναι το κέντρο της.

10. Είναι δυνατόν το κέντρο μάζας να βρίσκεται σε σημείο έξω από το σώμα;

Μπορεί να βρίσκεται έξω από το σώμα. Όπως για παράδειγμα σε ένα ομογενή ισοπαχή δακτύλιο. Το κέντρο μάζας του βρίσκεται στο κέντρο του.



σχ. 6

11. Τι ονομάζουμε κέντρο βάρους ενός σώματος και πότε αυτό συμπίπτει με το κέντρο μάζας;

Κέντρο βάρους είναι το σημείο από το οποίο διέρχεται ο φορέας της δύναμης του βάρους του σώματος όπως και να το τοποθετήσουμε. Αν το σώμα βρίσκεται σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους του.

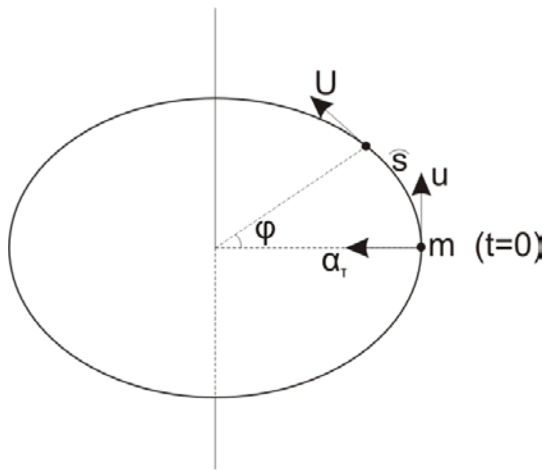
12. Πότε ένα σώμα εκτελεί στροφική κίνηση; Τι ονομάζουμε άξονα περιστροφής;

Στην στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει τον προσανατολισμό του. Σε αυτή την κίνηση υπάρχει μια ευθεία που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα, ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση. Αυτή αποτελεί τον άξονα περιστροφής του σώματος.

13. Να δοθεί ο ορισμός της ομαλής στροφικής κίνησης.

Εάν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω ενός σώματος που περιστρέφεται είναι σταθερή, λέμε ότι κάνει ομαλή στροφική κίνηση.

14. Να γραφούν οι ορισμοί των φυσικών μεγεθών που περιγράφουν την ομαλή κυκλική κίνηση. (σχ.7)



Ομαλή κυκλική κίνηση

σχ. 7

i. Ταχύτητα **u** σε μια τυχαία χρονική στιγμή **t**, ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει σημείο εφαρμογής το κινούμενο σώμα μάζας **m**, διεύθυνση εφαπτομένη της τροχιάς στο αντίστοιχο σημείο, φορά την φορά της κίνησης και μέτρο $\upsilon = \frac{\widehat{s}}{t}$ Όπου $\widehat{s}$

είναι το μήκος του τόξου που διανύει το σώμα σε χρόνο **t**. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το 1 **m/sec**.

ii. <u>Γωνία στροφής **φ**</u> ορίζεται ως το πηλίκο του μήκους του αντίστοιχου τόξου **s** προς την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Η μονάδα μέτρησης του είναι το **1 rad.**

$$\phi = \frac{s}{R}$$

iii. <u>Γωνιακή ταχύτητα **ω**</u> είναι το μέγεθος που περιγράφει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα. Είναι διανυσματικό μέγεθος που έχει την διεύθυνση του κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς στο κέντρο της και μέτρο :

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \text{ή} \quad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{\varphi - \varphi_o}{t - t_o}$$

Όπου φ η γωνία στροφής που διαγράφει η επιβατική ακτίνα στο χρόνο t. Η φορά του $\vec{\omega}$ βρίσκεται με το κανόνα της δεξιόστροφης βίδας. Καθώς περιστρέφεται, η φορά της «μύτης» της μας δείχνει την φορά του ω. Η μονάδα της είναι : 1 **rad / s**

iv. <u>Κεντρομόλος επιτάχυνση $\boldsymbol{a_T}$</u> έχει διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα του κινητού και εκφράζει τη μεταβολή της διευθύνσεως του διανύσματος υ της ταχύτητας ανά μονάδα χρόνου. Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση :

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau.} = \frac{U^2}{R}$$

Μονάδα μέτρησης είναι το **1 m / s ^{2}.**

15. **Να αποδείξετε :** $\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \acute{\eta}\ \omega = 2\pi f$

Από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας έχουμε :

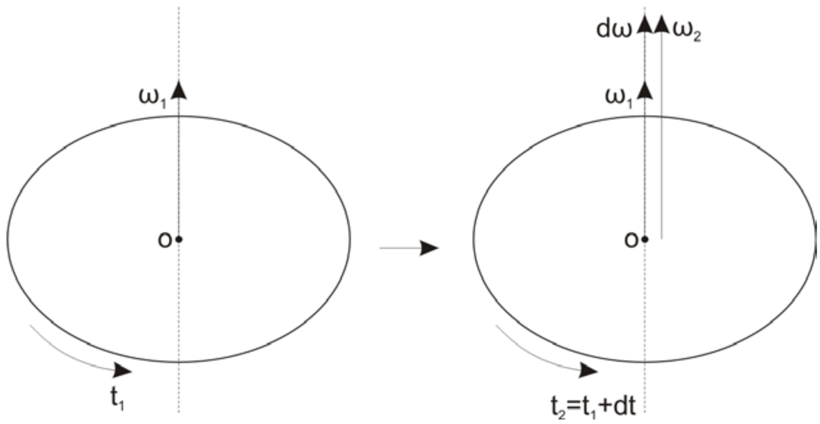
$$\omega = \frac{\Phi}{t}\,(1),\ \text{εάν}\ \Phi = 2\pi\ \text{τότε}\ t = T$$

επομένως εάν αντικαταστήσουμε στην (1) θα είναι :

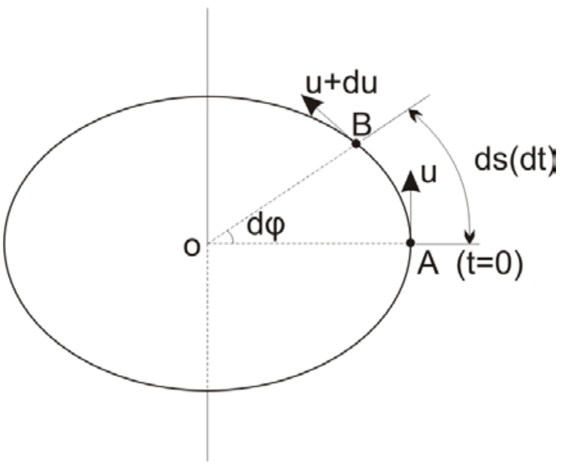
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=1/f} \omega = 2\pi f$$

16. Ποια στροφική κίνηση θα είναι μεταβαλλόμενη ;

Εάν υποθέσουμε ότι ένα στερεό σώμα σε μια χρονική στιγμή t, έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1, ενώ την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + dt$ η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται $\omega_2 = \omega_1 + d\omega$, θα λέμε ότι η κίνηση που εκτελεί είναι μεταβαλλόμενη. Οι εκφράσεις dt, dω, σημαίνουν πολύ μικρό χρόνο και μικρή μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας αντίστοιχα.



17. Να γράψετε τις γενικές εκφράσεις για τα μεγέθη που περιγράφουν την κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση.



i. Υλικό σημείο μετακινείται για πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt από το Α στο Β. θεωρούμε ότι για το μικρό διάστημα ds η ταχύτητα είναι υ + dυ. Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται από το πηλίκο :

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}(m/s)$$

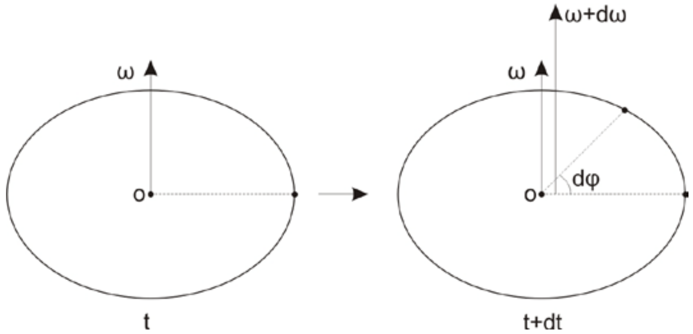
ii. <u>Η γωνία στροφής dφ</u> προκύπτει από την σχέση :

$$d\phi = \frac{ds}{R}(rad)$$

iii. <u>Η γωνιακή ταχύτητα ω</u> **κάθε** σημείου που στρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα περιστροφής, ορίζεται ως:

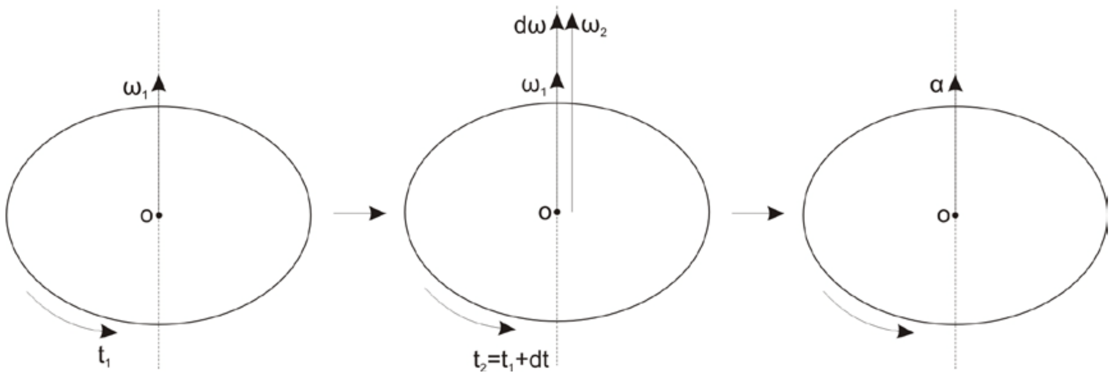
$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

Και είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς.



<u>Σχόλιο :</u> Η γραμμική ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα ορίζονται για ορισμένη μόνο θέση, παρ' ότι έχουμε πολύ μικρή μετακίνηση του σώματος, σε μικρό χρονικό διάστημα $dt \to 0$.

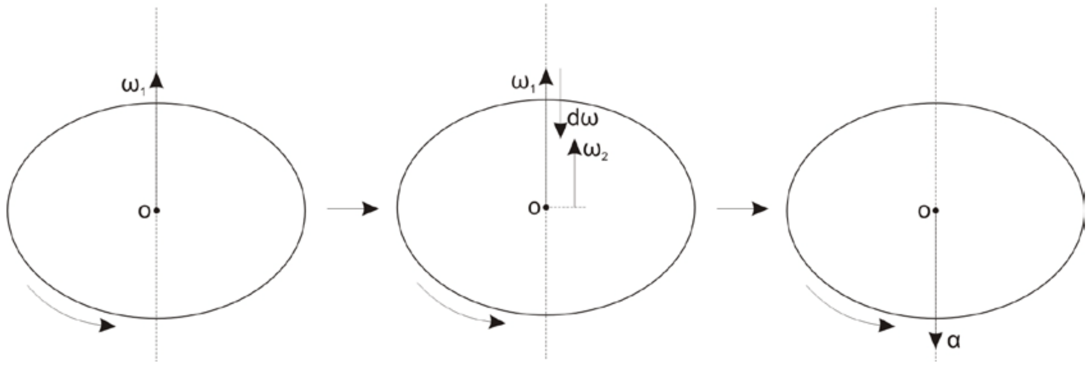
iv. Εάν υποθέσουμε ότι ο δίσκος του σχήματος έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 τη χρονική στιγμή t_1. Σε μια επόμενη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + dt$, η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται $\omega_2 = \omega_1 + d\omega$, δηλαδή αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα κατά dω.



Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος στο χρονικό διάστημα d t, ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος. Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος dω και μονάδα το 1 rad / s^2.

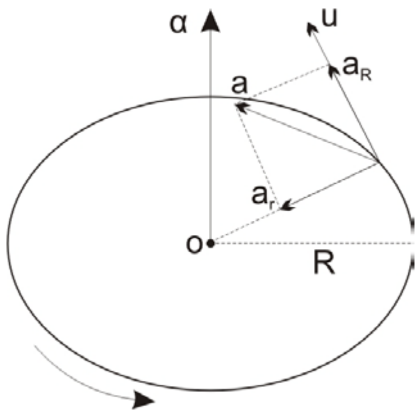
$$\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{d\omega}{dt} \quad \left(rad/s^2\right)$$

Εάν η γωνιακή ταχύτητα ελαττώνεται κατά dω τότε το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη φορά.



v. <u>Επιτρόχια επιτάχυνση **α$_R$**</u>, έχει την διεύθυνση της ταχύτητας και εκφράζει τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας ανά μονάδα χρόνου.

$$a_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.} = \frac{d\upsilon}{dt} \ \ \eta \ \mu o\nu \acute{\alpha} \delta \alpha \ \varepsilon \acute{\iota} \nu \alpha \iota \ \tau o \ 1 m/s^2$$



vi. Κεντρομόλος επιτάχυνση. Η κεντρομόλος επιτάχυνση α$_R$ έχει διεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση του κινητού και εκφράζει την μεταβολή της διεύθυνσης του διανύσματος υ της ταχύτητας, ανά μονάδα χρόνου.

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Είναι φανερό ότι :

$$\vec{a} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\pi\tau\rho.} \quad \kappa\alpha\iota \quad a = \sqrt{a^2_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + a^2_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.}}$$

18. Τι ονομάζουμε ομαλή μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση; Να γραφεί η σχέση που μας δίνει την γωνιακή επιτάχυνση σε κάθε χρονική στιγμή, και την γωνία στροφής φ.

Ομαλή μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση είναι αυτή που ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας παραμένει σταθερός. Έτσι μπορούμε να γράψουμε για δύο τυχαίες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 στις οποίες η γωνιακή ταχύτητα είναι ω_1 και ω_2 αντίστοιχα ότι :

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad ή \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

Αν $\alpha_{\gamma\omega\nu}>0$, τότε το στερεό πραγματοποιεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Αν $\alpha_{\gamma\omega\nu}<0$, το στερεό εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Η γωνία στροφής τότε είναι ίση με :

$$\phi = \omega_o t \pm \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

19. Να αποδειχθεί ότι στην ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση ($\alpha_{\gamma\omega\nu}>0$) αν την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η γωνιακή ταχύτητα είναι ω_0, τότε σε μια επόμενη χρονική στιγμή t η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu}\, t$.

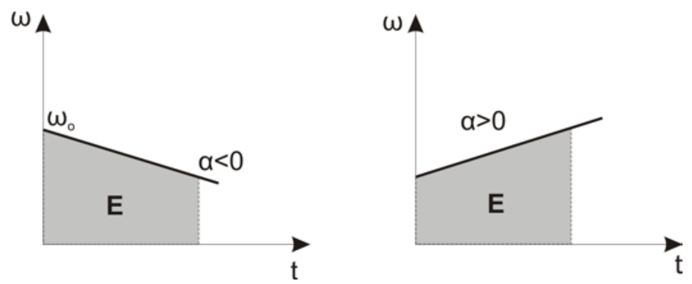
Ισχύει :

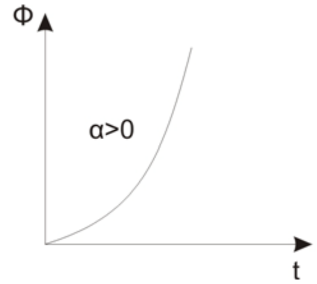
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow$$

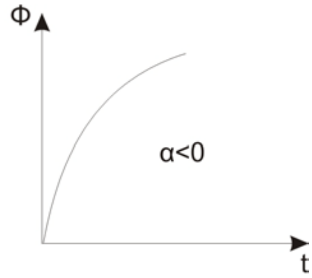
$$\rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = \omega - \omega_0 \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$$

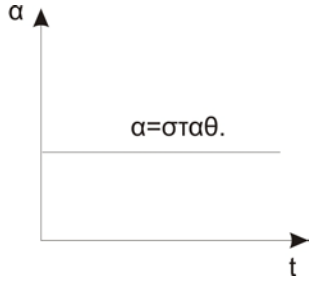
<u>Σχόλιο :</u> Αν το στερεό σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση ($\alpha_{\gamma\omega\nu}<0$), τότε η εξίσωση κίνησης είναι : $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}\, t$.

20. Να γίνει η γραφική παράσταση της προηγούμενης σχέσης και να εξαχθεί η εξίσωση για την γωνία στροφής.







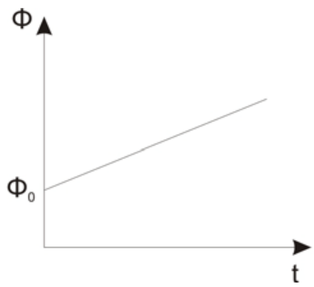


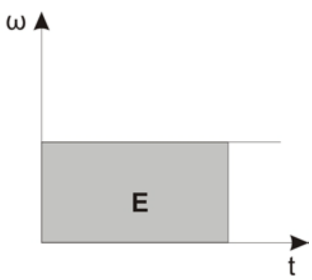
$$\phi = \omega_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

Το εμβαδόν εκφράζει τη γωνία στροφής φ αριθμητικά.

21. Ποια είναι η σχέση της γωνίας που διαγράφει ένα σώμα και της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση; Να γίνει η γραφική παράσταση φ – t, ω – t.

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\phi - \phi_0}{t - t_0} \rightarrow \phi - \phi_0 = \omega t \rightarrow \phi = \omega t + \phi_0$$





Το εμβαδόν αριθμητικά είναι ίσο με την γωνία φ.

