

# **ΒΟΗΘΗΣΤΕ ΤΟΥΣ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΟΥΣ ΒΡΕΙΤΕ ΤΗΝ ΗΛΙΚΙΑ ΤΟΥ ΠΙΑΤΟΥ**

Σενάριο με το λογισμικό GeoGebra  
στα πλαίσια Εκπαίδευσης Επιμορφωτών

**ΠΑΚΕ ΒΟΡΕΙΟΥ και ΝΟΤΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ**

**ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΗΣ**

**ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ**

# ΒΟΗΘΗΣΤΕ ΤΟΥΣ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΟΥΣ ΒΡΕΙΤΕ ΤΗΝ ΗΛΙΚΙΑ ΤΟΥ ΠΙΑΤΟΥ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ: ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ



Έρως και γυναίκα

Μουσείο Τέχνης Βοστώνη

## ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Αρχαιολόγοι ανακάλυψαν ένα μέρος από το χείλος ενός πιάτου. Δεν υπάρχουν σημάδια που να μας δείχνουν την ηλικία του πιάτου. Όμως ξέρουν ότι πιάτα με διάμετρο μεγαλύτερη από 28 cm είναι αντιπρόσωποι της εποχής πριν το 300πΧ. Αν η διάμετρος είναι μικρότερη ή ίση των 28 cm τότε το πιάτο πρέπει να έχει κατασκευαστεί το έτος 300πΧ. ή αργότερα. Πιάτα που κατασκευάστηκαν πριν το 300πΧ. Αξίζουν πολύ περισσότερο. Μπορείτε να τους βοηθήσετε;

1) **Τι** καλούνται οι μαθητές να μάθουν και γιατί

## ΕΜΠΛΕΚΟΜΕΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- Κύκλος
- Ορθή γωνία
- Ευθύγραμμο τμήμα
- Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος
- Τρίγωνο
- Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

## Ορισμοί εννοιών

Ο **κύκλος** από τη μεριά του είναι το ευκολότερο καμπυλόγραμμο σχήμα. Η χρήση αυτού του σχήματος ιστορικά έχει προωθήσει την ανάπτυξη της ανθρωπότητας με την εφαρμογή του τροχού. Σε εύπλαστα υλικά αποτελεί το πρώτο σχήμα που κατασκευάζεται και μάλλον αυτός είναι ο λόγος που μεταμορφώνει τη ζύμη σε πατροπαράδοτα στρογγυλά Πασχαλινά κουλουράκια.

Οι έννοιες του **ορθογωνίου τριγώνου** και της **ορθής γωνίας** είναι από τις πλέον εφαρμόσιμες έννοιες των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Είναι χρήσιμη στους αρχιτέκτονες, τους σχεδιαστές, στους μηχανικούς, τους μαραγκούς, στους χτίστες και γενικά σε όλους όσους ασχολούνται με κατασκευές.

Το **ευθύγραμμο τμήμα** είναι μια έννοια που οι μαθητές είναι αρκετά εξοικειωμένοι με αυτήν. Το **μέσο του ευθυγράμμου τμήματος** είναι επίσης μια έννοια που οι μαθητές την αναγνωρίζουν εύκολα. Συνήθως κάνουν λάθος όταν χρησιμοποιούν αυτή την έννοια αδιακρίτως σε σχήματα απείρου μήκους όπως είναι οι ευθείες. Συνήθως την αρχή των αξόνων αναφέρουν ότι την παίρνουμε στο μέσο της ευθείας.

Το **τριγώνο** σαν σχήμα είναι εύκολα αναγνωρίσιμο από τους μαθητές. Συνήθως κάνουν λάθος στα είδη των τριγώνων που υπάρχουν ιδιαίτερα αν αυτά είναι συνδυασμός των δυο κύριων στοιχείων του τριγώνου, πχ ορθογώνιο και ισοσκελές, αμβλυγώνιο και ισοσκελές κλπ.

