

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Λυμένες ασκήσεις – Μεθοδολογία

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο x_0

Πολυωνυμικές λέγονται οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ όπου } n = 1, 2, 3, \dots \text{ και } a_0, a_1, \dots, a_n$$

πραγματικοί αριθμοί. Επειδή κάθε πολυωνυμική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, εξασφαλίζονται πάντα οι προϋποθέσεις ύπαρξης του ορίου. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Βάσει αυτού θα υπολογίζουμε πάντα το όριο στις

πολυωνυμικές συναρτήσεις (δεν χρειάζεται να το αποδεικνύουμε, εκτός αν ζητείται).

Άσκηση 3.1

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 5x - 1)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} (-3x + 7)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -1} (5x^3 + 7x^2 - x - 2)$

Λύση

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 5x - 1) = 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1 = 3 - 5 - 1 = -3$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} (-3x + 7) = -3 \cdot (-2) + 7 = 6 + 7 = 13$

iii. $\lim_{x \rightarrow -1} (5x^3 + 7x^2 - x - 2) = 5 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - (-1) - 2 = -5 + 7 + 1 - 2 = 1$

Όριο ρητής συνάρτησης στο x_0

Ρητές ονομάζονται οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, όπου οι $g(x)$

και $h(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του x . Οι ρητές συναρτήσεις ορίζονται σ' όλο το $\mathbb{R}$, εκτός από τις ρίζες (τα σημεία όπου μηδενίζεται) του παρονομαστή. Επειδή, όμως, οι ρίζες του παρονομαστή είναι μεμονωμένα σημεία στο $\mathbb{R}$, ακόμα κι αν το x_0 είναι κάποιο απ' αυτές, θα υπάρχει πάντα περιοχή του x_0 , που θα ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , οπότε, σε κάθε περίπτωση, εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις ύπαρξης του ορίου. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

A. Το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι και στις πολυωνυμικές, δηλ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B. Το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , δηλ. μηδενίζει τον παρονομαστή. Θ' ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου έχουμε

απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, δηλ. όταν το x_0 μηδενίζει και τον αριθμητή. Τότε

παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους του κλάσματος, οπότε πρέπει και στους δύο να εμφανιστεί ο παράγοντας $x - x_0$, τον οποίο διαγράφουμε, απλοποιώντας το κλάσμα*. Μετά την απλοποίηση είτε αναγόμεσθε στην περίπτωση Α, είτε συνεχίζουμε να έχουμε απροσδιοριστία, οπότε επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στην περίπτωση Α.

Άσκηση 3.2

Να βρεθούν τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 8}{2x - 1}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 1}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

Λύση

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 8}{2x - 1} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 8}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{4 - 6 + 8}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 1} = \frac{1 - 1}{1^2 - 2 \cdot 1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0$
- iii. Είναι $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$$
- iv. Είναι $\frac{3^2 - 4 \cdot 3 + 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 3 - 1 = 2^{**}$$

Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ με ριζικά

Πρόκειται για συναρτήσεις κλασματικής μορφής, όπου το x_0 μηδενίζει και τους δύο όρους του κλάσματος και όπου ο αριθμητής ή ο παρονομαστής ή και

* Η απλοποίηση είναι επιτρεπτή γιατί, όταν το x τείνει στο x_0 είναι διαφορετικό από το x_0 , δηλ. το $x - x_0$ είναι διαφορετικό από το 0.

** Παραγοντοποίηση του τριωνύμου (όταν $\Delta > 0$). Βρίσκουμε τις ρίζες ρ_1, ρ_2 του τριωνύμου.

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ και } \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ όπου } \Delta = \beta^2 - 4a\gamma. \text{ Τότε}$$

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2).$$

οι δύο είναι της μορφής $\sqrt{a(x)} - \sqrt{\beta(x)}$, όπου $a(x)$ και $\beta(x)$ είναι παραστάσεις του x . Στην περίπτωση αυτή πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους με τη συζυγή παράσταση που είναι $\sqrt{a(x)} + \sqrt{\beta(x)}$. Θα έχουμε, τότε

$(\sqrt{a(x)} - \sqrt{\beta(x)})(\sqrt{a(x)} + \sqrt{\beta(x)}) = (\sqrt{a(x)})^2 - (\sqrt{\beta(x)})^2 = a(x) - \beta(x)$, όπου εφαρμόσαμε τη γνωστή ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων. Με τον τρόπο αυτόν απαλλασσόμαστε από τα ριζικά και μπορούμε στη συνέχεια να δουλέψουμε όπως και στις ρητές συναρτήσεις.