22. Για ένα σώμα που στρέφεται να δείξετε ότι κάθε σημείο κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμική ταχύτητα που υπολογίζεται από την σχέση

$$\upsilon = \omega \cdot R$$

όπου R είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

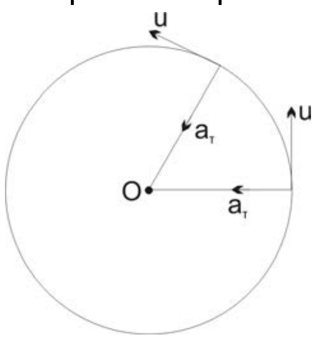
$$\text{Είναι} \quad d\phi = \frac{ds}{R} (1) \qquad \upsilon = \frac{ds}{dt} (2)$$

$$\text{και} \quad \omega = \frac{d\phi}{dt} \xrightarrow{(1)} \omega = \frac{ds/R}{dt} \rightarrow \omega = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} \xrightarrow{(2)} \omega = \frac{\upsilon}{R}$$

Σχόλιο : *Η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιαδήποτε στροφική κίνηση του στερεού σώματος.*

23. Η ομαλή στροφική κίνηση είναι επιταχυνόμενη ;

Παρ' ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό σε κάθε χρονική στιγμή t, αλλάζει όμως η φορά και η διεύθυνσή του. Για την αλλαγή αυτή υπεύθυνη είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση a_T.

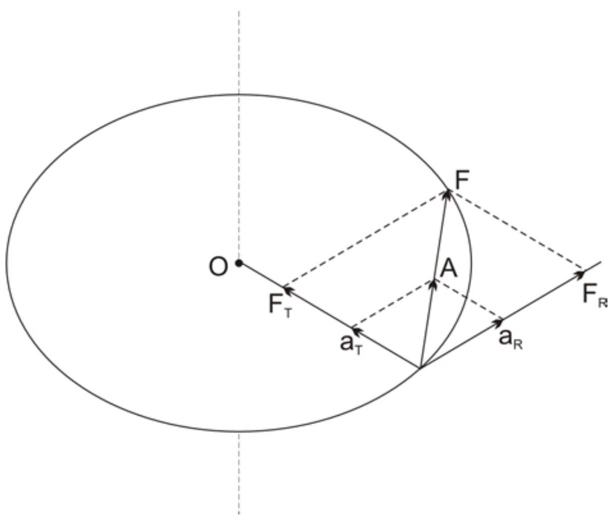


Επισημαίνω ότι η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή, ενώ η γωνιακή επιτάχυνση α είναι ίση με μηδέν.

24. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, να γραφούν οι εκφράσεις για την κεντρομόλο και την επιτρόχια δύναμη. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα που δείχνουν την κάθε δύναμη.

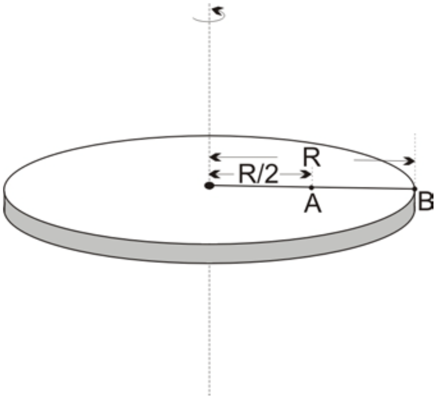
Η σχέση δύναμης και επιτάχυνσης είναι : F= m α. Έτσι για την επιτρόχια δύναμη είναι : $F_R = m\, a_R$

Και για την κεντρομόλο δύναμη : $F_T = m\, a_T$, ή $F_T = m\, U^2/ R$, ή $F_T = m\, \omega^2 R$, ($u = \omega R$) .



Σχόλιο : *Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι μια συγκεκριμένη δύναμη αλλά συνισταμένη μίας ή και περισσοτέρων δυνάμεων.*

25. Να συγκρίνετε τη γραμμική και τη γωνιακή ταχύτητα των σημείων Α και Β του στερεού σώματος που εκτελεί περιστροφική κίνηση.



I. Σε κάθε χρονική στιγμή $\omega_A = \omega_B = \dfrac{\Delta\phi}{dt}$, αφού και για τα δύο σημεία η γωνία στροφής $d\phi_A = d\phi_B = d\phi$, στον χρόνο dt .

II. Για τη γραμμική ταχύτητα $\upsilon = \omega \cdot r$, είναι $\upsilon_A = \omega \dfrac{R}{2}$ και $\upsilon_B = \omega \cdot R$ Άρα $\upsilon_B \rangle \upsilon_A$

26. Ποια η σχέση της γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και της επιτρόχιας $\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}$ χρησιμοποιώντας έννοιες από το διαφορικό λογισμό(παραγώγους).

Είναι: $\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.} = \dfrac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$ και $a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{d\omega}{dt} \quad (2),\ \ \upsilon = \omega \cdot R \quad (3)$

Από την $(1) \xrightarrow{(3)} \alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.} = \dfrac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \dfrac{Rd\omega}{dt} = Ra_{\gamma\omega\nu.} \rightarrow$

$$\boxed{\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R}$$

27. Στρεφόμενο σώμα διαγράφει συνολική γωνία στροφής φολ. Να βρεθεί ο αριθμός των στροφών που θα κάνει.

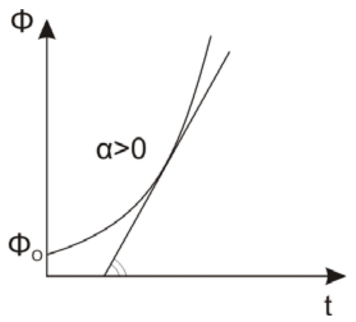
Είναι γνωστό ότι :

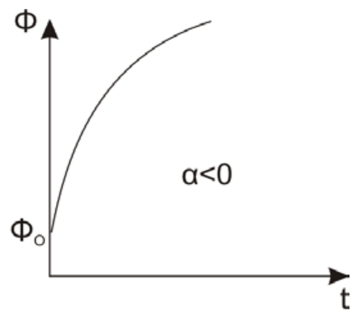
1 στροφή είναι 2π rad

Ν στροφές είναι Φ

$$\Big\| \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{\phi}{2\pi}}$$

28. Στην ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση να γίνει το διάγραμμα της γωνίας στροφής φ, για θετική και αρνητική γωνιακή επιτάχυνση με αρχική γωνιακή μετατόπιση $φ_0$ και στις δύο περιπτώσεις. Τι εκφράζει η κλίση της ευθείας ;



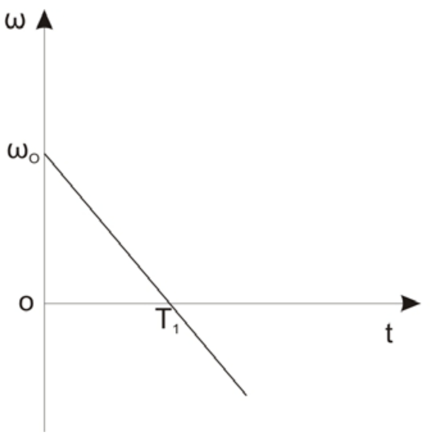


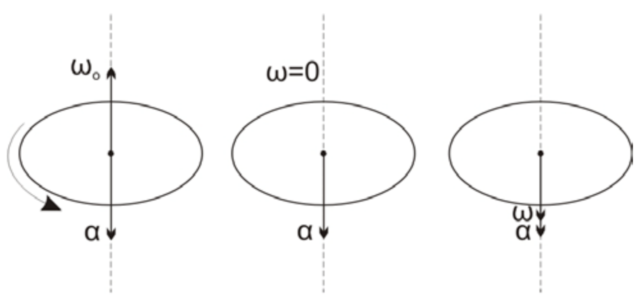
$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \phi = \phi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

Η κλίση σε κάθε χρονική στιγμή εκφράζει την γωνιακή ταχύτητα ω. $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$

29. Μπορεί ένα σώμα να έχει μια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα να είναι μηδέν και η γωνιακή επιτάχυνση διαφορετική από μηδέν;

Σώμα καθώς περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής, με γωνιακή ταχύτητα $ω_0$, και ελαττώνει την τιμή της με σταθερό ρυθμό. Κάποια χρονική στιγμή t, μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα ω και αρχίζει να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό η τιμή της, με αντίθετη φορά. Τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν, η γωνιακή επιτάχυνση είναι διάφορη του μηδενός.





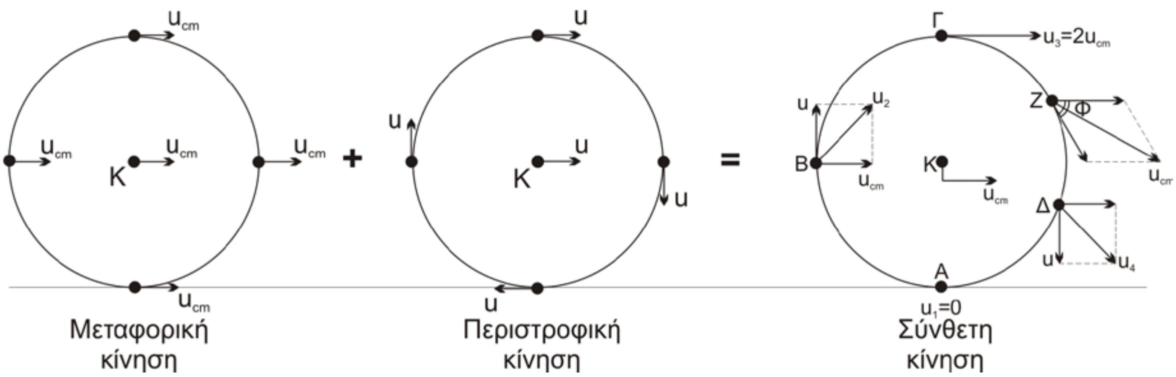
30. Πότε λέμε ότι ένα σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση; Να αναφέρετε ένα παράδειγμα. Πώς μπορεί να μελετηθεί η κίνηση αυτή;

Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο κυλιόμενος τροχός. Η σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο ή περισσότερων κινήσεων, στις οποίες μπορώ να γράφω τις εξισώσεις της κάθε κίνησης χωριστά. Δηλαδή οι εξισώσεις που περιγράφουν την μία κίνηση είναι ανεξάρτητες από αυτές της άλλης.

31. Να μελετηθεί η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού σε οριζόντιο επίπεδο ως αποτέλεσμα μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης. Στην περίπτωση αυτή δεν θα έχουμε ολίσθηση του τροχού.

Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης (Ucm) και της ταχύτητας λόγω περιστροφής.

Έτσι θα έχουμε για το κάθε σημείο που φαίνεται στο σχήμα



$$Δ: \upsilon_4 = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_{cm}^2} = \sqrt{2\upsilon_{cm}^2} = \upsilon_{cm}\sqrt{2}$$

$$Γ: \upsilon_2 = \upsilon + \upsilon_{cm} = 2\upsilon_{cm}$$

$$A: \upsilon_1 = \upsilon_{cm} - \upsilon = 0$$

$$B: \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_{cm}^2}$$

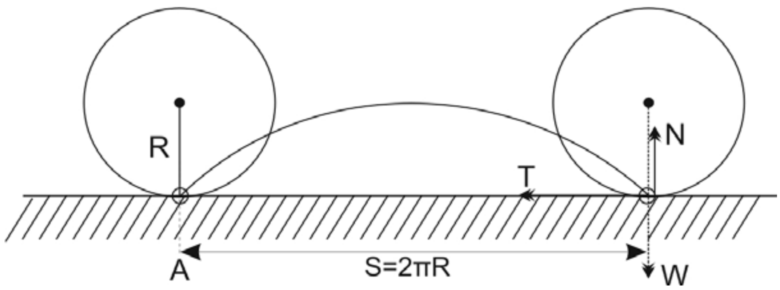
$$Z: \upsilon_5 = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_{cm}^2 + 2\upsilon \cdot \upsilon_{cm} συνφ}$$

Από το σημείο K διέρχεται ο άξονας περιστροφής του τροχού ο οποίος δεν έχει σταθερή θέση και όπως είναι γνωστό τα σημεία του δεν εκτελούν στροφική κίνηση.

Παρατηρούμε ότι μόνο το σημείο Κ έχει μεταφορική ταχύτητα Ucm, καθώς οι παραπάνω κινήσεις πραγματοποιούνται μαζί. Αυτό το ονομάζουμε κέντρο μάζας του σώματος (c.m.). Έτσι γράφουμε όλες τις εξισώσεις για την μεταφορική κίνηση, θεωρώντας το σώμα ως υλικό σημείο στη θέση Κ.

32. Αν στην περιφέρεια κυλιόμενου τροχού τοποθετηθεί μια μικρή φωτεινή πηγή, ποια θα είναι η τροχιά της; Και ποια η απαραίτητη προϋπόθεση για να έχουμε μόνο κύλιση του τροχού;

Η φωτεινή πηγή έχει τοποθετηθεί στη θέση Α. Για να έχουμε μόνο κύλιση του τροχού και όχι ολίσθηση, πρέπει η μεταφορική ταχύτητα Ucm, να είναι για κάθε χρονική στιγμή ίση με την ταχύτητα περιστροφής ω R. Έτσι το σημείο Α σε μια περίοδο θα μετακινηθεί κατά διάστημα S = 2 π R, και η τροχιά του είναι κυκλοειδής καμπύλη όπως στο σχήμα.



33. Να αποδείξετε ότι στον κυλιόμενο τροχό ισχύει:

$$\boxed{\upsilon_{cm} = \upsilon}$$

Αφού ο τροχός δεν ολισθαίνει, όσο διάστημα μετακινείται, το ίδιο διάστημα θα διαγράφει το κατώτερο σημείο του τροχού κατά το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. (σχήμα, ερώτηση 34).

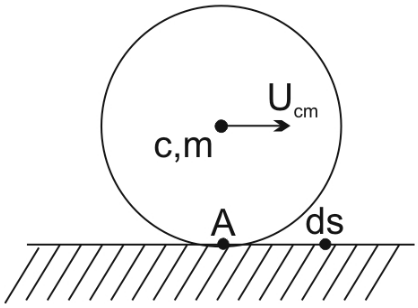
Έτσι:

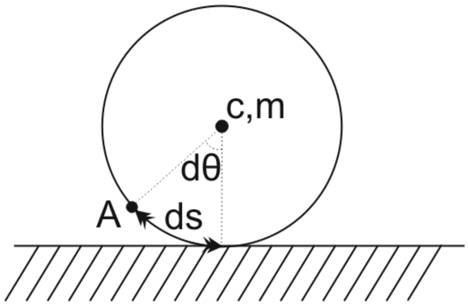
$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{cm} &= \frac{ds}{dt} \quad (1) \\ \upsilon &= \frac{d\widehat{s}}{dt} \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{cm}$$

$$d\widehat{s} = ds$$

34. Να αποδείξετε ότι κατά την κύλιση του τροχού ισχύει

$$\boxed{\upsilon_{cm} = \omega \cdot R}$$



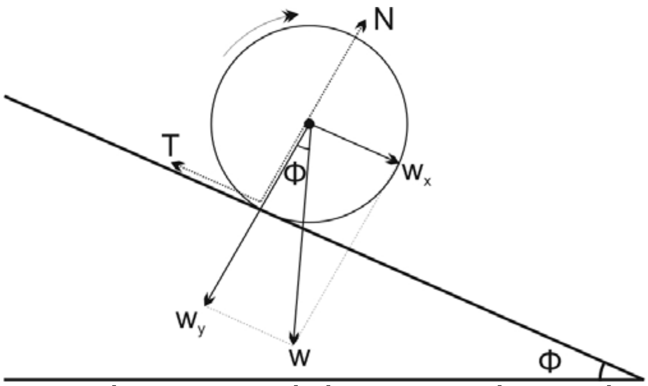


Όταν το κέντρο μάζας μετακινηθεί κατά ds, κάθε σημείο της περιφέρειας στρέφεται κατά το ίδιο τόξο. Έτσι :

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{cm} &= \frac{ds}{dt} \\ d\theta &= \frac{ds}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{Rd\theta}{dt} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot R$$

35. Εάν αφήσουμε ένα τροχό, να κυλήσει σε κεκλιμένο επίπεδο, τι είδους κινήσεις θα εκτελέσει; Η αρχική γωνιακή ταχύτητα είναι ω_0 = 0. Η κίνηση πραγματοποιείται χωρίς ολίσθηση. Να γραφούν οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνησή του.

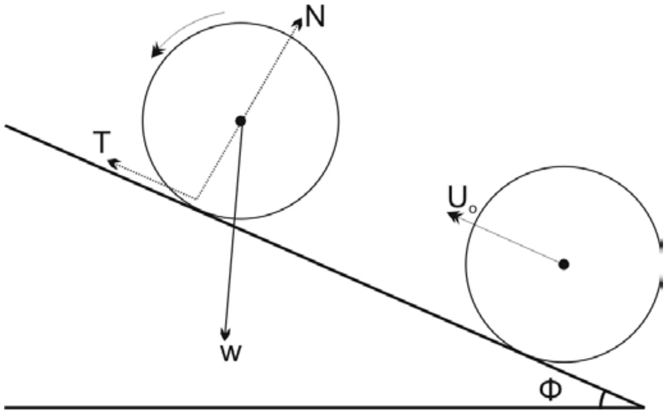
Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού αυξάνεται, έχει δηλαδή γωνιακή επιτάχυνση. Το κέντρο μάζας εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση η οποία είναι ομαλά



επιταχυνόμενη. Απαραίτητα και εδώ έχουμε τριβή μεταξύ του τροχού και του εδάφους.