2) **Ποιοι θα μάθουν:** Η διδασκαλία απευθύνεται σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου

**Ποιες οι προ-απαιτούμενες γνώσεις:** Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του κύκλου, του τριγώνου, του ευθυγράμμου τμήματος και του μέσου του καθώς και την έννοια της ορθής γωνίας. Οι υπόλοιπες εμπλεκόμενες έννοιες θα προκύψουν από τη διδασκαλία.

3) **Πως θα μάθουν οι μαθητές** (δημιουργία του μοντέλου μάθησης):

α) **ποια γνωσιοθεωρητική προσέγγιση χρησιμοποιείται:** σύγχρονες κοινωνικές και εποικοδομιστικές προσεγγίσεις

β) **ποια μεθοδολογία διδασκαλίας:** η διερευνητική μέθοδος, ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και ο καθηγητής στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης

γ) **ποιες καινοτομίες εισάγονται, σύγκριση με μια παραδοσιακή διδασκαλία για την ίδια έννοια στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι:** Το εκπαιδευτικό λογισμικό και μέσα από αυτό οι δυνατότητες 'άμεσης διαχείρισης' των γεωμετρικών αντικειμένων, ώστε ο μαθητής να μπορεί να διατυπώσει/επαληθεύσει εικασίες στηριγμένες, σε θεωρητικά, άπειρα εμπειρικά δεδομένα. Η

ομαδοσυνεργατική δουλειά για τη διαπραγμάτευση των απόψεων. Το φύλλο εργασίας. Οι προσεκτικά σχεδιασμένες ερωτήσεις. Ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και όχι του παθητικού δέκτη που συνήθως συμβαίνει στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Ο καθηγητής μπαίνει στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης και όχι στο ρόλο του πομπού που συνήθως συμβαίνει στο περιβάλλον μιας παραδοσιακής τάξης.

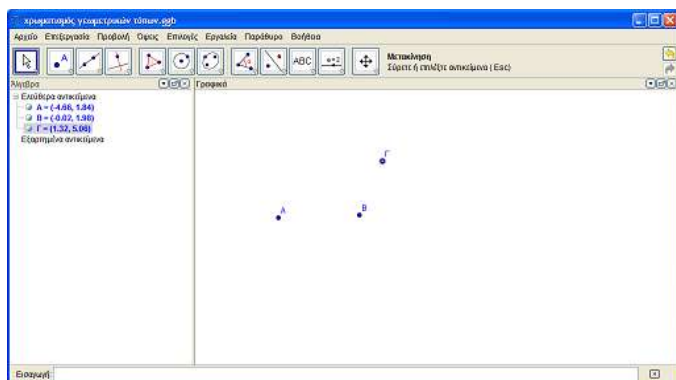
**δ) ποιος ο ρόλος των εργαλείων και των άλλων υλικών που χρησιμοποιούνται (το φύλλο εργασίας που θα δοθεί) :** Ο μαθητής θα χρησιμοποιήσει το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και θα μπει στη θέση του ερευνητή με στόχο να κατασκευάσει εικασίες, γενικεύσεις και συμπεράσματα. Το φύλλο εργασίας με τις κατάλληλες ερωτήσεις θα βοηθήσει το μαθητή να εστιάσει στα σημεία που δυσκολεύεται και να τα ξεπεράσει μέσω του πειραματισμού του στο λογισμικό και επίσης θα τον βοηθήσει να αποτυπώσει τη γνώση που κατασκεύασε. Το φύλλο εργασίας με τις κατάλληλες ερωτήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση της μάθησης του μαθητή.

**ε) ποιος ο χρόνος, ο χώρος και τα απαιτούμενα μέσα υλοποίησης. Ποια θα είναι η οργάνωση της τάξης:** 4 περίπου διδακτικές ώρες στο εργαστήριο υπολογιστών. Οι μαθητές θα δουλεύουν σε ομάδες των 2-3 ατόμων (2-3 άτομα ανά υπολογιστή). **στ) ποιες δραστηριότητες θα τεθούν, ποιες ερωτήσεις θα χρησιμοποιηθούν, πως θα γίνει η αξιολόγηση της μάθησης:** Παρατίθενται η ροή διδασκαλίας και σχετικά φύλλα εργασίας.

