

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ 1: Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 2x - 8} & , x < -2 \\ 3x + k & , x \geq -2 \end{cases}$$

1. Πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: α) στο διάστημα $(-\infty, -2)$ η συνάρτηση έχει τη μορφή

$\frac{3x^2 - 12}{x^2 - 2x - 8}$, δηλ. είναι ρητή και, ως τέτοια, είναι ορισμένη και συνεχής σ' όλο το

διάστημα, εκτός των σημείων όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής. Βρίσκουμε τα σημεία αυτά λύνοντας την εξίσωση $x^2 - 2x - 8 = 0$. Είναι

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$. Οι ρίζες είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}, \text{ από τις οποίες όμως καμμία δεν ανήκει}$$

στο διάστημα $(-\infty, -2)$. Άρα η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\infty, -2)$.

β) Στο διάστημα $(-2, +\infty)$ η f έχει τη μορφή $3x + k$, δηλ. είναι πολυωνυμική, άρα ορισμένη και συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$, άρα και στο $(-2, +\infty)$.

2. Μελετάμε τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = -2$. Ξέρουμε ότι για να είναι συνεχής πρέπει

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2)$ **(1)**. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 2x - 8} \stackrel{\text{απροσδιοριστία } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x^2 - 4)}{(x+2)(x-4)} =$$

$$\stackrel{\text{ταυτότητα}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x-2)}{x-4} = \frac{3(-2-2)}{-2-4} = \frac{-12}{-6} = 2. \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x + k) =$$

$3(-2) + k = -6 + k$ και $f(-2) = 3(-2) + k = -6 + k$. Άρα η **(1)** $\Leftrightarrow 2 = -6 + k \Leftrightarrow k = 8$.

Άρα: 1. Για $k = 8$ η f είναι συνεχής και στο $x_0 = -2$, δηλ. συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

2. Για $k \neq 8$ η f παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x_0 = -2$.