36. Σφαίρα κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο. Στην πορεία της συναντά τη βάση κεκλιμένου επιπέδου. Τι είδους κινήσεις θα

εκτελέσει; Η κίνηση της σφαίρας πραγματοποιείται χωρίς ολίσθηση.



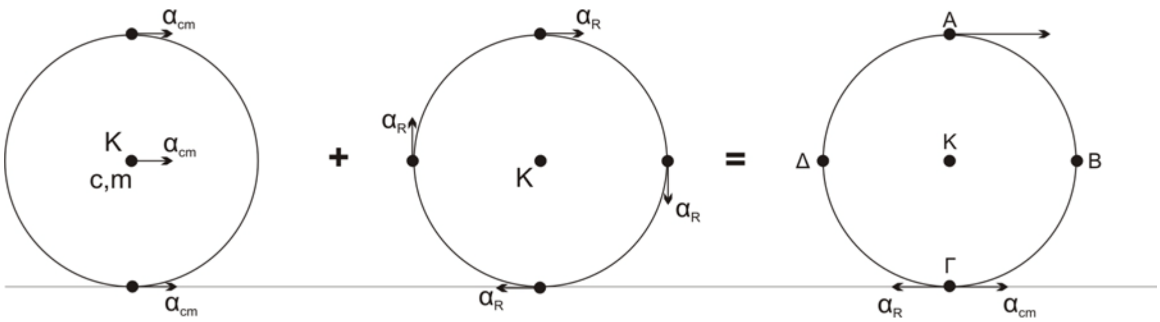
Το εντυπωσιακό που βλέπουμε εδώ είναι ότι η τριβή έχει την φορά της κίνησης του σώματος. Βοηθά δηλαδή την πραγματοποίηση της μεταφορικής κίνησης του σώματος. Αυτό είναι μοναδικό!!! Συμβαίνει γιατί θα πρέπει το κυλιόμενο σώμα να εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση αρνητική (α<0). Επομένως συνολικά εμποδίζει την συνεχόμενη κίνηση του σώματος.

37. Να δειχθεί ότι εάν ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και συγχρόνως ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση με θετική ή αρνητική επιτάχυνση, θα ισχύει

$$\boxed{a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu.} \cdot R}$$

$$\upsilon_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

38. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση κάθε σημείου του τροχού του παρακάτω σχήματος, που εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση.



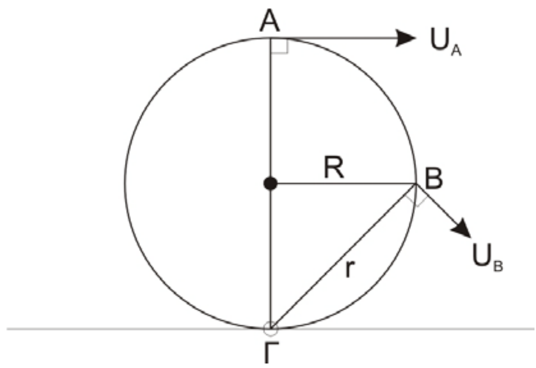
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσθετική ιδιότητα, για να υπολογίσουμε την συνολική επιτάχυνση κάθε σημείου του τροχού. Έτσι:

$$A: \vec{\alpha}_A = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_R \Rightarrow a_A = a_{cm} + a_R \Rightarrow a_A = 2a_{cm}$$

$$\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = a_R$$

$$\Gamma: \vec{\alpha}_\Gamma = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_R \Rightarrow a_\Gamma = a_{cm} - a_R = 0$$

39. Αν θεωρήσουμε στον τροχό του παρακάτω σχήματος ένα στιγμιαίο άξονα περιστροφής ο οποίος διέρχεται από το σημείο Γ, τότε κάθε σημείο του κυλιόμενου αυτού τροχού θα εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από αυτόν. Να σχεδιάσετε την ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού και να υπολογίσετε την τιμή της από την σχέση u= ω r.



Ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής μετακινείται στον χώρο. Αφού τα σημεία του τροχού μετακινούνται γύρω από αυτόν με την ίδια γωνιακά ταχύτητα ω, τότε η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού υπολογίζεται από την σχέση u = ω r, όπου r η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Η ταχύτητα είναι πάντοτε κάθετη στην απόσταση r. Έτσι στις θέσεις A και B θα είναι:

$$\upsilon_A = \omega \cdot 2R$$

$$\upsilon_B = \omega \cdot r = \omega \cdot \sqrt{R^2 + R^2} = \omega \cdot \sqrt{2R^2} = \omega \cdot R\sqrt{2} = \upsilon_{\pi\varepsilon\rho}\sqrt{2} = \upsilon_{cm}\sqrt{2}$$

40. Τι σημαίνει η έκφραση η οποία αναφέρεται σε δίσκο πικάπ, που είναι ιστορικός πλέον, ότι είναι 45 στροφών;

Η μουσική η οποία ακούγεται από την ηλεκτρική συσκευή του πικάπ, παράγεται με την βοήθεια της περιστροφικής κίνησης του δίσκου στο πικάπ γύρω από ένα σταθερό μεταλλικό άξονα, ενώ στην επιφάνεια του δίσκου, ακουμπά μία βελόνη. Η παραπάνω έκφραση οφείλεται στην συχνότητα περιστροφής του δίσκου αυτού. Δηλαδή ο δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα :

$$f = \frac{45\sigma\tau\rho o\phi\acute{\varepsilon}\varsigma}{1\min} \;\acute{\eta}\; f = \frac{45}{60}Hz$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

41. **Δίσκος περιστρέφεται με 45 στροφές/ min. Δύο σημεία Α, Β του δίσκου απέχουν από το κέντρο του αποστάσεις R_A = 4 cm, R_B = 12 cm. Με τι ισούται αριθμητικά :**

i. ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων ω_A/ω_B, των σημείων αυτών;

Α) 3

Β) 1

Γ) 1/3

Δ) 1/9

ii. ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων u_A/u_B, των σημείων αυτών;

Α) 3

Β) 1

Γ) 1/3

Δ) 1/9

iii. ο λόγος των κεντρομόλων επιταχύνσεων $a_{T(A)}/a_{T(B)}$, των σημείων αυτών;

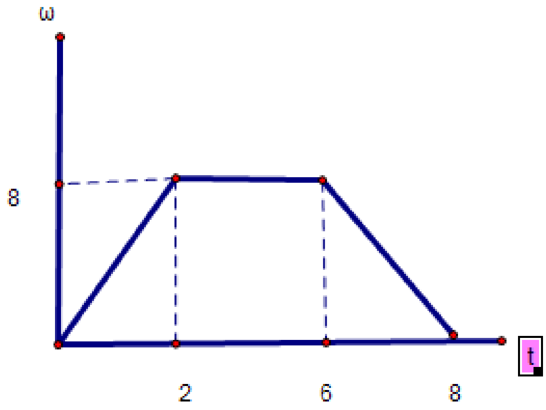
Α) 3

Β) 1

Γ) 1/3

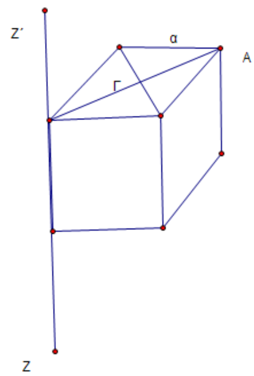
Δ) 1/9

42. **Η γωνιακή ταχύτητα ενός στερεού σώματος μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα.**



i. **Να δείξετε ότι ο αριθμός των περιστροφών στα χρονικά διαστήματα Δt_1=0-2 s και Δt_2=6-8 s, είναι ο ίδιος.**
ii. **Τι εκφράζει το εμβαδόν του διαγράμματος;**
iii. **Να υπολογίσετε την γωνιακή επιτάχυνση στα χρονικά διαστήματα 0-2 s, 2-6 s και 6-8 s.**
iv. **Να γίνουν τα διαγράμματα της γωνιακής επιτάχυνσης-χρόνου, και της γωνίας στροφής φ σε σχέση με το χρόνο.**

43. Κύβος στρέφεται γύρω από άξονα zz΄ . Για τα σημεία Α και Γ να σχεδιάσετε και να συγκρίνεται τα επόμενα μεγέθη :



i. **Γωνιακή ταχύτητα**
ii. **Γωνιακή επιτάχυνση**
iii. **Γραμμική ταχύτητα**
iv. **Κεντρομόλος επιτάχυνση**
v. **Επιτρόχια επιτάχυνση**

44. **Μια ράβδος ΟΑ=L περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το άκρο της Ο που είναι στερεωμένο σε σταθερή θέση Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;**

i. Όλα τα σημεία της ράβδου έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

ii. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου Α είναι διπλάσιο από το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του μέσου Μ της ράβδου.

iii. Αν δύο σημεία Γ και Δ απέχουν από το Ο αποστάσεις r_1 και r_2 αντίστοιχα θα ισχύει η σχέση $υ_1\, r_1 = υ_2\, r_2$.

iv. Η γραμμική ταχύτητα του άκρου Ο είναι μηδέν.

v. Το μέσο Μ και το σημείο Α σε χρόνο t, έχουν διανύσει ίσες αποστάσεις.

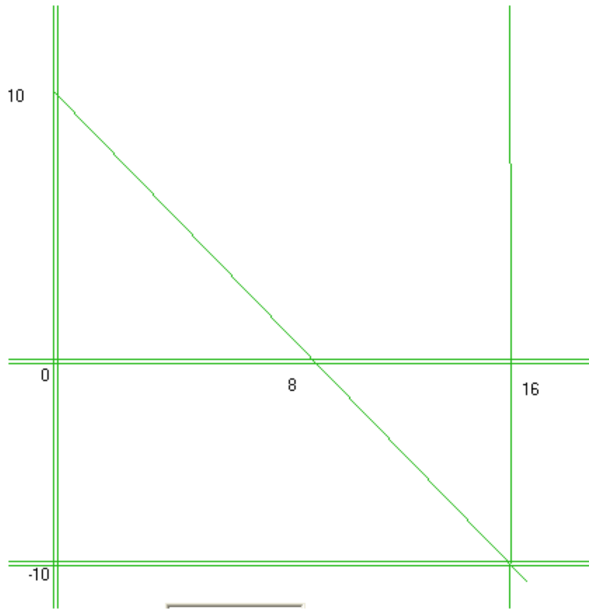
45. **Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα υ.**

i. **Ποια θα είναι η μεταβολή στο μέτρο της γραμμικής ταχύτητας μετά από χρόνο t=T/2;**

ii. **Ποιο είναι το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας μετά από χρόνο t=T/2;**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

46. Σε ένα στρεφόμενο σώμα η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο όπως στο παρακάτω σχήμα :

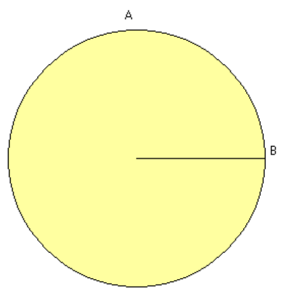


i. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης του τροχού στα χρονικά διαστήματα 0-8 και 8-16 s.
ii. Να υπολογιστεί η συνολική γωνία στροφής.
iii. Όταν μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση.
iv. Να γίνει η γραφική παράσταση φ – t
v. Να υπολογισθεί η γωνιακή επιτάχυνση σε κάθε χρονικό διάστημα και να γίνει η γραφική παράσταση α – t.

47. Ένας τροχός που έχει ακτίνα 20 cm, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 2 rad/s. Σε κάποια στιγμή ο τροχός αρχίζει να επιβραδύνεται και μετά από 2 s ηρεμεί. Να υπολογισθούν

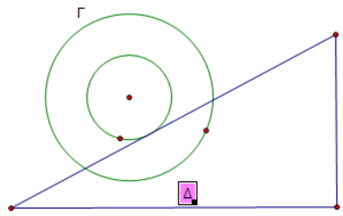
i. Η γωνιακή επιβράδυνση
ii. Ο αριθμός των περιστροφών στα 2 s.
iii. Η ολική επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται.

48. Ποδήλατο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα μέτρου u=10m/sec. Η ακτίνα του κάθε τροχού είναι R=0,2 m. Να βρείτε την ταχύτητα :



i. Του κέντρου Κ του τροχού
ii. Του σημείου Β της περιφέρειας του τροχού και του σημείου Α.
iii. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω.

49. Ο άξονας (Ο) του καρουλιού του σχήματος καθώς κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο έχει ταχύτητα u = 5 m/sec και επιτάχυνση a_{cm} = 4 m/ s^2 σε μια τυχαία χρονική στιγμή χρονική στιγμή t. Οι ακτίνες των κυλίνδρων είναι r = 0.2 m και R = 0.4 m αντίστοιχα, να βρείτε τη χρονική στιγμή t, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις των αντιδιαμετρικών σημείων του τροχού Γ και Δ. Το καρούλι εκτελεί κύλιση.



50. Δίσκος εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu}$= 0,4 (rad/ s^2), και η γωνιακή ταχύτητα είναι ω_1= 0,8 (r/s) την χρονική στιγμή t_1. Εάν στο χρονικό διάστημα t_1 έως το t_2 , ένα σημείο της περιφέρειας γράφει τόξο π/4 rad, όπου t_2 μια επόμενη χρονική στιγμή, να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα ω_2 σε αυτή την χρονική στιγμή.

51. Δίσκος πικάπ 45 στροφών περιστρέφεται. Όταν διακόψουμε το ηλεκτρικό ρεύμα αυτός επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό 4π / 30 rad/s^2. Μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει να στρέφεται ο δίσκος και τι γωνία θα έχει διαγράψει;

52. Ένα υλικό σημείο που έχει μάζα m=0.2 Kg κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R = 0.5 m με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0= 4 rad/sec. Το υλικό αυτό σημείο αρχίζει να επιταχύνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α= 12 rad/sec^2. Να βρεθεί η συνολική δύναμη που ενεργεί πάνω του μετά από χρόνο t = 1 sec από τη στιγμή που άρχισε να επιταχύνεται.

53. Τροχός διαμέτρου 40 cm επιταχύνεται ομαλά από την ηρεμία με συχνότητα 7000 στροφές / min σε χρονικό διάστημα 1,2 sec.

- **i.** Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση ;
- **ii.** Να κάνετε την γραφική παράσταση ω (t) , τι δείχνει η κλίση της και τι το εμβαδόν της ;
- **iii.** Πόσες στροφές θα έχει κάνει ο τροχός έως τη στιγμή που έφτασε αυτή τη συχνότητα.

54. Ο ωροδείκτης ενός ρολογιού τοίχου μετατοπίζεται κατά Δs = 1,57 mm σε χρόνο t = 1 min. Να υπολογίσετε :

- **i.** Το μήκος του ωροδείκτη

ii. Την γραμμική ταχύτητα του μέσου του. Τι παρατηρείτε για την τιμή της ; Δίνεται π = 3,14

55. Ένας δίσκος αρχίζει να στρέφεται με κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη και γωνιακή επιτάχυνση $α_1$ = 1 rad/sec^2 . Αφού εκτελέσει 10 στροφές αρχίζει να επιβραδύνεται με γωνιακή επιβράδυνση $α_2$. Ο δίσκος σταματά μετά από 2 στροφές. Να υπολογιστεί η $α_2$. (Απάντηση : $α_2$ = 5 rad/sec^2).

56. Υλικό σημείο κινείται σε περιφέρεια με ακτίνα R = 0.4 m, με κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη. Σε κάποια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητά του είναι 2,5 rad/sec και η γωνιακή του επιτάχυνση 2 rad/sec^2 . Να υπολογιστούν :

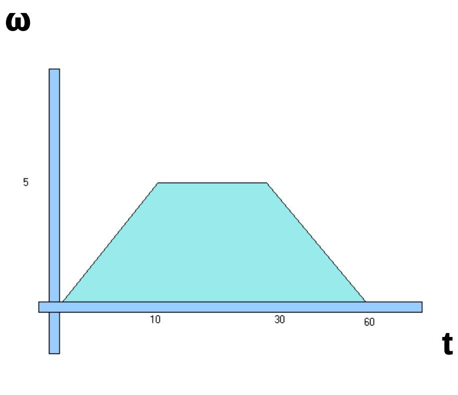
i. Η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση

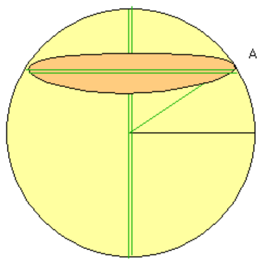
ii. Η ολική επιτάχυνση την παραπάνω χρονική στιγμή

iii. Να σχεδιάσετε όλα τα διανυσματικά μεγέθη.

(Απαντήσεις : 0,8 rad/sec^2 - 2,5 rad/sec^2 - 2,6 rad/sec^2).

57. Η γωνιακή ταχύτητα μιας σφαίρας ακτίνας R = 10 cm που στρέφεται γύρω από μια διάμετρός της δίνεται από το σχήμα.





A. Να γίνουν τα διαγράμματα :

i. Της γωνιακής επιτάχυνσης της σφαίρας.

ii. Του μέτρου της ταχύτητας u_A ενός σημείου της επιφάνειας της σφαίρας για το οποίο η ευθεία που το ενώνει με το κέντρο σχηματίζει με τον άξονα περιστροφής γωνία $θ=30^0$.

iii. Του μέτρου της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Α

B. Ποιες χρονικές στιγμές η γωνιακή ταχύτητα είναι 2 rad/s ;

C. Να υπολογιστεί η γωνία που διαγράφει το στερεό από την χρονική στιγμή t = 0 ως την στιγμή που ακινητοποιείται.

58. Να ξέρεις να ερμηνεύεις τα παρακάτω θέματα.