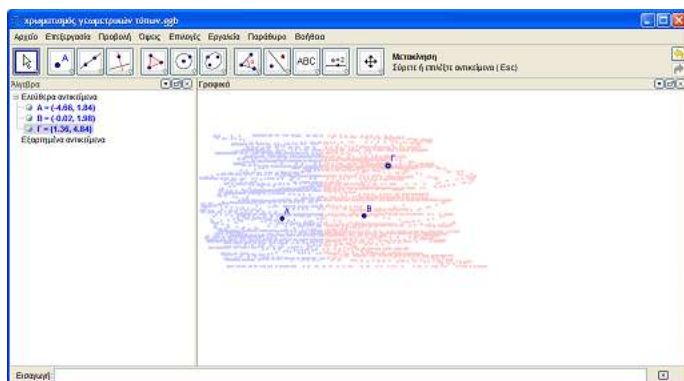
**4) Ροή διδασκαλίας και επιλογή κατάλληλων εργαλείων:** Επειδή οι μαθητές είναι Α΄ Γυμνασίου, δεν έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τεχνικές που εμπλέκουν πολλές έννοιες των Μαθηματικών. Αυτό γιατί ακόμα οι θεωρητικές γνώσεις τους είναι ακόμα ανεπαρκείς για να μπορέσουν να στηρίξουν μια θεωρητική μελέτη του προβλήματος. Θα πρέπει λοιπόν να διερευνήσουν το πρόβλημα και μέσα από τη διερεύνηση να βγάλουν συμπεράσματα που θα τους οδηγήσουν στη λύση. Κυρίως λοιπόν θα κινηθούν διαισθητικά για να μπορέσουν έτσι να προτείνουν εικασίες, την αλήθεια των οποίων θα εξακριβώσουν με τον εμπειρικό τρόπο των μετρήσεων. Με την τεχνική των μετρήσεων θα μπορέσουν να βγάλουν συμπεράσματα τα οποία είναι σε αρμονία με τις εικασίες τους και έτσι θα φανερώσουν τις συσχετίσεις που έχουν τα μεγέθη που μελετάνε. Από αυτές τις συσχετίσεις μπορούν να καταλήξουν σε συμπεράσματα που θα τους οδηγήσουν στην επίλυση των διαφόρων προβλημάτων που θα τους τεθούν κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών και τελικά να προτείνουν τη λύση του βασικού προβλήματος που είναι η

εύρεση της ακτίνας του πιάτου.. Επειδή λοιπόν ο στόχος μου είναι οι μαθητές να δουλέψουν με ένα μεγάλο πεδίο δεδομένων και από τη παρατήρηση να οδηγηθούν σε εικασίες και συμπεράσματα, αποφάσισα η διδασκαλία να γίνει με το λογισμικό GeoGebra 4 για MS Windows, ώστε να μπορέσουν σε λίγο χρονικό διάστημα να επεξεργαστούν μεγάλο όγκο στοιχείων. Η επιλογή του συγκεκριμένου λογισμικού έγινε γιατί είναι απλούστερο στη λειτουργία του σε σχέση με τα άλλα λογισμικά του ίδιου είδους. Η απλότητα αυτή εμφανίζεται στην δυνατότητα δίχρωμου διαχωρισμού των σημείων του επιπέδου, για να φανεί ένας συγκεκριμένος γεωμετρικός τύπος, σαν το κοινό σύνορο των δυο έγχρωμων επιφανειών. Θα μπορέσουν έτσι οι μαθητές στην αρχή να αντιληφθούν το γεωμετρικό τόπο διαισθητικά, αφού θα μπορούν εύκολα να τον δημιουργήσουν σαν «ζωγραφιά». Μέσα από τα σχέδια που θα δημιουργηθούν θα κάνουν παρατηρήσεις πάνω στη μορφή και τη δομή του γεωμετρικού τόπου, με κατάλληλη καθοδήγηση θα θέσουν τις εικασίες τους και μετά θα τις επαληθεύσουν με πληθώρα μετρήσεων.