Άσκηση 3.3

Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{x^2 - 4}$$

Λύση

Είναι προφανές ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3 - \sqrt{5x-1})(3 + \sqrt{5x-1})}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{5x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^2 - (\sqrt{5x-1})^2}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{5x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - (5x-1)}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{5x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10 - 5x}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{5x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(x-2)}{(x-2)(x+2)(3 + \sqrt{5x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)(3 + \sqrt{5x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{(x+2)(3 + \sqrt{5x-1})} = \frac{-5}{(2+2)(3 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1})} = \frac{-5}{4 \cdot 6} = -\frac{5}{24} \end{aligned}$$

Συνέχεια συνάρτησης στο x_0

Εξετάζουμε αν ισχύει η συνθήκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Όταν χρειάζεται (όταν π.χ. η f αλλάζει τύπο στο x_0) αντί για την παραπάνω συνθήκη παίρνουμε την $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ με τα πλευρικά όρια. Όταν απαιτείται ο υπολογισμός παραμέτρων για να εξασφαλιστεί η συνέχεια της f στο x_0 , οι παραπάνω συνθήκες μας δίνουν τις απαραίτητες εξισώσεις.

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα

Αποδεικνύουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στα ανοιχτά διαστήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και αυτά που ξέρουμε για τη συνέχεια των βασικών συναρτήσεων (§3.8 και 3.9 του βιβλίου). Κατόπιν εξετάζουμε τη συνέχεια ειδικά στα κρίσιμα σημεία, όπως τα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού ή τα σημεία στα οποία η συνάρτηση αλλάζει τύπο.

Άσκηση 3.4

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , x \leq 0 \\ x^2-2 & , 0 < x \leq 1 \\ \frac{x-3}{x+1} & , x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, 1)$ ως πολυωνυμική.

Επίσης, επειδή η $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$, ως ρητή, είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$, άρα και στο $(1, +\infty)$, και η f θα είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$.

Εξετάζουμε τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 1) = 3 \cdot 0 - 1 = -1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2) = 0^2 - 2 = -2$$

Άρα τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (είναι μόνο από αριστερά συνεχής αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$).

Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = 1^2 - 2 = -1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x+1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ισχύει, λοιπόν, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 3.5

Να ορισθεί κατάλληλα η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 6}{x+1}$ στο σημείο $x_0 = -1$, ώστε να είναι συνεχής.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 6}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+6)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+6) = -1+6 = 5.$$

Αρκεί, λοιπόν, να ορίσουμε ως $f(-1) = 5$, οπότε η f θα είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

Άσκηση 3.6

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 - 1 & , x \leq 1 \\ 3x - 3 - a & , x > 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Λύση

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$, πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1^2 - a^2 - 1 = -a^2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 3 - a) = 3 \cdot 1 - 3 - a = -a.$$

Πρέπει, λοιπόν, $-a^2 = -a \Rightarrow a - a^2 = 0 \Rightarrow a(1-a) = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $a = 1$.

Άσκηση 3.7 (Θέμα πανελληνίων, Ιούνιος 2001)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x > 3 \\ \lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1, & x \leq 3 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

α. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

Μονάδες 8

β. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 12

Λύση

α. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 3-2 = 1$

β. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1) = \lambda^2 \cdot 3^2 + 3\lambda \cdot 3 + 1 = 9\lambda^2 + 9\lambda + 1$

γ. Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9\lambda^2 + 9\lambda + 1 = f(3)$ και

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$. Συνεπώς, για να είναι η f συνεχής, θα πρέπει:

$$9\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 1 \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow 9\lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Πλευρικά όρια στο x_0 . Χρησιμοποιούμε πλευρικά όρια, όταν η συνάρτηση «συμπεριφέρεται» διαφορετικά στις δύο πλευρές του x_0 (π.χ. στις πολύτιμες συναρτήσεις, ή στις συναρτήσεις με απόλυτες τιμές, όταν η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο x_0 ή όταν το x_0 είναι άκρο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης). Σε κάθε περίπτωση στηρίζομαστε στον κανόνα που λέει ότι για να υπάρχει το όριο στο x_0 πρέπει να υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια και να είναι ίσα, οπότε βρίσκουμε το όριο βάσει της σχέσης

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Άσκηση 3.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq -1 \\ \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} & , -1 < x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{2x - 3} & , x \geq 1 \end{cases}$

Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

Α. Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ βρίσκουμε τα $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(3x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(-1)-1}{-1-1} = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$.

(Στην εύρεση του δεξιού ορίου, για την παραγοντοποίηση του τριωνύμου $3x^2 + 2x - 1$ εργαστήκαμε ως εξής:

$$\text{Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$$

$$\text{Ρίζες } \rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \rho_2 = \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } 3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1) = \left(3x - 3 \cdot \frac{1}{3}\right)(x+1) = (3x-1)(x+1).$$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0,$$

$$\text{ενώ } \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 2x - 1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 4, \text{ άρα δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x),$$

επομένως δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, Υπάρχει μόνο δεξιό όριο στο 1 το

$$\text{οποίο είναι: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = 2 \cdot 1 - 3 = -1.$$