1. Τι είναι το υλικό σημείο και τι το μηχανικό στερεό.
2. Παραδείγματα μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης.
3. Τα στοιχεία περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης όπως είναι ο άξονας περιστροφής, η γωνιακή ταχύτητα, η γωνιακή επιτάχυνση και το κέντρο μάζας σε γεωμετρικά σχήματα.
4. Τι είναι η σύνθετη κίνηση. (Εφαρμογή η κύλιση του τροχού.)

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

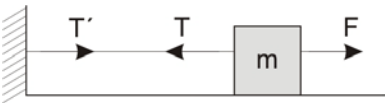
Γραμμικά μεγέθη		**Γωνιακά Μεγέθη**
S	$\boxed{S=\varphi\cdot R}$	**φ**
υ	$\boxed{\upsilon=\omega\cdot R}$	**ω**
Επιτρόχια Επιτάχυνση a_R		Κεντρομόλος επιτάχυνση $a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}=\frac{\upsilon^2}{R}=\omega^2\cdot R$
	$\boxed{a_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$	
Μεταφορική Επιτάχυνση a_{cm}		$a_{\gamma\omega\nu.}$
$U=U_O\pm a_{cm}\cdot t$ $S=U_Ot\pm\frac{1}{2}a_{cm}\cdot t^2$ $U=\sqrt{U_O^2\pm 2a_{cm}\cdot S}$		$\omega=\omega_O\pm a\cdot t$ $\phi=\omega_Ot\pm\frac{1}{2}a\cdot t^2$ $\omega=\sqrt{\omega_O^2\pm 2a\cdot\phi}$
Στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση Υπολογισμός ολικού χρόνου μέχρι να σταματήσει $t_{o\lambda}=\frac{U_O}{a_{cm}}$ και του διαστήματος $S_{o\lambda}=\frac{U_O^{\ 2}}{2a_{cm}}$		$t_{o\lambda}=\frac{\omega_O}{a}$ $\phi_{o\lambda}=\frac{\omega_O^2}{2a}$

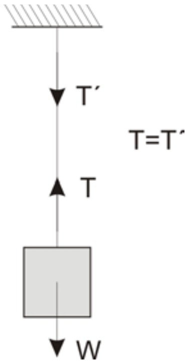
Ενότητα $2^{η}$

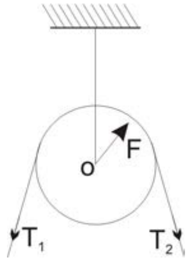
1. Πως σχεδιάζουμε δυνάμεις στα παρακάτω εικονιζόμενα σχήματα.

i. Τάση του νήματος T

Τροχαλία



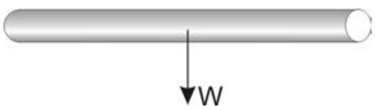




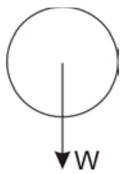
T_1,T_2 τάση του νήματος

ii. Το βάρος w στα ομογενή σώματα το σχεδιάζουμε στο γεωμετρικό τους κέντρο.

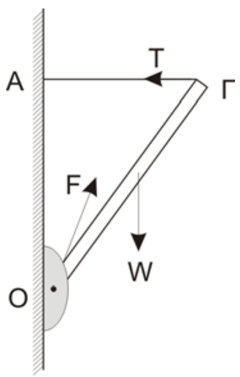
Ράβδος

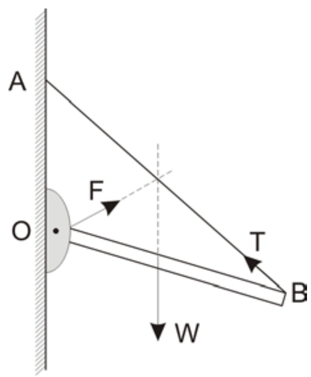


Σφαίρα

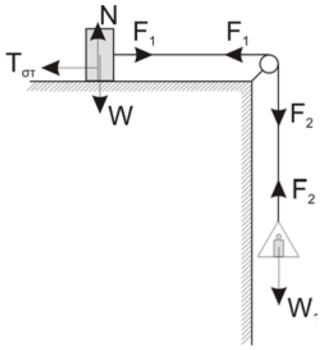


Στην άρθρωση η δύναμη **F** που ασκείται στο στερεό σώμα σχεδιάζεται σε τυχαία διεύθυνση. Η τάση του νήματος **T** έχει την διεύθυνση του νήματος. Το βάρος w είναι πάντοτε κατακόρυφο και περνά από το γεωμετρικό κέντρο. Στα παρακάτω σχήμα εικονίζεται ράβδος στερεωμένη σε άρθρωση Ο στο ένα άκρο, ενώ το άλλο άκρο είναι δεμένο με σχοινί σταθερά στη θέση Α.





iii. Στατική τριβή :

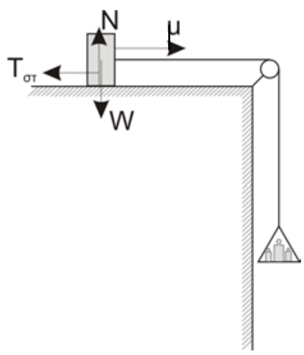


Το σώμα στο οριζόντιο επίπεδο δεν κινείται. Η οριζόντια δύναμη (Τστ) που εμποδίζει την κίνησή του σώματος ονομάζεται στατική τριβή.

Τριβή ολίσθησης: Αν στο δίσκο προσθέσω και άλλα βάρη τότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται μετά από κάποια χρονική στιγμή. Η οριζόντια δύναμη που εμποδίζει την κίνηση του σώματος λέγεται Τολ, τριβή ολισθήσεως και δίνεται από τη σχέση:

$$T_{ολ} = \mu \cdot N, \text{ όπου } \quad N = W = m \cdot g$$

όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής.

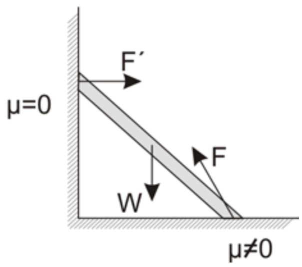


<u>Σχόλιο :</u> Η σχέση μεταξύ της στατικής τριβής και της τριβής ολίσθησης εκφράζεται από την ανισότητα

$$T_{στ} < T_{ολ}$$

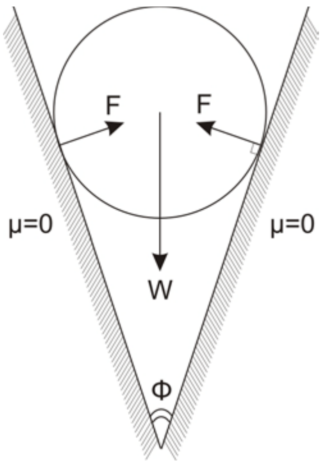
Στα προβλήματα χρησιμοποιείται η οριακή περίπτωση

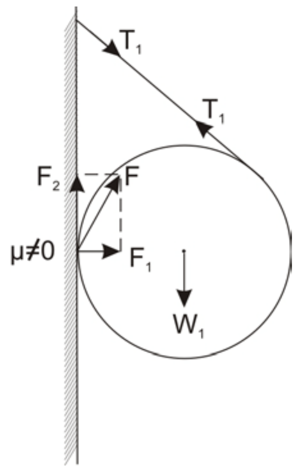
$$T_{στ} = T_{ολ} = \mu \cdot N$$



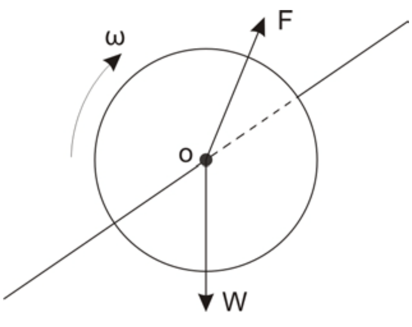
Στο σχήμα, ράβδος είναι τοποθετημένη σε γωνία τοίχου. Ο κατακόρυφος είναι λείος (μ=0), ενώ ο οριζόντιος έχει τριβή ($\mu \neq 0$). Στον κατακόρυφο τοίχο η ασκούμενη δύναμη F΄ σχεδιάζεται κάθετα σ’ αυτόν. Ενώ στο οριζόντιο επίπεδο σχεδιάζεται πλάγια και αναλύεται, σε συνιστώσες όπως θα δούμε ($F_X = \mu \cdot F_\Psi$) .

Στα παρακάτω σχήματα σφαίρα είναι τοποθετημένη σε γωνία όπου οι πλευρές είναι λείες. Καθώς επίσης σφαίρα δεμένη με σχοινί σταθερά στερεωμένο, ακουμπά πάνω σε κατακόρυφο τοίχο όπου έχουμε τριβή. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην κάθε σφαίρα φαίνονται στα σχήματα.





iv. Στρεφόμενος τροχός :

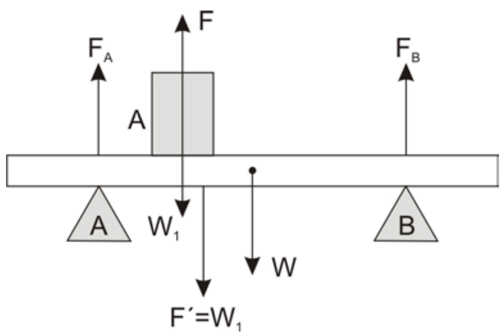


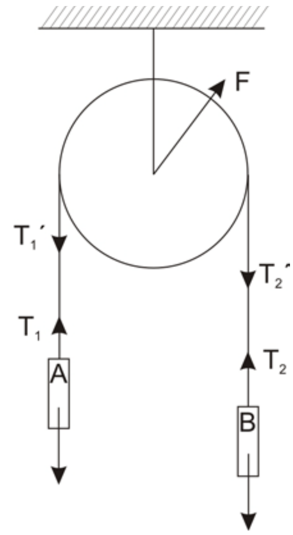
Σε τροχό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το Ο. η δύναμη που ασκείται σε αυτόν σχεδιάζεται πλάγια.

2. Τι είναι το σύστημα σωμάτων ; Να αναφέρετε παραδείγματα.

<u>Σύστημα σωμάτων:</u> Δύο ή περισσότερα σώματα τα οποία αλληλεπιδρούν με κάποιο τρόπο μεταξύ τους, αποτελούν το σύστημα σωμάτων. Οι δυνάμεις

οι οποίες ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος είναι οι λεγόμενες εσωτερικές και εμφανίζονται κατά ζεύγος.





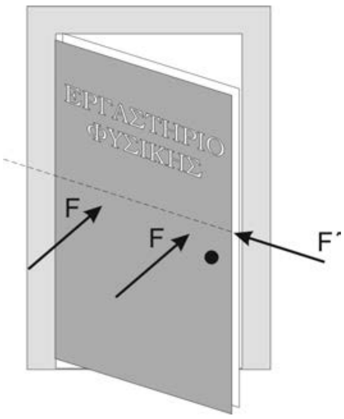
Σώμα έχει τοποθετηθεί πάνω σε ομογενή δοκό στη θέση Α. Η δοκός ασκεί στο σώμα δύναμη F. Τότε το σώμα θα ασκεί σε αυτή δύναμη ίση και αντίθετη F΄, σύμφωνα με τον νόμο δράσης – αντίδρασης. Έτσι στη δοκό θα ασκούνται οι δυνάμεις από τα στηρίγματα Α και Β , το βάρος W και η δύναμη F΄. Αφού ισχύει $F = W_1$ θα είναι και $F' = W_1$. Τα δύο σώματα είναι δεμένα με σχοινί το οποίο τοποθετείται σε μια τροχαλία. Οι δυνάμεις T_1, T_1' και T_2, T_2' στο σκοινί είναι εσωτερικές και για αυτό εμφανίζονται ανά ζεύγος. Έτσι συνεπώς θα έχουμε : $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$.

Σχόλιο: Να επισημανθεί εδώ ότι οι δυνάμεις T_1, T_1' και T_2, T_2' ασκούνται στην τροχαλία και τα σώματα αντίστοιχα και όχι στο σχοινί. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα οι δυνάμεις που ασκούνται στο σχοινί έχουν φορά προς τα έξω ! ΔΕΝ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΔΡΑΣΗ – ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ αλλά η ισότητα τους ερμηνεύεται από την ισορροπία του σχοινιού.

Σχοινί

3. Ποια είναι η ανάγκη εισαγωγής του μεγέθους της ροπής της δύναμης; Να αναφέρετε παράδειγμα.

Σε ένα στερεό σώμα, που μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα γνωρίζουμε από την εμπειρία μας ότι η περιστροφή που οφείλεται σε μια



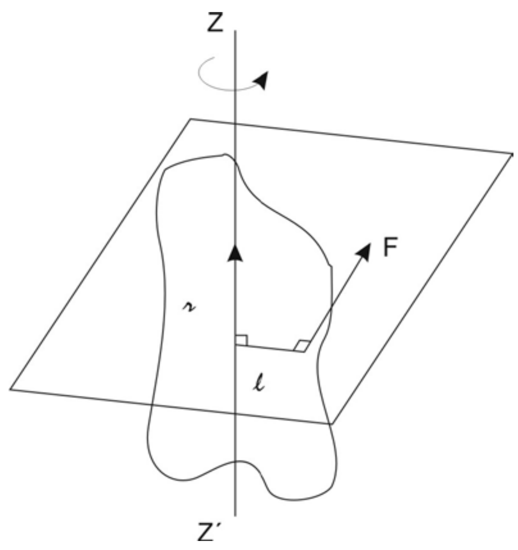
ασκούμενη σε αυτό δύναμη εξαρτάται όχι μόνο από την κατεύθυνση και το μέγεθος της δύναμης, αλλά και από το σημείο εφαρμογής της δύναμης. Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα, ονομάζεται ροπή της δύναμης και συμβολίζεται με το τ. Σε μια πόρτα των δωματίων του σπιτιού μας, παρατηρούμε ότι το πόμολο τοποθετείται όσο μακρύτερα γίνεται από τον άξονα περιστροφής της. Αυτό συμβαίνει γιατί η ίδια δύναμη F, περιστρέφει πιο εύκολα ένα σώμα, όταν ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής του σώματος αυτού. Η F′ που ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να περιστρέψει την πόρτα.

Έτσι η ανάγκη εισαγωγής της ροπής της δύναμης, έγκειται στο να μετρηθεί η στροφική ικανότητα που μπορεί να έχει μία δύναμη F.

4. Πως ορίζεται η ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής.

Σώμα μπορεί να στραφεί γύρω από άξονα z′z. Σε αυτό ασκείται δύναμη F που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Ροπή της δύναμης F ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l της δύναμης από τον άξονα περιστροφής.

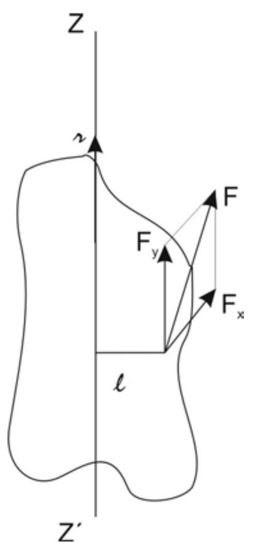
$$\tau = F \cdot l \quad (N \cdot m)$$



Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της περιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα μέτρησης είναι το 1Nm.

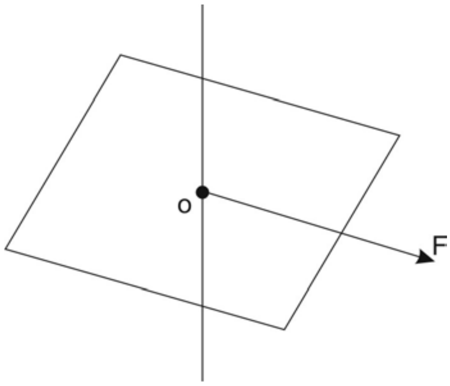
Για να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού, με τέτοιο τρόπο ώστε να δείχνουν τη φορά της δύναμης. Ο αντίχειρας τότε μας δείχνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.

<u>Σχόλιο 1:</u>



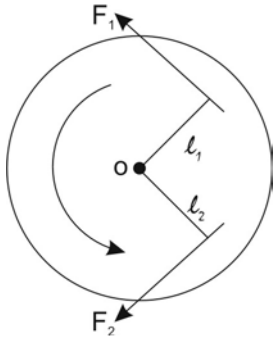
Εάν η δύναμη F δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, την αναλύουμε στις συνιστώσες της. Η συνιστώσα Fψ είναι παράλληλη με τον άξονα. Γενικά οι δυνάμεις που είναι παράλληλες με τον άξονα περιστροφής δεν μπορούν να προκαλέσουν περιστροφή. Έτσι η συνολική ροπή της δύναμης F είναι ίση με τη ροπή της συνιστώσας Fx, που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο και έχει μέτρο $\tau_F = F_x \bullet l$.

Σχόλιο 2:



Δυνάμεις όπου ο φορέας τους συναντά τον άξονα περιστροφής και είναι τ=F•l=0 γιατί η απόσταση l είναι ίση με το μηδέν. Επειδή η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος είναι απαραίτητο να ορίσουμε πρόσημο για το μέγεθος αυτό.

Σχόλιο 3:



Στα προβλήματα όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Για τον καθορισμό του πρόσημου του μέτρου της ροπής, θεωρώ κατά σύμβαση θετική εκείνη που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το

σώμα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Στο σώμα του σχήματος ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2. Η ροπή της κάθε δύναμης χωριστά ως προς άξονα που διέρχεται από το 0 είναι :

$$\tau_{F1} = F_1 \cdot l_1 \ \ \kappa\alpha\iota \qquad \tau_{F2} = -F_2 \cdot l_2$$

5. **Αν σε ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται :**
   i. Από το κέντρο μάζας (c.m.)
   ii. Από ένα τυχαίο σημείο, και όχι από το κέντρο μάζας (c.m.)