Αρχικά οι μαθητές θα κληθούν να ανοίξουν το αρχείο του GeoGebra «χρωματισμός γεωμετρικών τόπων». Η αρχική οθόνη θα παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα



Μετακινώντας το σημείο Γ αυτό θα χρωματίζει την επιφάνεια εργασίας κόκκινη ή μπλε. Με απλές κινήσεις οι μαθητές θα δημιουργήσουν γρήγορα σχήματα όπως αυτό που φαίνεται παρακάτω. Προφανώς η πυκνότητα του χρωματισμού είναι θέμα του κάθε μαθητή. Οι ερωτήσεις που πρέπει να γίνουν θα αφορούν τον τρόπο που



μπορούμε να αποφασίσουμε πότε ένα σημείο θα βαφτεί κόκκινο και πότε γαλανό. Αυτό αφορά τη θέση του σημείου Γ σχετικά με τα σημεία A και B, αφού αυτό

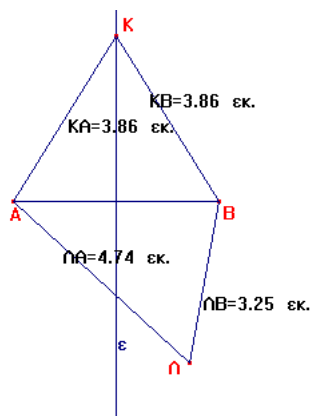
είναι που κινείται και ζωγραφίζει. Επομένως εκφράσεις όπως στη μεριά του Α ή στη μεριά του Β είναι αυτές που θα προσπαθήσουμε να πουν οι μαθητές. Η μεσοκάθετος του ΑΒ που είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος, εύκολα διακρίνεται σαν σύνορο των δυο χρωματιστών περιοχών. Αν λοιπόν πούμε ότι κόκκινη είναι η περιοχή είναι όταν το Γ είναι πιο κοντά στο Β και γαλανή αυτή που είναι πιο κοντά στο Α, τότε στο κοινό σύνορο το σημείο Γ θα πρέπει να ισαπέχει από τα Α και Β. Αυτή είναι μια από τις εικασίες που θα πρέπει να εκφράσουν οι μαθητές και μετά να την διερευνήσουν με τις δυνατότητες που παρέχει το λογισμικό. Αφού βρούμε τη συνθήκη ένα σημείο να ισαπέχει από δυο άλλα, θα διερευνήσουμε το πρόβλημα τότε ένα σημείο ισαπέχει από τρία άλλα μη συνευθειακά σημεία.

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1 (1 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ)

### **ΤΙΤΛΟΣ : Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος**

#### **A. Κατασκευή**

1. Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα και ονομάστε το ΑΒ
2. Κατασκευάστε την μεσοκάθετο του και ονομάστε την ε
3. Πάρτε ένα σημείο Κ πάνω στην ε και ένα σημείο Λ εκτός της ε
4. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΛΑ και ΛΒ, μετρήστε τα και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές τους
5. Μετακινήστε το σημείο Κ πάνω στην ε, το σημείο Λ εκτός της ε και στα δύο ημιεπίπεδα της και τα σημεία Α και Β σε διάφορες θέσεις και πινακοποιήστε αυτόματα τις νέες τιμές των ευθυγράμμων τμημάτων ΚΑ και ΚΒ



	ΚΑ=	ΚΒ=	ΛΑ=	ΛΒ=
1	2.88	2.88	2.80	3.98
2	3.17	3.17	2.80	3.98
3	3.53	3.53	2.80	3.98
4	3.86	3.86	2.80	3.98
5	3.86	3.86	3.38	4.18
6	3.86	3.86	4.00	3.69
7	3.86	3.86	4.74	3.25

