

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ)

ΒΗΜΑ 1^ο: Βγάζουμε κοινό παράγοντα εφ'όσον υπάρχει

Π.χ.:

1. $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ (κοινός παράγοντας το $3x$)

2. $5x^4 + 20x^3 - 25x^2 = 5x^2(x^2 + 4x - 5)$ (κοινός παράγοντας το $5x^2$)

ΒΗΜΑ 2^ο: Ελέγχουμε αν το πολυώνυμο που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε έχει τη μορφή κάποιας γνωστής αλγεβρικής ταυτότητας. Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ταυτότητες είναι:

1. $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$ (τετράγωνο αθροίσματος και διαφοράς)

2. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ (διαφορά τετραγώνων)

3. $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)$ (άθροισμα και διαφορά κύβων)

Π.χ.:

1. $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$ (διαφορά τετραγώνων)

2. $7x^3 - 56 = (\text{κοινός παράγοντας το } 7) = 7(x^3 - 8) = 7(x^3 - 2^3) = (\text{διαφορά κύβων}) = 7(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

ΒΗΜΑ 3^ο: Τριώνυμο δευτέρου βαθμού $ax^2 + \beta x + \gamma$.

Το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον εξής κανόνα:

Εάν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 πραγματικές και άνισες ($\Delta > 0$), τότε

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2) \quad (\text{τύπος 1})$$

Εάν έχει μία ρίζα ρ διπλή ($\Delta = 0$), τότε $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho)^2$ (τύπος 2)

Εάν δεν έχει ρίζες ($\Delta < 0$) δεν παραγοντοποιείται

Επομένως για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο βρίσκουμε πρώτα τις ρίζες του, ως εξής:

Πρώτα βρίσκουμε τη διακρίνουσα από τον τύπο $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Ακολουθώντας:

Αν $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες που τις βρίσκουμε από τον τύπο $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και εφαρμόζουμε τον τύπο 1.

Αν $\Delta = 0$ το τριώνυμο έχει μία ρίζα που τη βρίσκουμε από τον τύπο $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και εφαρμόζουμε τον τύπο

2.

Αν $\Delta < 0$ σταματάμε.

Π.χ.:

1. Παραγοντοποίηση του $5x^2 + 2x - 16$.

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-16) = 4 + 320 = 324$

Είναι $\Delta > 0$ οπότε οι ρίζες είναι $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 5} = \frac{-2 \pm 18}{10} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{-2+18}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \\ \rho_2 = \frac{-2-18}{10} = \frac{-20}{10} = -2 \end{cases}$

Σύμφωνα λοιπόν με τον τύπο 1 έχουμε

$$5x^2 + 2x - 16 = 5\left(x - \frac{8}{5}\right)(x + 2) = \left(5x - 8\right)(x + 2) = (5x - 8)(x + 2)$$

(Στο τελευταίο βήμα βάλουμε το 5 μέσα στην παρένθεση, δηλ. εκτελέσαμε τον πολλαπλασιασμό, για να απλοποιηθεί το κλάσμα. Αυτό δεν είναι απαραίτητο, διευκολύνει όμως τις πράξεις μετά).

2. Παραγοντοποίηση του $x^2 - 10x + 25$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$$

Αρα έχουμε μία ρίζα, την $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-10)}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$, οπότε $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

(Σχόλιο: η περίπτωση αυτή λύνεται και με εφαρμογή της ταυτότητας «τετράγωνο αθροίσματος ή διαφοράς»).

ΒΗΜΑ 4ο: Παραγοντοποίηση πολυωνύμου βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου (διαίρεση με σχήμα Hörner)

Όταν γνωρίζουμε μια ρίζα ρ ενός πολυωνύμου $P(x)$, δηλ. $P(\rho) = 0$, τότε ξέρουμε ότι το πολυώνυμο «έχει παράγοντα» το διώνυμο $(x - \rho)$, δηλ. μπορεί να γραφτεί ως $P(x) = (x - \rho) \cdot P'(x)$, όπου το $P'(x)$ είναι ένα άλλο πολυώνυμο, βαθμού κατά μία μονάδα μικρότερου από το $P(x)$ και το οποίο είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$. Δεν έχουμε, λοιπόν, παρά να εκτελέσουμε τη διαίρεση, εφ' όσον βέβαια βρούμε μια ρίζα¹, και μετά να μετατρέψουμε το πολυώνυμο σύμφωνα με την παραπάνω σχέση. Η διαίρεση με το σχήμα Hörner περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Θεωρούμε π.χ. το πολυώνυμο $P(x) = 3x^5 - 7x^3 - 5x^2 + 2x - 24$. Παρατηρούμε ότι για $x = 2$ το $P(x)$ μηδενίζεται, αφού

$$P(2) = 3 \cdot 2^5 - 7 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 24 = 3 \cdot 32 - 7 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 4 - 24 = 96 - 56 - 20 + 4 - 24 = 0$$