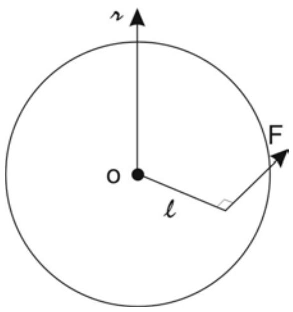
   Τι θα συμβεί στην κάθε περίπτωση; Πως δικαιολογείται;
   i. Εάν ο φορέας της δύναμης περνά από το κέντρο μάζας τότε το σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.
   ii. Εάν τώρα ο φορέας της δύναμης δεν συναντά το κέντρο μάζας, το σώμα θα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική

κίνηση. Η περιστροφή γίνεται γύρω από ένα νοητό ελεύθερο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Ο ελεύθερος άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας.

Ελεύθερος άξονας μετακινείται μαζί με το σώμα και είναι ο νοητός άξονας γύρω από τον οποίο μπορεί το σώμα να εκτελέσει στροφική κίνηση, χωρίς να στηριχθεί σε σταθερά σημεία. Αποδεικνύεται ότι ως ελεύθεροι άξονες είναι δυνατόν να χαρακτηρισθούν μόνο οι κύριοι άξονες αδράνειας, οι οποίοι διέρχονται και από το κέντρο μάζας του σώματος. Συνεπώς αφού η δύναμη συναντάει τον άξονα περιστροφής ($\tau_f = 0$), η ροπή της δύναμης είναι μηδέν και έτσι δεν προκαλείτε περιστροφή του σώματος.

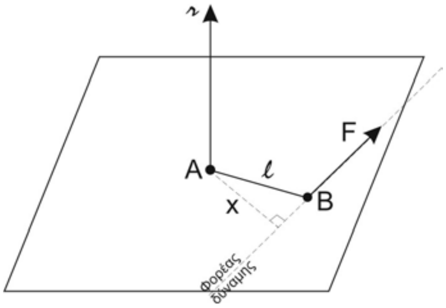
6. Πως ορίζεται η ροπή της δύναμης ως προς σημείο;

Στον τροχό του σχήματος όπου δεν υπάρχει άξονας περιστροφής, προκαλείται στροφική κίνηση, ενώ η ροπή της ασκούμενης δύναμης ορίζεται ως προς σημείο γύρω από το οποίο περιστρέφεται το σώμα. Έτσι ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς σημείο το διανυσματικό μέγεθος που έχει :



i. Μέτρο: ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση από το σημείο Ο.
ii. Διεύθυνση: κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από την δύναμη και το σημείο Ο
iii. Φορά: που προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού

7. Να υπολογίσετε την ροπή δύναμης ως προς σημείο Α, όπως φαίνεται στο σχήμα.

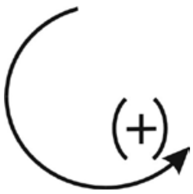


$$\tau = F \cdot x$$

Η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο Α είναι το διανυσματικό μέγεθος τ που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετο απόσταση χ επί του φορέα αυτής, από το σημείο Α.

8. Να περιγράψετε την <u>μεθοδολογία</u> που ακολουθούμε ώστε να υπολογίσουμε την συνολική ροπή Στ ή $\tau_{ολ}$ ομοεπίπεδων δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα.

<u>Βήμα 1ο:</u> Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ενεργούν σε ένα σώμα.

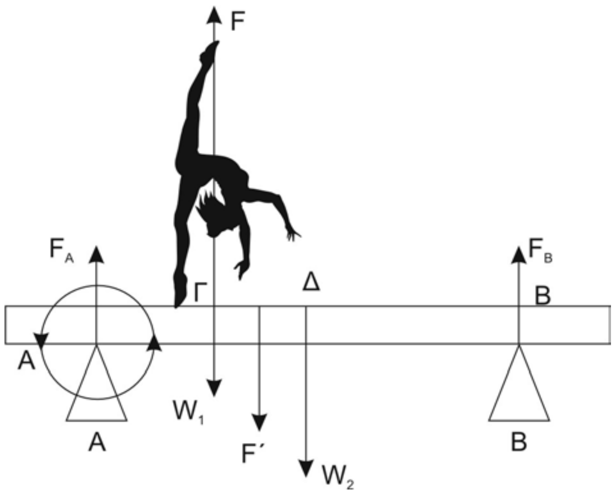


<u>Βήμα 2ο:</u> Ορίζουμε άξονα περιστροφής για τον οποίο θέλουμε να υπολογισθεί η συνολική ροπή. Για την κάθε δύναμη χωριστά, αφού πραγματοποιήσω ανάλυση των δυνάμεων σε άξονες χ΄χ και ψ΄ψ, υπολογίζω την ροπή ως προς τον άξονα που έχω αρχικά ορίσει. Ως θετική φορά, ορίζω αντίθετη με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

<u>Βήμα 3ο:</u> Στην συνέχεια η συνολική ροπή προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους ροπών.

<u>Σχόλιο:</u> Η ροπή της δύναμης που συναντά τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν.

9. Να υπολογίσετε την συνολική ροπή των δυνάμεων που ενεργούν στη δοκό του σχήματος ως προς άξονα που διέρχεται από την θέση Α.



Σχεδιάζω τις δυνάμεις που ασκούνται στην δοκό. Είναι :

F_A : η δύναμη που ασκείται από το στήριγμα Α

F_B : η δύναμη που ασκείται από το στήριγμα Β

W_1, W_2 : τα βάρη του ανθρώπου και της δοκού αντίστοιχα

F, F΄ : η πρώτη δύναμη F ασκείται από την δοκό στον άνθρωπο, ο οποίος ασκεί ίση και αντίθετη δύναμη F΄στην δοκό. (Δράση – Αντίδραση).

Υπολογίζω τώρα την ροπή της κάθε δύναμης χωριστά :

$$\tau_{F^{(A)}} = -F' \cdot (\mathrm{A}\Gamma) \;\; \acute{o}\pi o\upsilon \;\; F = F' = W_1$$

$$\tau_{F_A^{(A)}} = 0$$

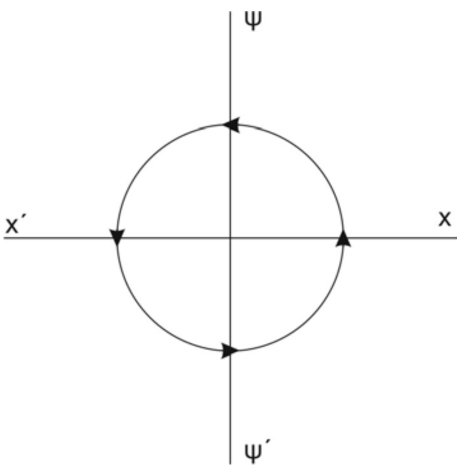
$$\tau_{F_B^{(A)}} = F_B \cdot (AB)$$

$$\tau_{W_2^{(A)}} = -W_2 \cdot (A\Delta)$$

Οπότε η συνολική ροπή θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται μόνο στην δοκό.

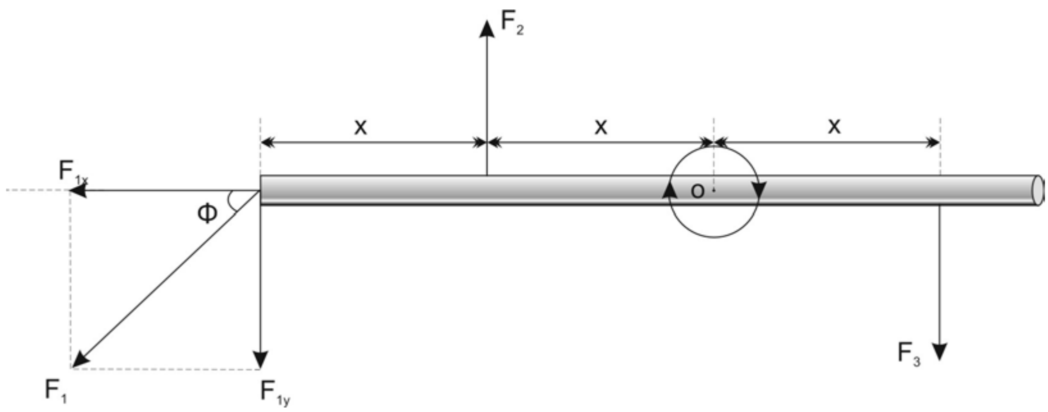
$$\tau_{o\lambda} \; \acute{\eta} \sum \tau = -W_1 \cdot (A\Gamma) + F_B \cdot (AB) - W_2 \cdot (\mathrm{A}\Delta)$$

<u>Σχόλιο:</u> Για την αποφυγή λάθους, όσο αφορά τον καθορισμό πρόσημου στον υπολογισμό της ροπής της κάθε δύναμης, σχεδιάζω ένα κύκλο γύρω από τον θεωρούμενο άξονα περιστροφής. Σημειώνω τα σημεία τομής του κύκλου με τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα χ΄χ και ψ΄ψ, ώστε να φαίνεται η θετική φορά



διαγραφής του κύκλου. Εάν τώρα η φορά της δύναμης είναι όπως η φορά διαγραφής του κύκλου, τότε η τιμή της είναι θετική.

10. Η ράβδος του σχήματος έχει αμηλητέο βάρος και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις F_1 = 20 N, F_2 = 2 N και F_3 = 10 N. Να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο. Δίνονται χ=2m, και φ= 30^0.



Αναλύω τις δυνάμεις στις συνιστώσες τους

$$F_{1x} = F_1 \cdot συνφ \Rightarrow F_{1x} = 10\sqrt{3}N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot ημφ \Rightarrow F_{1y} = 10N$$

Υπολογίζω την ροπή της κάθε δύναμης χωριστά

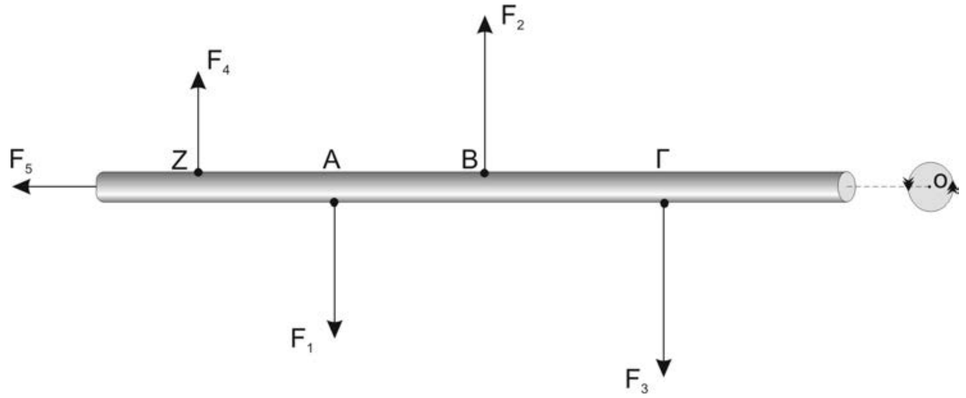
$$F_{1x} = F_1 \cdot συνφ \Rightarrow F_{1x} = 10\sqrt{3}N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot ημφ \Rightarrow F_{1y} = 10N$$
$$\tau_{F1x}^{(0)} = 0,\ \ \tau_{F1y}^{(0)} = +F_{1y} \cdot 2x \Rightarrow \tau_{F1y}^{(0)} = 40N \cdot m$$
$$\tau_{F2} = -F_2 \cdot x \Rightarrow \tau_{F2} = -4N \cdot m$$
$$\tau_{F3} = -F_3 \cdot x \Rightarrow \tau_{F3} = -20N \cdot m$$

Η συνολική ροπή:

$$\sum \tau = 40 - 4 - 20 \Rightarrow \sum \tau = 16 N \cdot m$$

Η συνολική ροπή είναι θετική, επομένως η ράβδος θα στραφεί αντίθετα με τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

11. Είναι δυνατό ο θεωρούμενος άξονας περιστροφής να είναι εκτός του σώματος όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογιστεί η ροπή της κάθε δύναμης χωριστά.



$$\tau_{F1} = +F_1 \cdot (AO)$$

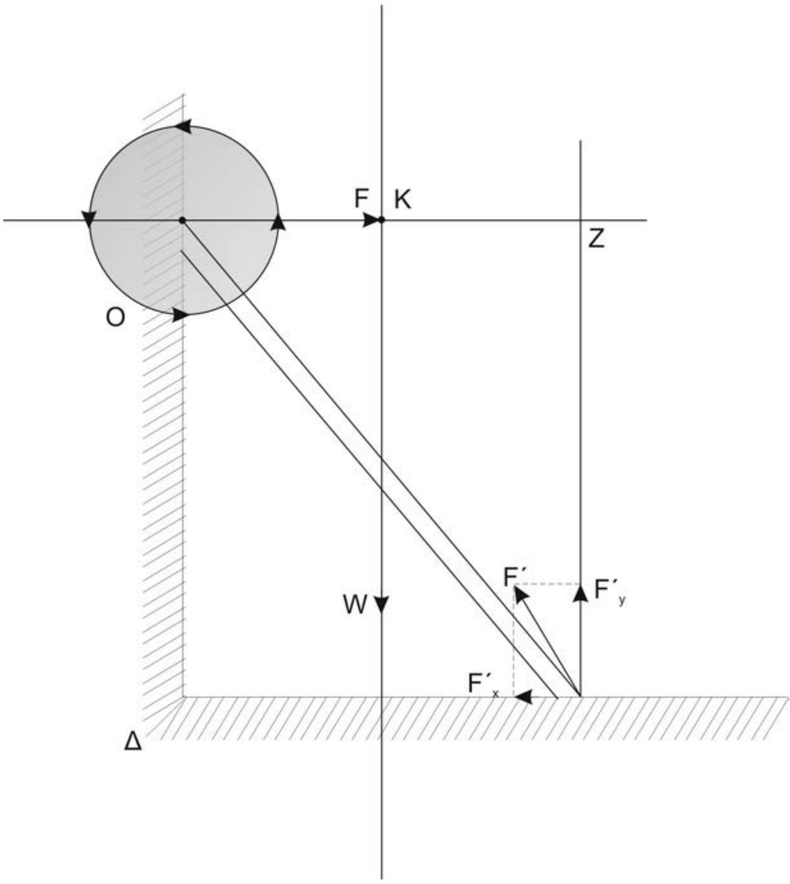
$$\tau_{F2} = -F_2 \cdot (BO)$$

$$\tau_{F3} = +F_3 \cdot (\Gamma O)$$

$$\tau_{F4} = -F_4 \cdot (ZO)$$

$$\tau_{F5} = 0$$

12. Να υπολογίσετε την ροπή των δυνάμεων που ενεργούν σε ράβδο ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο O. Η ράβδος έχει τοποθετηθεί σε γωνία τοίχου.



$$\tau_F = 0$$

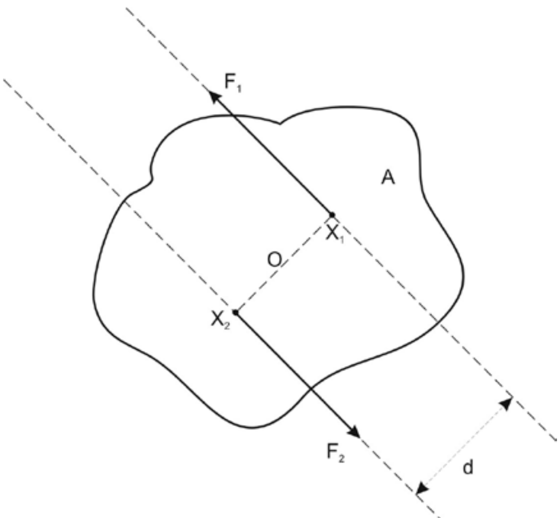
$$\tau_W = -W \cdot (OK)$$

$$\tau_{F'_y} = +F'_y \cdot (OZ)$$

$$\tau_{F'_X} = -F'_X \cdot (OΔ)$$

Δείτε το σχόλιο στην ερώτηση 9 (σελ 34), για τον καθορισμό του πρόσημου. Επίσης για την εύρεση της απόστασης της κάθε δύναμης από τον άξονα περιστροφής προεκτείνουμε τον φορέα της δύναμης και φέρουμε την κάθετο σε αυτόν (ερώτηση 7).

13. Ποτέ δύο δυνάμεις που ενεργούν σε ένα στερεό σώμα αποτελούν ζεύγος δυνάμεων;

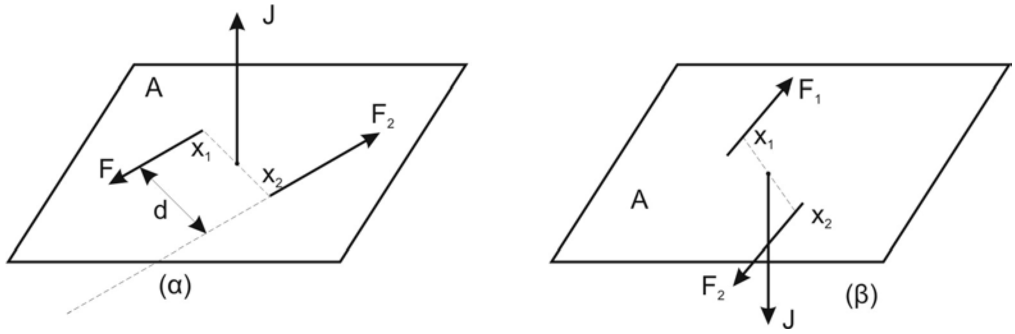


Αν σε ένα σώμα ενεργούν δύο αντίρροπες δυνάμεις F_1 και F_2 με ίσα μέτρα, λέμε ότι αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Με τον όρο αντίρροπες εννοείται ότι οι δυνάμεις είναι παράλληλες και έχουν αντίθετη φορά.

