Ανάλυση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Όριο και συνέχεια συνάρτησης

§ 1.2 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ είναι το ευρύτερο υποσύνολο του R που περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x ώστε οι αντίστοιχες εικόνες τους (δηλαδή τα y ή αλλιώς τα f(x)) να είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού έχουμε υπόψη τα εξής:

• Οι παρονομαστές $\neq 0$	• Στο ln(h(x)) το $h(x) > 0$	• Στο εφ(h(x)) το $h(x) \neq \kappa\pi+\pi/2$
• Τα υπόριζα ≥ 0	• Στο $(h(x))^{g(x)}$ το $h(x) > 0$	• Στο σφ(h(x)) το $h(x) \neq \kappa\pi$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Σε συνδυασμό των παραπάνω , συναληθεύω.
- Αν δεν έχω κανένα από τα παραπάνω, είναι όλο το R .

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$	2) $f(x) = \dfrac{3x+2}{3x-1}$	3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
4) $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x\right)$	5) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{6x^2 + 5x + 1}\right)$	6) $f(x) = 3^{x^2-1}$
7) $f(x) = \varepsilon\varphi\,\dfrac{x}{2} - 1$	8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$	9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$
10) $f(x) = \dfrac{\lvert x-1\rvert + 2}{\lvert x+3\rvert - 1}$	11) $f(x) = \sqrt{3\lvert x-2\rvert - 3}$	12) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

13) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - e^2}}{\sqrt{\ln x - 1}}$ 14) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 2}$ 15) $f(x) = \sqrt{1-\ln^2 x^2}$

16) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x\sqrt{x} - 5x + 4\sqrt{x}}}$ 17) $f(x) = \sqrt{\pi - \sigma\upsilon\nu x}$ 18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+3}}{12x^3 + 29x^2 + 23x + 6}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ Είναι το υποσύνολο του R που έχει για στοιχεία όλες τις τιμές της f . Δηλαδή όλα τα f(x) για κάθε $x \in D_f$. Συμβολίζεται με f(A) και είναι $f(A) = \{\, y \;/\; y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in D_f \,\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αν $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, τότε ισχύει

Α. $f(x) = x + |x|$ **Β.** $f(x) = |x| - x$ **Γ.** $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ **Δ.** $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2}$ **Ε.** $f(x) = |x|$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x - 5$. Αν $f(1) = 8$ και $f(-1) = 4$, η τιμή της παράστασης $\kappa + 2\lambda$ είναι ίση με **Α.** 0 **Β.** 8 **Γ.** 13 **Δ.** - 11 **Ε.** 11

3. Να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

β) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-2} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{|x-2| - 1} + \dfrac{1}{|3x-8| - |x|}$

δ) $f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log\dfrac{x+3}{3-x}$

ε) $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x - 1} + \dfrac{1}{\varepsilon\varphi x - 1}$, $x \in [0, 2\pi]$

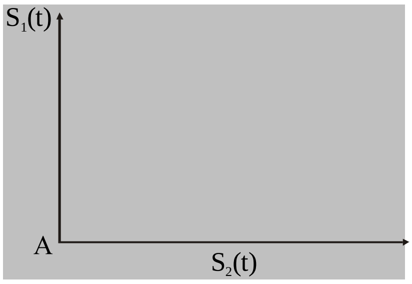
στ) $f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$

4. Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο Α και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του Α με ταχύτητα $υ_1$ = 60 km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του Α με ταχύτητα $υ_2$ = 80 km/h.

α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν Μ το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση ΑΜ ως συνάρτηση του t.

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το Μ να απέχει από το Α 180 km;



5. Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$. Το ημερήσιο κόστος K (x) σε χιλιάδες μονάδες "ΕΥΡΩ" για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι $K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος Κ ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

β) Πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια "ΕΥΡΩ";

6. Για να περιοριστεί η κατανάλωση νερού σε μία πόλη, ανακοινώνεται ότι μια οικογένεια 4 ατόμων, θα πληρώνει το μήνα για τα πρώτα 1.200 κ.μ. νερού, 3 ευρώ ανά 100 κ.μ.. Για παραπάνω κατανάλωση δηλ. από 1.200 - 2.400 κ.μ. θα πληρώνουν 5 ευρώ ανά 100 κ.μ. (για τα παραπάνω από1200) και αν η κατανάλωση ξεπερνά τα 2.400 κ.μ., θα πληρώνουν 8 ευρώ ανά100 κ.μ. (για τα παραπάνω από τα 2400) . Να εκφράσετε το μηνιαίο λογαριασμό της οικογένειας σε ευρώ, ως συνάρτηση της ποσότητας του νερού που καταναλώνει.

§ 1.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

μορφή	**πως κατασκευάζεται**
$f(x) = \alpha x + \beta$	Είναι ευθεία και βρίσκω δύο σημεία με πίνακα τιμών
$f(x) = \alpha x^2$	Είναι παραβολή με κορυφή το (0,0) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Είναι παραβολή με κορυφή το $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, τέμνει τον x΄x στις ρίζες (αν έχει) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \alpha x^3$	Είναι καμπύλη με κέντρο συμμετρίας το (0,0) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \frac{\alpha}{x}$	Είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τους άξονες, κέντρο συμμετρίας το (0,0) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \alpha^x$	Είναι εκθετική καμπύλη και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \log_\alpha x$	Είναι λογαριθμική καμπύλη και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών (χρησιμοποιώ δυνάμεις του α)
$f(x) = \eta\mu(\alpha x)$	Είναι ημιτονοειδής καμπύλη με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$ και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών (χωρίζω μία περίοδο σε 4 ισομήκη διαστήματα)
$f(x) = \sigma\upsilon\nu(\alpha x)$	Είναι συνημιτονοειδής καμπύλη με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\lvert\alpha\rvert}$ και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών (χωρίζω μία περίοδο σε 4 ισομήκη διαστήματα)
$f(x) = \varepsilon\varphi x$	Είναι καμπύλη με περίοδο $T = \pi$ και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Θέση της C_f ως προς τον x΄x

Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τον x΄x	Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τον x΄x	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι κάτω από τον x΄x	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$

Θέση της C_f με C_g

Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με την C_g	Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι κάτω από την C_g	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$

Αν γνωρίζω την C_f τότε πως προκύπτει η C_g ;

• Όταν $g(x) = f(x) + c$	Μετατοπίζουμε τη C_f παράλληλα στο y΄y κατά c $\uparrow$ αν $c>0$ $\downarrow$ αν $c<0$
• Όταν $g(x) = f(x - c)$	Μετατοπίζουμε τη C_f παράλληλα στο x΄x κατά c $\rightarrow$ αν $c>0$ $\leftarrow$ αν $c<0$
• Όταν $g(x) = -f(x)$	Βρίσκουμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον x΄x .
• Όταν $g(x) = \lvert f(x) \rvert$	Όποιο τμήμα της C_f είναι πάνω από τον x΄x παραμένει ίδιο και βρίσκουμε το συμμετρικό σε όποιο τμήμα είναι κάτω από τον x΄x .

Πότε μία f είναι άρτια ή περιττή και τι σημαίνει για την C_f ;

• Η f είναι άρτια όταν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in D_f$	Η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y .
• Η f είναι περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D_f$	Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Η συνάρτηση g, της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 1 - 2^x$, ως προς τον άξονα y΄y, έχει τύπο

Α. $g(x) = 1 + 2^x$ **Β.** $g(x) = 1 - 2^{-x}$ **Γ.** $g(x) = 2^x - 1$ **Δ.** $g(x) = \ln(x - 1)$ **Ε.** $g(x) = \ln(1 - x)$

8. Η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση τη συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$, είναι η συνάρτηση

Α. $y = f(-x)$ **Β.** $y = -f(x)$ **Γ.** $y = |f(x)|$ **Δ.** $y = 2f(x)$ **Ε.** $y = -f(-x)$

9. Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα x΄x είναι **Α.** 6 **Β.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 0

10. Το σύνολο των τετμημένων των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ τέμνει τον άξονα x΄x είναι

Α. $\{-1, 1\}$ **Β.** $\{1\}$ **Γ.** $\{-1, 1, 3\}$ **Δ.** $\{-1, -3, 1\}$ **Ε.** $\{1, 3\}$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2 - x$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεών τους είναι οι αριθμοί

Α. 1, 0 **Β.** 1, - 1 **Γ.** 1 **Δ.** 1, 2 **Ε.** 1, 0, 2

12. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = 2x + 3$ 2) $f(x) = -2x^2$ 3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

4) $f(x) = e^x$ 5) $f(x) = \ln x$ 6) $f(x) = -\ln x$

7) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \le 2 \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$ 8) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ 9) $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \le 0 \\ x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \ge 1 \end{cases}$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

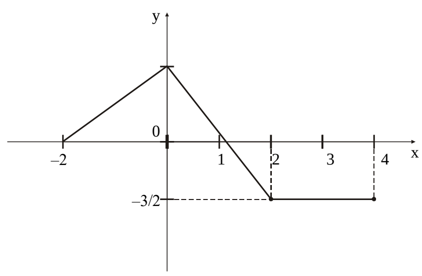
α) $f_1(x) = f(x) + 1$ β) $f_2(x) = -f(x)$ γ) $f_3(x) = |f(x)|$

14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [2, 4]. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $g(x) = f(x) + 1$

β) $h(x) = -f(x)$

γ) $\varphi(x) = |f(x)|$.



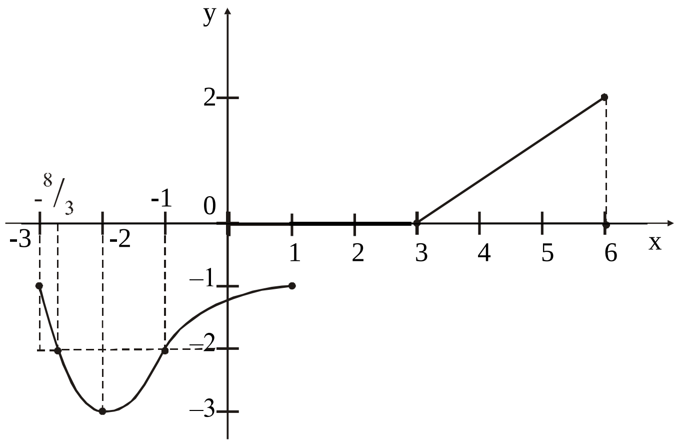
15. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g.

β) Να βρείτε τον τύπο της g όταν x ∈ [3, 6].

γ) Για ποιες τιμές του x ισχύει g (x) = - 1;

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: i) - 2 < g (x) < 0 ii) g (x) ≥ 0



16. Έστω η συνάρτηση f (x) = x (x - 2), x ∈ [0, 2].

α) Να αποδείξετε ότι f (x) ≤ 0 για κάθε x ∈ D_f.

β) Να αποδείξετε ότι f (x) = $(x - 1)^2$ - 1 και στη συνέχεια να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα [-1,0].

γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x όταν οι τιμές του y = 0 και όταν y = $\frac{3}{4}$.