Θα διαιρέσουμε λοιπόν με το $(x - 2)$. Καταστρώνουμε το παρακάτω σχήμα:

3	0	-7	-5	2	-24	2
	6	12	10	10	24	
3	6	5	5	12	0	

Στην πρώτη γραμμή γράφουμε όλους τους συντελεστές του όπως είναι σε πλήρη ανάπτυξη. **Προσοχή!** Πρέπει να είναι διατεταγμένοι κατά τις κατιούσες δυνάμεις του x και να μη λείπει κανείς. Δηλ. ξεκινάμε από το συντελεστή της μεγαλύτερης δύναμης του x και συνεχίζουμε προς τα δεξιά με την αμέσως μικρότερη. Αν κάποια δύναμη λείπει, δεν την προσπερνάμε, αλλά βάζουμε 0. Δεξιά από την κάθετη γραμμή γράφουμε τον αριθμό από το διώνυμο $x - \rho$, στην προκειμένη περίπτωση το 2 (προσοχή στο πρόσημο). Στην τρίτη γραμμή γράφουμε ξανά τον πρώτο αριθμό από την πρώτη γραμμή. Στη συνέχεια ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Πολλαπλασιάζουμε κάθε αριθμό τη τρίτης γραμμής, ξεκινώντας από αριστερά, με τον αριθμό-διαιρέτη που είναι πάνω δεξιά (το 2 στο παράδειγμα) και το γινόμενο το γράφουμε στην επόμενη στήλη στη δεύτερη γραμμή. Μετά προσθέτουμε με τον αριθμό της πρώτης γραμμής που είναι από πάνω και γράφουμε το άθροισμα ακριβώς από κάτω στην τρίτη γραμμή. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με τον αριθμό αυτό και συνεχίζουμε έτσι μέχρι το τέλος της τρίτης γραμμής. Ο αριθμός που θα εμφανιστεί στο τέλος της γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης που στην περίπτωσή μας, αφού το ρ είναι ρίζα του, πρέπει να βγει 0.

Έτσι, στο παράδειγμα έχουμε τα εξής βήματα:

1. Ξαναγράφουμε το 3 στην 3^η γραμμή.
2. Πολ/ζουμε $3 \cdot 2 = 6$ και το γράφουμε δίπλα, κάτω από το 0.
3. Προσθέτουμε $0 + 6 = 6$ και το γράφουμε από κάτω.
4. Πολ/ζουμε $6 \cdot 2 = 12$ και το γράφουμε δίπλα, κάτω από το -7.
5. Προσθέτουμε $-7 + 12 = 5$ και το γράφουμε από κάτω.
6. Πολ/ζουμε $5 \cdot 2 = 10$ και το γράφουμε δίπλα, κάτω από το -5.
7. Προσθέτουμε $-5 + 10 = 5$ και το γράφουμε από κάτω.
8. Πολ/ζουμε $5 \cdot 2 = 10$ και το γράφουμε δίπλα, κάτω από το 2.
9. Προσθέτουμε $2 + 10 = 12$ και το γράφουμε από κάτω.
10. Πολ/ζουμε $12 \cdot 2 = 24$ και το γράφουμε δίπλα, κάτω από το -24.
11. Προσθέτουμε $-24 + 24 = 0$ και το γράφουμε από κάτω.

Οι αριθμοί της 3^{ης} γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου το οποίο είναι πολυώνυμο βαθμού κατά 1 μικρότερου από το $P(x)$, δηλ. 4^{ου} βαθμού. Είναι δηλ. $P'(x) = 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 5x + 12$. Δηλαδή τελικά το $P(x)$ θα γραφτεί

¹ η εύρεση μιας ρίζας δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση, όταν όμως πρόκειται για τον υπολογισμό κάποιου ορίου, η μόνη περίπτωση όπου θα χρειαστεί να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο, είναι όταν αυτό μηδενίζεται για $x = x_0$. Δηλ. μία ρίζα του είναι το x_0 . Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα ακεραίων ριζών, σχ. Βιβλίο άλγεβρας Β' Λυκείου, σελ.

$$P(x) = 3x^5 - 7x^3 - 5x^2 + 2x - 24 = (x - 2)(3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 5x + 12).$$

(Σχόλιο: εάν θέλουμε να συνεχίσουμε παραγοντοποιώντας την τελευταία παρένθεση, πρέπει να βρούμε άλλη μια ρίζα και να επαναλάβουμε όλη τη διαδικασία. Στην περίπτωση των ορίων, όμως, δεν θα χρειαστεί να το κάνουμε αυτό, παρά μόνον αν και το $P'(x)$ μηδενίζεται για $x = x_0$).