14. Να δείξετε ότι η

συνολική ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι διανυσματικό μέγεθος τ, το οποίο έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της μιας εκ των δύο δυνάμεων επί την κάθετη απόσταση μεταξύ τους.

i. Θεωρούμε άξονα περιστροφής που διέρχεται από σημείο Α, που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο αντίρροπες δυνάμεις. (σχήματα α και β).



Υπολογίζουμε την ροπή της κάθε δύναμης χωριστά ως προς σημείο Α το οποίο απέχει απόσταση χ_1 από τη δύναμη F_1 και χ_2 από τη δύναμη F_2. Είναι:

$$\tau_1 = F_1 \cdot x_1 \ \ \kappa\alpha\iota \tau_2 = F_2 \cdot x_2$$

Οπότε η συνολική ροπή θα είναι :

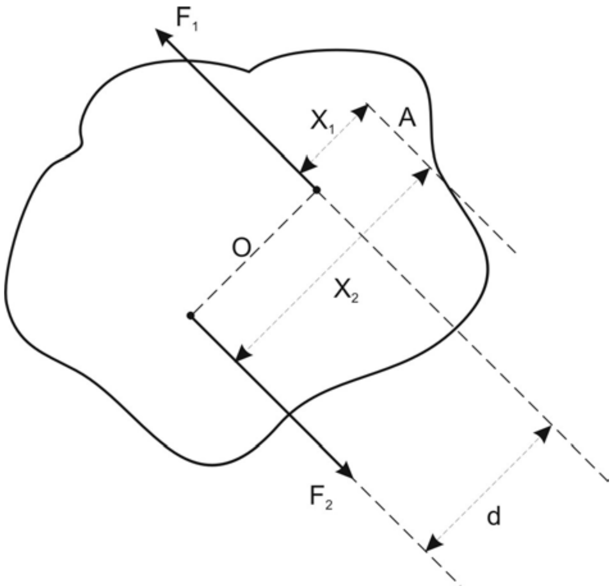
$$\tau_1 = F_1 \cdot x_1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \tau_2 = F_2 \cdot x_2$$
$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$
$$\tau = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 \ \alpha\phi o\acute{\upsilon} \ F_1 = F_2 = F$$
$$\tau = F(x_1 + x_2), \qquad x_1 + x_2 = d$$
$$\tau = F \cdot d$$

Η διεύθυνση της ροπής του ζεύγους δυνάμεων είναι κάθετος στο επίπεδο των δύο δυνάμεων και η φορά της προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Τα δάκτυλα δείχνουν την φορά της κάθε δύναμης, ενώ ο αντίχειρας την φορά της ροπής τ.

ii. Αν τώρα ο άξονας περιστροφής βρίσκεται έξω από τις αντίρροπες δυνάμεις.

Η ροπή της κάθε δύναμης θα είναι : $$\tau_{F2} = +F_2 \cdot x_2$$
$$\tau_{F1} = -F_1 \cdot x_1$$

Έτσι η συνολική ροπή είναι :



$$\tau = \tau_{F1} + \tau_{F2}$$

$$\tau = F_2 \cdot x_2 - F_1 \cdot x_1 \quad \varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ F_1 = F_2 = F \quad \kappa\alpha\iota\ d = x_2 - x_1$$

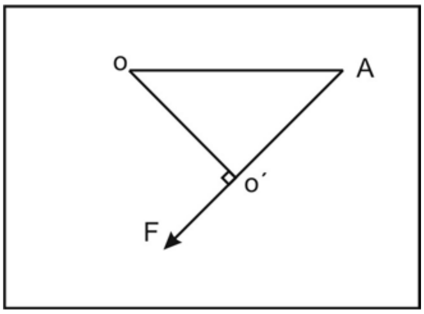
$$\tau = F(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\tau = F \cdot d}$$

<u>Σχόλιο :</u> Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ανεξάρτητος της θέσης του άξονα ή του σημείου περιστροφής του σώματος. Εξαρτάται μόνο από το μέτρο των δύο δυνάμεων και της απόστασης μεταξύ τους.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

15. Το μέτρο της ροπής της δύναμης F ως προς το σημείο Ο είναι :



$\alpha)\ \tau = F \cdot (OA)$

$\beta)\ \tau = -F \cdot (OA)$

$\gamma)\ \tau = F \cdot (OO')$

$\delta)\ \tau = -F \cdot (OO')$

16. Στην πόρτα του δωματίου σου ασκείται δύναμη F και η πόρτα δεν περιστρέφεται. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένες;

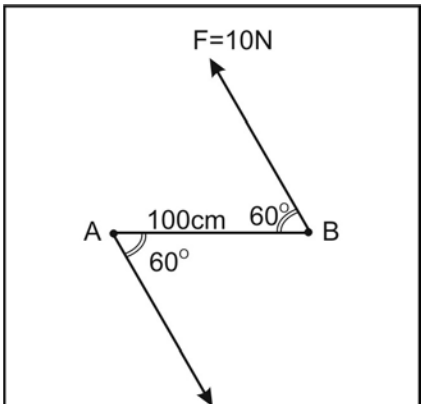
α) Η δύναμη τέμνει τον άξονα περιστροφής

β) Η δύναμη ασκείται σε μεγάλη απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

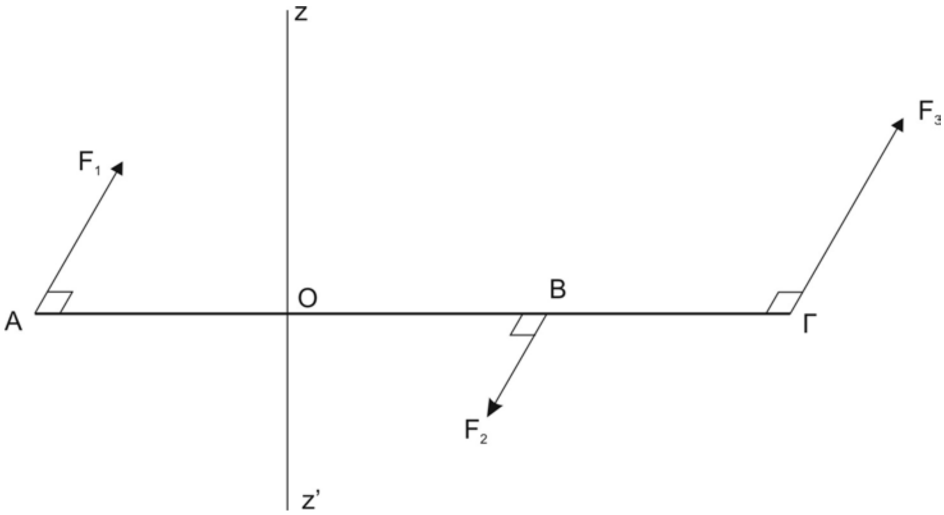
γ) Η δύναμη είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής

17. Γιατί τα λεωφορεία και τα φορτηγά έχουν μεγάλα τιμόνια;

18. Δίνεται το ζεύγος των δυνάμεων του σχήματος. Να υπολογίσετε την ροπή του.



19. Να σχεδιάσετε τις ροπές των δυνάμεων F_1, F_2, F_3 ως προς άξονα z’z και να τις υπολογίσετε.

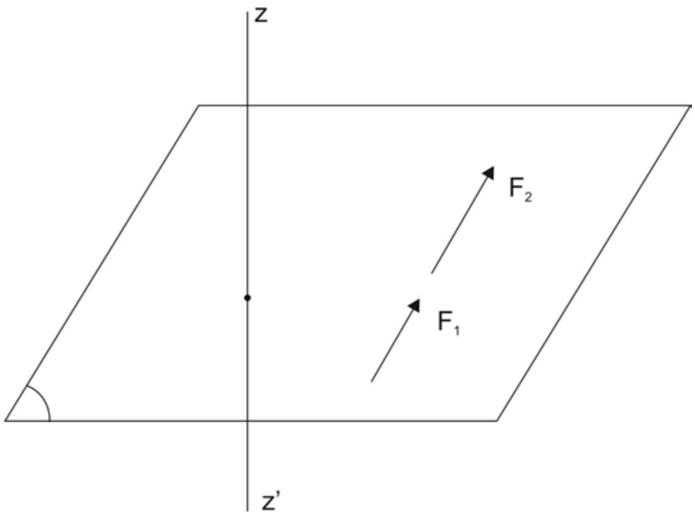


20. Οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι ίσες μεταξύ τους. Ο άξονας z’z είναι κάθετος στο επίπεδο Π. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

α) Η ροπή της F_1 ως προς άξονα z’z είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της F_2 ως προς τον ίδιο άξονα.

β) Η ροπή της F_1 είναι αντίρροπη της ροπής F_2 ως προς τον ίδιο άξονα.

γ) Η ροπή της είναι F_1 ίση με την ροπή της F_2 ως προς τον ίδιο άξονα.

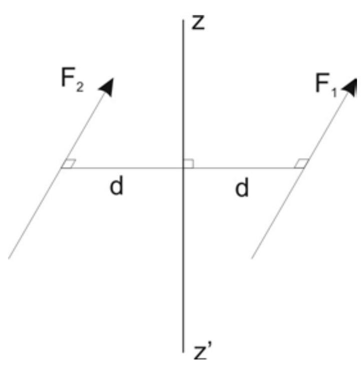


21. Οι φορείς των δυνάμεων F_1, F_2 απέχουν απόσταση d από τον άξονα z’z. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι ίσα $F_1 = F_2$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

α) Η ροπή της F_1 είναι ίση με την ροπή της F_2 ως προς τον ίδιο άξονα z’z.

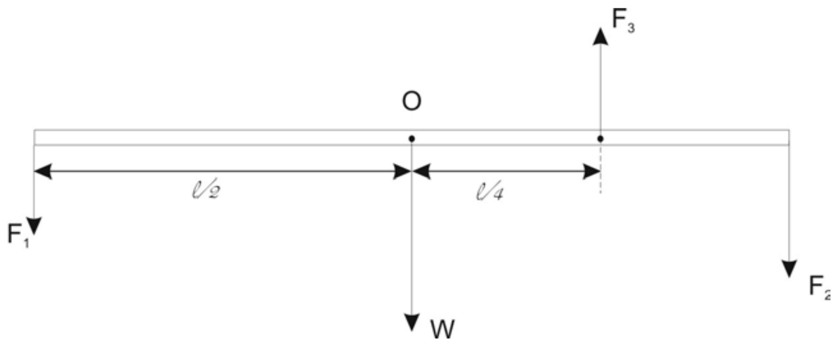
β) Η αλγεβρική τιμή ροπή της F_1 είναι αντίθετη της αλγεβρικής τιμής της ροπής F_2 ως προς τον ίδιο άξονα z'z.

γ) Το μέτρο της ροπής της F_1 ως προς τον άξονα zz' είναι ίσο με το μέτρο της F_2 ως προς τον ίδιο άξονα.

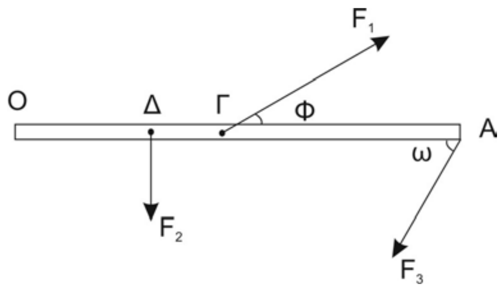


ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

22. Η ράβδος ΑΓ έχει βάρος W = 200 N και μήκος L = 1 m. Στη ράβδο ενεργούν οι δυνάμεις F_1 = 20 N, F_2 = 40 N και F_3 = 25 N. Αν το σημείο Δ είναι το μέσο Ο της ΟΓ, να βρείτε την ολική ροπή ως προς το μέσο Ο της ράβδου.



23. Η ράβδος έχει μήκος ΟΑ = L, είναι αβαρής και μπορεί να στρέφεται γύρω από σημείο Ο. Αν F_1= F_2 =F_3= 200N, φ = 60°, ω= 30°, Γ το μέσο της ράβδου και Δ το μέσο της ΟΓ να βρείτε την ολική ροπή των δυνάμεων ως προς σημείο Ο. Δίνεται L= 4m.



24. Ομογενής άκαμπτη ράβδος ΑΖ έχει μήκος L= 4m, μάζα M = 3 Kg και ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άκρο της Α υπάρχει ακλόνητη άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, ενώ στο άλλο άκρο της Ζ, υπάρχει υπάρχει στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας m_1 = 0,60 Kg και αμελητέων διαστάσεων. Ένα αβαρές τεντωμένο νήμα ΔΓ συνδέει το σημείο Γ της ράβδου με σφαιρίδιο m_2 = 1,00 Kg, το οποίο είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς Κ = 100 N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο. Η απόσταση ΑΓ είναι ίση με 2,80 m. Όλη η διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο στο οποίο και όλες οι κινήσεις.

Α. Να υπολογίσετε :

i. Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – σφαιρίδιο m_1 ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στο επίπεδο της διάταξης.

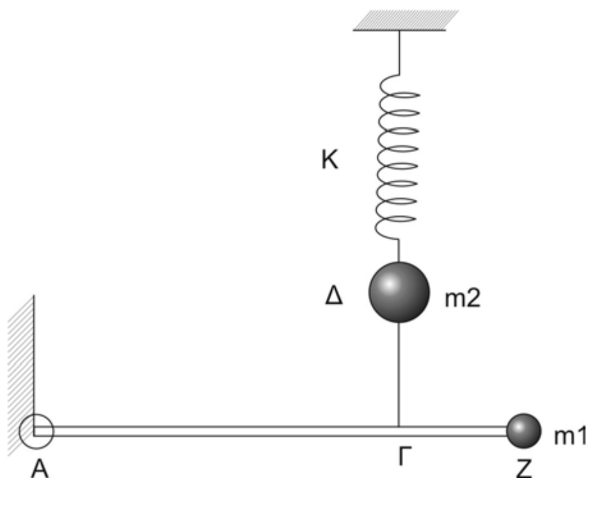
ii. Το μέτρο της τάσης του νήματος ΔΓ.

Β. Αν κόψουμε το νήμα ΔΓ, το σφαιρίδιο m_2 εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση ενώ η ράβδος μαζί με το σώμα m_1 υπό την επίδραση της Βαρύτητας, περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από το σημείο Α. Να υπολογίσετε :

i. Το χρόνο που χρειάζεται το σφαιρίδιο m_2 από την στιγμή που κόβεται το νήμα μέχρι την στιγμή που θα φθάσει στην υψηλότερη θέση του για πρώτη φορά.

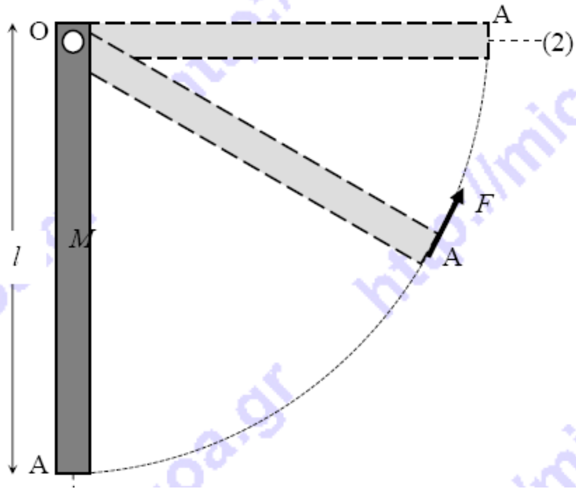
ii. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου z, τη στιγμή που η ράβδος περνάει από την κατακόρυφη θέση.

Δίνονται : g = 10 m/s^2, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της : Icm= 1/12 M L^2, και π=3,14.



Θέμα 3ο

Η ομογενής και ισοπαχής δοκός ΟΑ του παρακάτω σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που περνά από το άκρο της Ο και είναι κάθετος στη διεύθυνσή της. Η δοκός έχει μάζα M=1 kg, μήκος l=1,8 m και αρχικά ισορροπεί ελεύθερα στην κατακόρυφη διεύθυνση (θέση 1 του σχήματος). Ένας ψηλός μαθητής ασκεί δύναμη σταθερού μέτρου F_0 στο άκρο Α της δοκού. Η διεύθυνση της F_0 βρίσκεται συνεχώς στο επίπεδο περιστροφής της δοκού και είναι συνεχώς κάθετη στη δοκό. Ο μαθητής φέρνει τη δοκό στην οριζόντια θέση (2) του σχήματος, προσφέροντας την ελάχιστη ενέργεια.



Δίνονται:

g=10 m/sec^2

ημ40° $\cong \frac{2}{\pi} \cong$ 0,6

$\frac{1}{\pi}$=0,32

α. Βρείτε την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφέρει ο μαθητής για να φέρει τη δοκό από την κατακόρυφη θέση (1) του σχήματος, στην οριζόντια θέση (2) του σχήματος.

β. Βρείτε το μέτρο της δύναμης F_0.

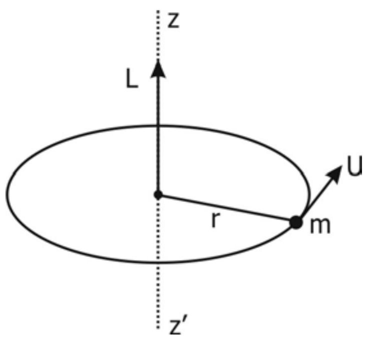
γ. 1. Επιλέξτε τη σωστή πρόταση και αιτιολογείστε την απάντησή σας:

- **i.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της δοκού συνεχώς αυξάνεται.
- **ii.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της δοκού συνεχώς μειώνεται.
- **iii.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της δοκού αρχικά μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται.

2. Εξηγείστε γιατί σε κάποια θέση της ανοδικής κίνησης της δοκού, η κινητική της ενέργεια γίνεται μέγιστη.

δ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη κινητική ενέργεια της δοκού κατά την ανοδική της κίνηση με την επίδραση της δύναμης σταθερού μέτρου F_0.

Ενότητα 7η



1. Η στροφορμή υλικού σημείου, πως ορίζεται;

Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς άξονα zz′ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της το διανυσματικό μέγεθος που έχει:

α) Μέτρο: $L = p \cdot r$ ή $L = mur$ (λαμούρ)

Μνημονικός κανόνας

β) Διεύθυνση αυτή του άξονα zz'

γ) και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μονάδα στροφορμής είναι το:

$$\boxed{1\, kg \cdot m^2/s}$$

Σχόλιο: Η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης.

2. Πως υπολογίζουμε την στροφορμή στερεού σώματος.

Έστω στερεό το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα zz′ με γωνιακή ταχύτητα ω. Όλα τα σημεία του στερεού διαγράφουν κυκλικές τροχιές και το επίπεδό τους είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής. Επίσης περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και διαφορετική γραμμική ταχύτητα. Εάν χωρίσουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_\nu$ δηλαδή πολύ μικρά κομμάτια, μπορώ να θεωρήσω το καθένα σαν υλικό σημείο. Έτσι υπολογίζω τη στροφορμή για το καθένα χωριστά:

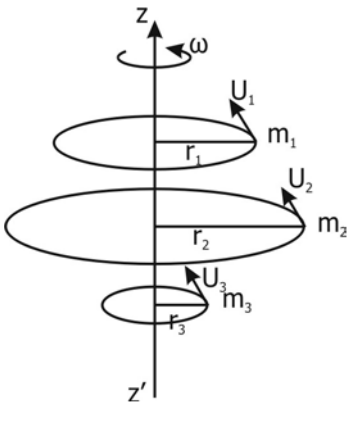
$$L_1 = m_1 u_1 r_1 \ , \quad u_1 = \omega\sqrt{1}$$

$$L_2 = m_2 u_2 r_2 \ , \quad u_2 = \omega\sqrt{2}$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$L_\nu = m_\nu u_\nu r_\nu \ , \quad u_\nu = \omega\sqrt{\nu}$$

Επειδή οι στροφορμές των στοιχειωδών μαζών έχουν την ίδια διεύθυνση, η συνολική στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.



$$L = L_1 + L_2 + ... + L_\nu = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + ... + m_\nu \omega r_\nu^2 =$$
$$= \omega\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_\nu r_\nu^2\right)$$
$$όμως\ I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_\nu r_\nu^2$$
άρα $\boxed{L = I \cdot \omega}$

3. Τι ονομάζουμε spin (σπίν); Και ποια είναι η ανάγκη εισαγωγής της έννοιας αυτής; Να αναφέρεις παράδειγμα.

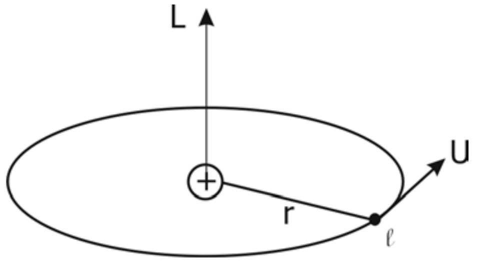
Η στροφορμή, η οποία έχει σχέση με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονα του την ονομάζουμε spin, και αυτό συμβαίνει για να την διακρίνουμε από την στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα, λόγω άλλης περιστροφικής κίνησης. Όπως για παράδειγμα η γη έχει spin εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της, και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον ήλιο. Ο χρόνος που κάνει μια περιστροφή είναι 24h, ενώ στρέφεται γύρω από τον ήλιο σε 365 ημέρες.

4. Τα στοιχειώδη σωμάτια ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια έχουνε στροφορμή; Ποιο είναι το μέτρο της;

Τα στοιχειώδη σωμάτια που αναφέρονται στην ερώτηση έχουν εγγενείς (έμφυτες) στροφορμές spin. Το μέτρο της στροφορμής είναι ίδιο για τα σωμάτια αυτά. Εκφράζεται συνήθως από τη σχέση $\frac{1}{2}\hbar$ όπου $\hbar = 1.05x10^{-34}\ J \cdot s$. Η ποσότητα αυτή είναι μια θεμελιώδεις ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται στην κβαντική φυσική. Το σύμβολο $\hbar$ προφέρεται «έϊτς μπάρ».

Ο Bohr σε μία από τις παραδοχές του αναφέρει για το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου ότι η στροφορμή του είναι:

Κβαντωμένη και ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $\hbar = \frac{n}{2\pi}$.



$L = m \cdot u \cdot r$ όπου $m \cdot u \cdot r = n \cdot \hbar$ ο n είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός και παίρνει τις τιμές $1, 2, 3, ..., \infty$ και $\hbar = \frac{n}{2\pi}$.

Όμως το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται και γύρω από τον εαυτό του. Η στροφορμή λόγω της ιδιοπεριστροφής του λέγεται spin.

5. Εάν έχουμε περισσότερα από δύο σώματα που εκτελούν περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα zz′, για να υπολογίσω την συνολική στροφορμή ακολουθώ την παρακάτω διαδικασία.

Βήμα 1^o: Υπολογίζω την στροφορμή (L) κάθε σώματος χωριστά ως προς συγκεκριμένο άξονα περιστροφής.

Βήμα 2^o: Σε ένα σύστημα σωμάτων, στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα. Δηλαδή:

$$\vec{L}_{ολ} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_ν$$

Για να βρούμε το μέτρο της συνολικής στροφορμής βγάζω τα διανύσματα αφού ορίσω θετική φορά προς τα πάνω. Αυτό συμβαίνει γιατί τα διανύσματα είναι συγγραμμικά.

6. Δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα zz′. Εάν πάνω από το δίσκο βρίσκεται ένας άνθρωπος ο οποίος μπορεί να κινηθεί:

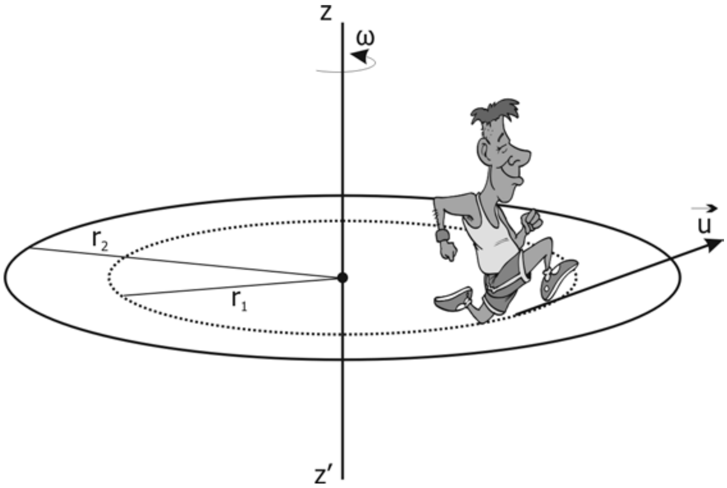
α) Με την ίδια φόρα περιστροφής του δίσκου και ταχύτητα $\vec{u}$.

β) Αντίθετα με την φορά περιστροφής με την ίδια ταχύτητα.

Να υπολογίσετε την συνολική στροφορμή του συστήματος.

Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

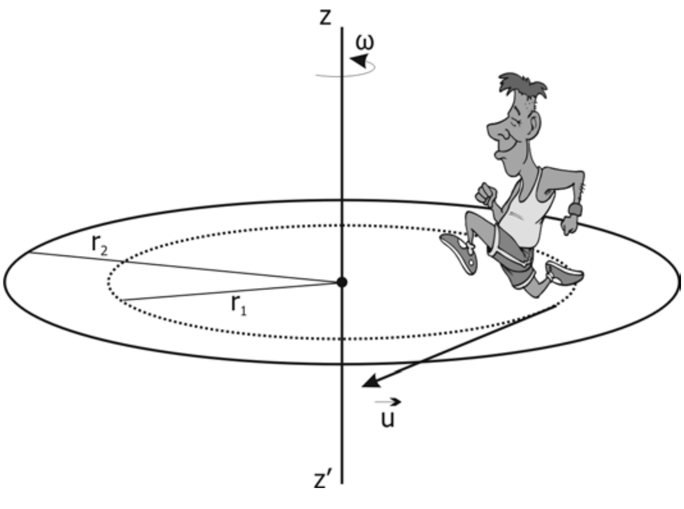
α) Είναι $L_{δίσκου} = I \cdot \omega,\ \ L_{ανθρ} = m \cdot u \cdot r_1,\ \ L_{ολ} = L_{δίσκου} + L_{ανθρ}\ (1)$



Επειδή ο δίσκος και ο άνθρωπος κινούνται με την ίδια φορά, τα διανύσματα $\vec{L}_{δισκου}$ και $\vec{L}_{ανθρ.}$ είναι ομόρροπα. Έτσι αν ορίσουμε θετική φορά προς τα πάνω θα είναι:

$$L_{ολ} = L_{δισκ} + L_{ανθρ.}$$
$$L_{ολ} = I \cdot \omega + m \cdot u \cdot r_1$$

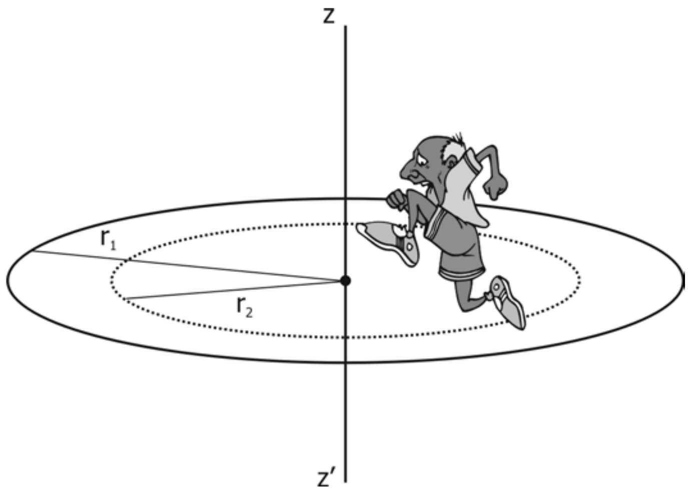
β) Όταν ο δίσκος και ο άνθρωπος κινούνται με αντίθετη φορά θα έχουμε:



$$L_{ολ} = L_{δισκ} - L_{ανθρ.}$$
$$L_{ολ} = I \cdot \omega - m \cdot u \cdot r_1$$

Τα διανύσματα $\vec{L}_{δισκου}$ και $\vec{L}_{ανθρ.}$ είναι αντίθετα μεταξύ τους.

7. Αρχικά το σύστημα δίσκος - άνθρωπος βρίσκεται σε ηρεμία. Κάποια χρονική στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να τρέχει σε κυκλική τροχιά, οπότε ο δίσκος θα στρέφεται αντίθετα με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Να υπολογιστεί η συνολική στροφορμή του συστήματος.



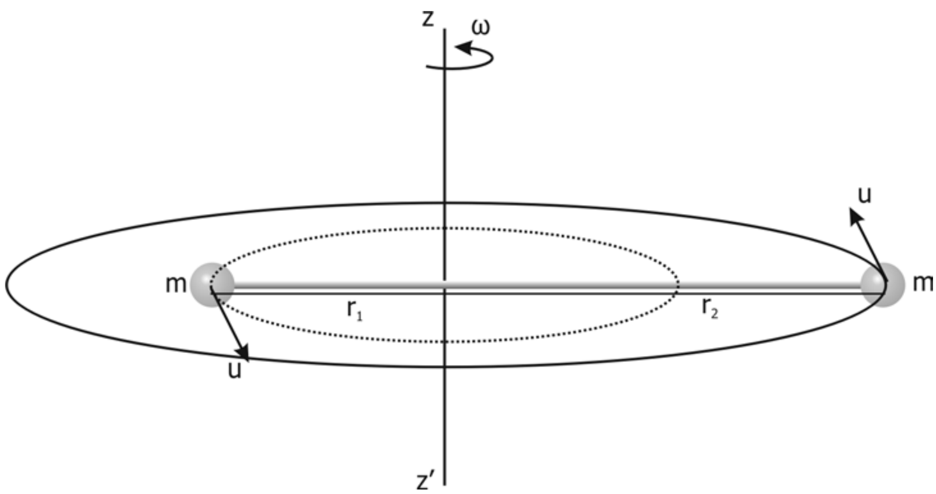
Για τον δίσκο: $L_{\Delta} = I_{cm} \cdot \omega_1$

Για τον άνθρωπο: $L_{\alpha\nu\theta\rho.} = m \cdot u \cdot r_2$

Η συνολική στροφορμή είναι: $$\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_{\Delta} + \vec{L}_{\alpha\nu\theta\rho.} \Rightarrow L_{o\lambda} = L_{\Delta} - L_{\alpha\nu\theta\rho.} \Rightarrow$$ $$\Rightarrow L_{o\lambda} = I_{cm} \cdot \omega_1 - m \cdot u \cdot r_2$$

ή $0 = I_{cm}\,\omega_1 - m\,u\,r_2$, …….

8. Δύο σφαίρες που οι κάθε μία έχει μάζα m συνδέονται με αβαρή ράβδο. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα zz′. Να υπολογίσετε την στροφορμή του συστήματος.



Για το πρώτο σώμα: $L_1 = m \cdot u \cdot r_1 = m \cdot \omega \cdot r_1^2$

Για το δεύτερο σώμα: $L_2 = m \cdot u \cdot r_2 = m \cdot \omega \cdot r_2^2$

Η συνολική στροφορμή είναι:

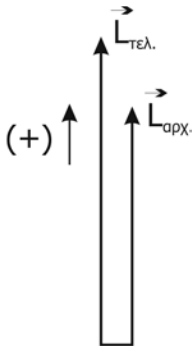
$$\vec{L}_{ολ.} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \Rightarrow L_{ολ.} = L_1 + L_2 \Rightarrow L_{ολ.} = m \cdot \omega \cdot r_1^2 + m \cdot \omega \cdot r_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_{ολ.} = m \cdot \omega \left(r_1^2 \cdot r_1^2 \right)$$

9. Πως υπολογίζουμε την μεταβολή της στροφορμής $\overrightarrow{\Delta L}$. Καθώς ένα σώμα περιστρέφεται με στροφορμή $\vec{L}_{αρχ.}$ είναι δυνατό αν του ασκηθεί εξωτερική ροπή $\left(\vec{\tau}_{εξ.}\right)$ η στροφορμή του να γίνει διαφορετική $\vec{L}_{τελ.}$ Για να υπολογίσουμε την μεταβολή γράφουμε την διανυσματική ισότητα.

$$\overrightarrow{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ.}$$

και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

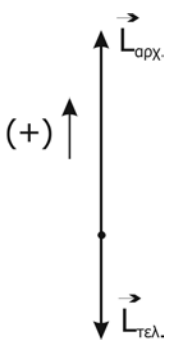
Περίπτωση 1> $\vec{L}_{αρχ.}$, $\vec{L}_{τελ.}$ να έχουν την ίδια φορά $(\uparrow\uparrow)$.



Ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω οπότε

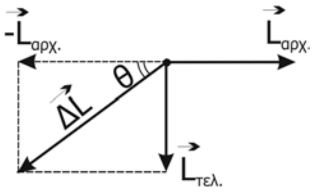
$$\overrightarrow{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ.} \Rightarrow \Delta L = L_{τελ} - L_{αρχ.}$$

Περίπτωση 2> $\vec{L}_{αρχ.}$, $\vec{L}_{τελ.}$ να έχουν την αντίθετη φορά $(\uparrow\downarrow)$.



$$\overrightarrow{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ.}$$
$$\Delta L = -L_{τελ} - L_{αρχ.}$$
$$\Delta L = -\left(L_{τελ} + L_{αρχ.}\right)$$

Περίπτωση 3> $\vec{L}_{αρχ.}$, $\vec{L}_{τελ.}$ να σχηματίζουν γωνία 90°.

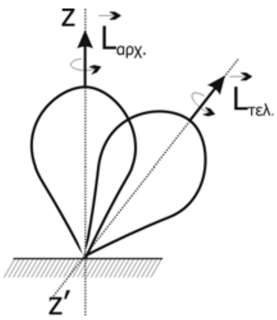


$$\vec{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ.} = \vec{L}_{τελ} + \left(-\vec{L}_{αρχ.}\right)$$

το μέτρο είναι: $\Delta L = \sqrt{L_{τελ}^2 - L_{αρχ.}^2}$

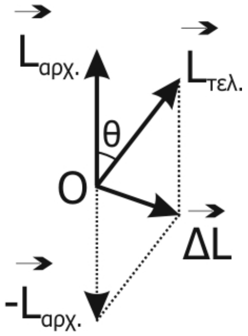
με $εφθ = \dfrac{L_{τελ}}{L_{αρχ.}}$

Περίπτωση 4> $\vec{L}_{αρχ.}$, $\vec{L}_{τελ.}$ να σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους.



Σχεδιάζω τα διανύσματα $\vec{L}_{αρχ.}$ και $\vec{L}_{τελ.}$ με την ίδια αρχή Ο.

Κώνος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $ω_{αρχ}$. Η στροφορμή του βρίσκεται πάνω στον άξονα zz’.

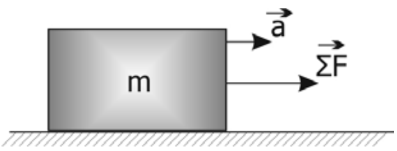


$$\vec{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ.} = \vec{L}_{τελ} + \left(-\vec{L}_{αρχ.}\right)$$

έτσι το μέτρο είναι:

$$\Delta L = \sqrt{L_{τελ}^2 + L_{αρχ.}^2 + 2L_{τελ} \cdot L_{αρχ.} \cdot συν(180-\theta)}$$

10. Ποια είναι η γενικότερη διατύπωση του δεύτερου νόμου του Newton στη μεταφορική κίνηση;



Εάν $\vec{\Sigma F}$ είναι συνιστάμενη των εξωτερικών δυνάμεων και $\vec{a}$ η επιτάχυνση τότε:

$$\vec{\Sigma F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{\Sigma F} = m \cdot \frac{\vec{u}_{τελ} - \vec{u}_{αρχ}}{t_{τελ} - t_{αρχ}} \Rightarrow \vec{\Sigma F} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\Sigma F} = \frac{\vec{\Delta p}}{\Delta t}}$$

Το πηλίκο $\dfrac{\vec{\Delta p}}{\Delta t}$ ονομάζεται ρυθμός μεταβολής της ορμής.

11. Ποια είναι η γενικότερη σχέση για τη στροφική κίνηση η οποία είναι ανάλογη του δεύτερου νόμου του Newton.

$$\Sigma\vec{\tau} = I \cdot a \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = I \cdot \frac{\vec{\omega}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{\omega}_{\alpha\rho\chi}}{t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \frac{\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{L}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Sigma\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}}$$

Όπου το πηλίκο $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ αποτελεί το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής.

12. Να γράψετε και να αποδείξετε τη γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης (παράγωγος).

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού της μεταβολής της στροφορμής του.

$$\boxed{\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}}$$

<u>Απόδειξη:</u> Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με: $L = I \cdot \omega$. Εάν σε απειροστό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβληθεί κατά dω, η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά: : $dL = I \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \cdot a$ επειδή όμως $\Sigma\tau = I \cdot \alpha$ θα έχουμε:

$$\boxed{\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}}$$

13. Ισχύει ο γενικός νόμος της στροφικής κίνησης για σύστημα σωμάτων; Αν ναι ποια θα είναι η μορφή του;

Ισχύει σε σύστημα σωμάτων. Σε αυτό θα έχουμε ροπές που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις. Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει γιατί σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται ανά ζεύγος και είναι αντίθετες (ίδιο μέτρο και διεύθυνση και αντίθετη φορά). Εφόσον η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Έτσι για σύστημα σωμάτων ο νόμος της στροφικής κίνησης γράφεται:

$$\boxed{\Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}}$$

όπου $\tau_{\varepsilon\xi}$ η ροπή κάθε μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος.

14. Ποια είναι η μαθηματική έκφραση του νόμου διατήρησης της στροφορμής για ένα στερεό σώμα στη στροφική κίνησης σε αναλογία με το νόμο διατήρησης της ορμής στη μεταφορική κίνηση*.

Στη μεταφορική κίνηση είναι: $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ εάν $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$ τότε $\Delta\vec{P} = 0$ ή

$\vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\alpha\rho\chi} = 0$ ή $\vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} = \vec{P}_{\alpha\rho\chi}$ (αρχή διατήρησης της ορμής)

Σε αναλογία για την στροφική κίνηση θα έχουμε:

$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$ τότε $\Delta\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} = \vec{L}_{\alpha\rho\chi}$ (αρχή διατήρησης της στροφορμής)

15. Εάν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν να δείξετε ότι:

α) Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή και

β) το επίπεδο περιστροφής του σώματος μένει το ίδιο.

α) Από τη σχέση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ προκύπτει αν $\Sigma\tau = 0$ τότε είναι $\frac{dL}{dt} = 0$, επομένως L=σταθ. Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.

β) Η στροφορμή είναι σταθερή όχι μόνο κατά μέτρο, αλλά και κατά φορά και διεύθυνση. Έτσι, το επίπεδο περιστροφής του σώματος παραμένει το ίδιο. Εάν ήταν διαφορετικό επειδή η στροφορμή είναι κάθετη στο επίπεδο περιστροφής πάντοτε θα άλλαζε διεύθυνση και φορά πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί αφού $\vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$.

16. Η αρχή διατήρησης της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν με κάποιο τρόπο μεταξύ τους.

Αν έχουμε σύστημα σωμάτων το οποίο εκτελεί περιστροφική κίνηση και δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, λέμε ότι η συνολική τους ροπή είναι μηδέν $\left(\Sigma\overrightarrow{\tau_{\varepsilon\xi}} = 0\right)$. Οι εσωτερικές δυνάμεις οι οποίες ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος εμφανίζονται ανά ζεύγος και είναι αντίθετες. Έτσι η συνολική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδέν. Άρα θα έχουμε:

$$\boxed{\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} = \vec{L}_{\alpha\rho\chi}}$$

17. Ένα παιδί κάθεται σε περιστρεφόμενο κάθισμα. Περιστρέφεται έχοντας τα χέρια του στη διάσταση. Ένα κάποια χρονική στιγμή συμπτύξει τα χέρια του, να βρεθεί η σχέση μεταξύ αρχικής γωνιακής ταχύτητας $\omega_{\alpha\rho\chi}$ και της τελικής $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$.

Λόγω ανακατανομής της μάζας αλλάζει η ροπή αδράνειας. Επειδή $\Sigma\overrightarrow{\tau_{\varepsilon\xi}} = 0$ θα έχουμε $\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} = \vec{L}_{\alpha\rho\chi}$ (1)

Εφόσον η φορά περιστροφής του σώματος μένει η ίδια

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow I_{αρχ} \cdot \omega_{αρχ} = I_{τελ} \cdot \omega_{τελ} \Rightarrow$$

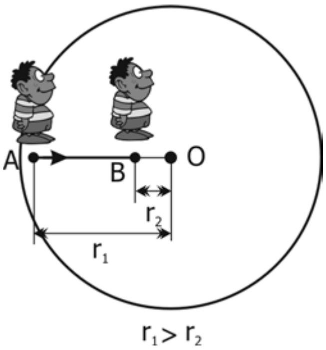
$$\omega_{τελ} = \frac{I_{αρχ}}{I_{τελ}} \cdot \omega_{αρχ} \left(I_{τελ} \langle I_{αρχ} \right)$$

18. Δίσκος παιδικής χαράς περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα κάθετο στο επίπεδο του διερχόμενο από το κέντρο του δίσκου Ο. Στο δίσκο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη. Ένα παιδί μετακινείται από το σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου στο σημείο Β πλησιέστερα στο κέντρο του. Τότε ο δίσκος θα περιστρέφεται:

α) πιο αργά

β) πιο γρήγορα

να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



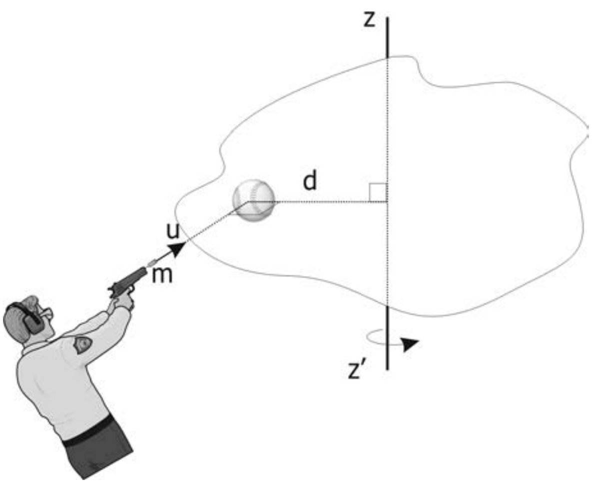
Η $\Sigma \vec{\tau}_{εξ} = 0$ άρα:

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \Leftrightarrow I \cdot \omega_1 + m \cdot \omega_1 \cdot r_1^2 = I \cdot \omega_2 + m \cdot \omega_2 \cdot r_2^2 \Rightarrow$$

$$\omega_1 \left(I + m \cdot r_1^2 \right) = \omega_2 \left(I + m \cdot r_2^2 \right) \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I + m \cdot r_2^2}{I + m \cdot r_1^2} \Rightarrow$$

$$\omega_1 \langle \omega_2$$

19. Στερεό σώμα (Σ) στρέφεται περί κατακόρυφου άξονα zz′ που διέρχεται από το κέντρο βάρους του με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Βλήμα με μάζα m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα U σφηνώνεται στο (Σ) και σταματάει σε ένα σημείο που απέχει απόσταση d από τον zz′. Αν I η ροπή αδράνειας του (Σ) ως προς τον zz′ και d η απόσταση της τροχιάς του βλήματος και του άξονα να υπολογιστεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του (Σ).



α) Στροφορμές (Σ)-βλήματος: ομόρροπες. Το βλήμα ως προς άξονα περιστροφής.

Επειδή κατά την κρούση δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (άρα και ροπές) έχουμε:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$$

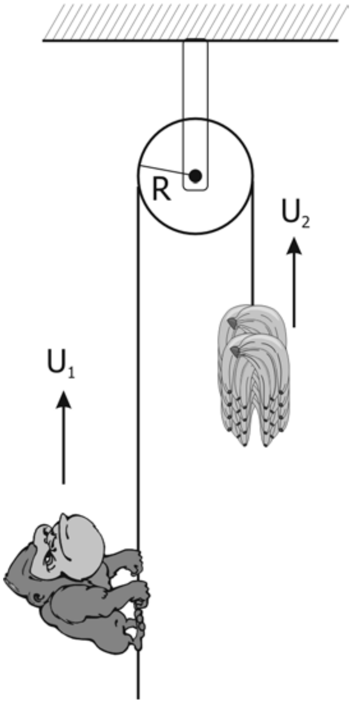
Επομένως: $I \cdot \omega_o + mud = I \cdot \omega + m\omega d^2 \Rightarrow \omega = \dfrac{I \cdot \omega_o + mud}{I + md}$

β) Στροφορμές (Σ) – βλήματος αντίρροπες

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow I \cdot \omega_o - m \cdot u \cdot d = I \cdot \omega + m \cdot \omega \cdot d^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{I \cdot \omega_o - m \cdot u \cdot d}{I + m \cdot d^2}$$

20. Ένας πίθηκος κρατιέται στην άκρη αβαρούς σχοινιού ενώ στο άλλο άκρο υπάρχει ένα κλαδί με μπανάνες Το βάρος αυτών είναι ίσο με το βάρος του πιθήκου. Ο πίθηκος θέλοντας να φθάσει στις μπανάνες αρχίζει την αναρρίχηση στο σχοινί. Κατά την αναρρίχηση του η απόσταση πιθήκου – μπανάνες θα μεταβληθεί; (Η μάζα της τροχαλίας να θεωρηθεί αμελητέα).



Έστω U_1, η ταχύτητα του πιθήκου και U_2 η ταχύτητα που ανεβαίνουν οι μπανάνες. Είναι:

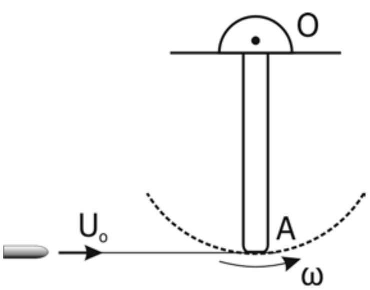
$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \Rightarrow$$

$$0 = mU_1R - mU_2R \Rightarrow$$

$$U_1 = U_2$$

Οπότε και η μεταξύ τους απόσταση θα είναι σταθερή. Έτσι ο πίθηκος δεν θα φθάσει ποτέ στις μπανάνες.

21. Βλήμα κινείται με ταχύτητα U_o προς το άκρο Α ράβδου η οποία είναι κατακόρυφη και σταθερά στερεωμένη στο άλλο της άκρο Ο. εάν η κρούση είναι πλαστική να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου – σφαίρας μετά την κρούση.

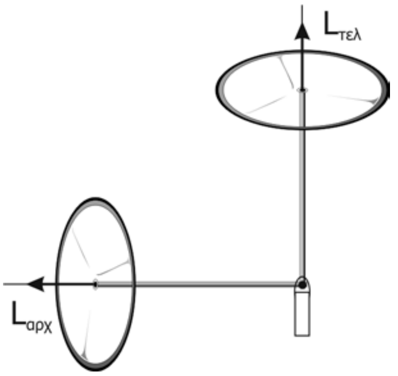


$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow mU_oL = mUL + I\omega \quad (U = \omega L)$$

$$mU_oL = m\omega L^2 + I\omega$$

$$\omega = \frac{mU_oL}{mL^2 + I}$$

22. Ο τροχός του σχήματος έχει ροπή αδράνειας 0,18 kg·m^2 και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=25 rad/s γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκώντας στο σημείο Α του άξονα περιστροφής την κατάλληλη δύναμη τον μετακινούμε ώστε να γίνει κατακόρυφος. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής.



Είναι:

$$\vec{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ} \Rightarrow \vec{\Delta L} = \vec{L}_{τελ} + \left(-\vec{L}_{αρχ}\right)$$

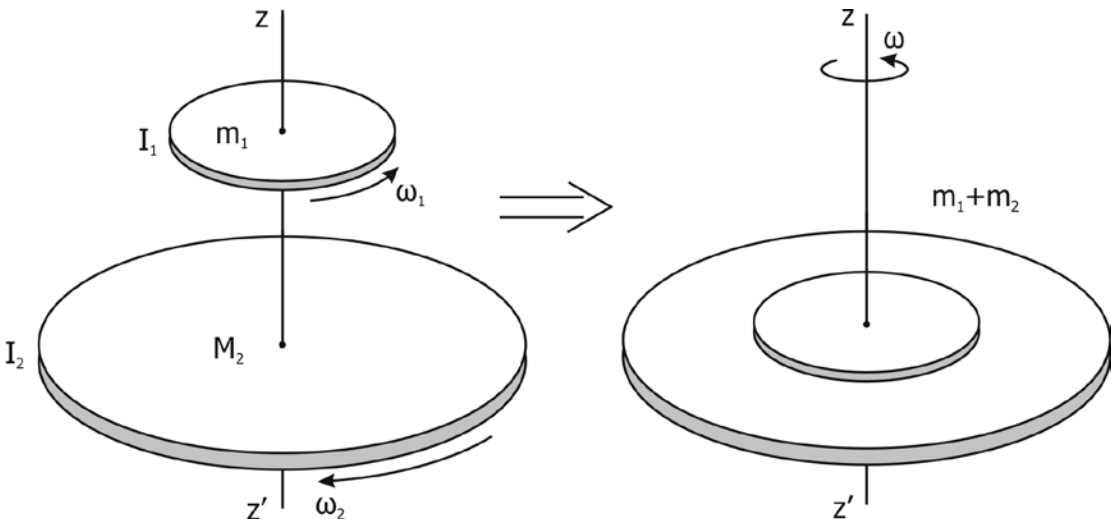
Οπότε

$$\Delta L = \sqrt{L_{τελ}^2 - L_{αρχ}^2} \text{ αφού } L_{αρχ} = L_{τελ} = I \cdot \omega$$

όποτε θα έχουμε: $\Delta L = \sqrt{2L_{αρχ}^2} = L_{αρχ}\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Delta L = 4,5\sqrt{2} kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

23. Γύρω από κατακόρυφο άξονα μπορούν να περιστρέφονται αντίθετα δύο δίσκοι οριζόντιοι όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή ο πρώτος δίσκος πέφτει πάνω στο δεύτερο δίσκο. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του συστήματος.



$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \qquad \text{και} \qquad L_{\tau\varepsilon\lambda} = I_1\omega + \mathrm{I}_2\omega$$

$$L_{\alpha\rho\chi} = I_1\omega_1 - \mathrm{I}_2\omega_2$$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} = I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = \left(I_1 + I_2\right)\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{I_1\omega_1 - I_2\omega_1}{I_1 + I_2}$$

24. Πάνω σε ένα τραπέζι που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα στέκεται ένας άνθρωπος. Ο άνθρωπος με το ένα χέρι του κρατά τον οριζόντιο άξονα ενός τροχού όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος θέτει σε κίνηση τον τροχό ο οποίος αποκτά τελικά γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=6 rad/s.

Να αποδείξετε ότι ο άνθρωπος θα περιστραφεί με αντίθετη φορά από τον τροχό και να υπολογίσετε την γωνιακή του ταχύτητα. Δίνονται: η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής $I=0.5 kg \cdot m^2$ και η ροπή αδράνειας του ανθρώπου μαζί με το κινούμενο τμήμα του τραπεζιού ως προς τον ίδιο άξονα $I' = 3\ kg \cdot m^2$.

Επειδή στο σύστημα δεν εμφανίζονται εξωτερικές ροπές $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$, θα διατηρείται η στροφορμή. Επομένως:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = \vec{L}_{\tau\rho o\chi} + \vec{L}_{\alpha\nu\theta\rho} + \vec{L}_{\tau\rho\alpha\pi} \Rightarrow$$

$$0 = I_{\tau\rho o\chi} \cdot \vec{\omega}_{\tau\rho o\chi} + I' \cdot \vec{\omega}' \Rightarrow \vec{\omega}' = -\frac{I_{\tau\rho o\chi}}{I'} \cdot \vec{\omega}_{\tau\rho o\chi}$$

Άρα ο τροχός και το τραπέζι θα περιστρέφονται σε αντίθετη φορά. Όσον αφορά το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω′ αυτή θα είναι :

$$\omega' = +\frac{0,5}{3} \cdot 6$$

$$\omega' = 1 \, {rad}/{s}$$