**Σχήμα 1. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος**

## ***B. Ερωτήσεις***

- Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΑ και ΚΒ;
- Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα ΛΑ και ΛΒ;
- Πότε είναι μεγαλύτερο το ΛΑ από το ΛΒ;
- Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της μεσοκαθέτου του ΑΒ;
- Αν ένα σημείο δεν ανήκει στην μεσοκάθετο έχει την παραπάνω ιδιότητα;
- Ποια σημεία είναι πιο κοντά στο Α απ' ότι στο Β ;
- Διατυπώστε συγκεντρωτικά τα συμπεράσματά σας

Στην επόμενη διδακτική ώρα θα κάνουμε μια δραστηριότητα σχετική με τον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου. Το ζητούμενο είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του και η θέση του έχει άμεση σχέση με το είδος του τριγώνου.

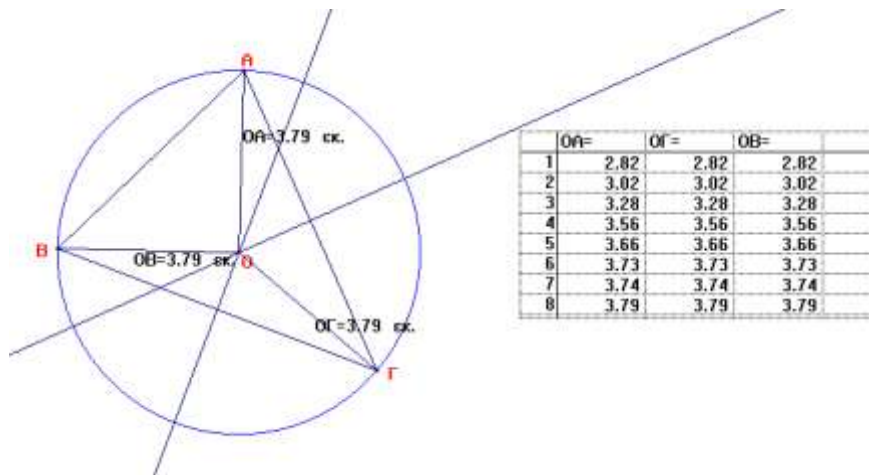
## **ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2 (1 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ)**

---

### ***ΤΙΤΛΟΣ : Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου***

#### ***A. Κατασκευή***

1. Κατασκευάστε ένα τρίγωνο και ονομάστε το ΑΒΓ
2. Κατασκευάστε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του ΒΓ και ΑΓ και ονομάστε το σημείο τομής τους Ο
3. Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΒ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ
4. Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές τους
5. Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου και πινακοποιήστε αυτόματα τις νέες τιμές των ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ



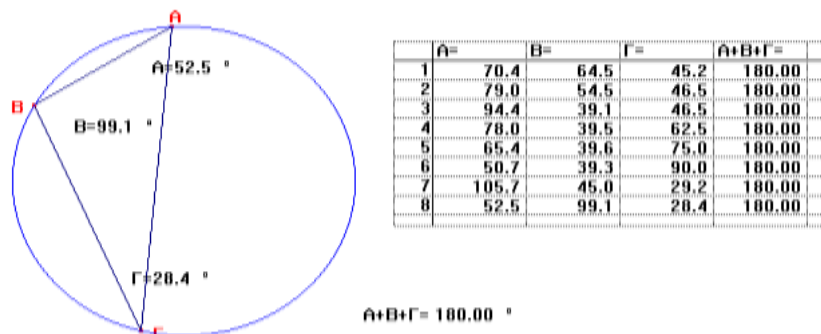
Σχήμα 2<sup>α</sup>. Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

### B. Ερωτήσεις

- Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ;
- Ο κύκλος περνάει και από τις τρεις κορυφές του τριγώνου;
- Το Ο ανήκει στην μεσοκάθετο του ΑΒ;
- Τι συμβαίνει με τις τρεις μεσοκαθέτους των πλευρών ενός τριγώνου;

### Γ. Κατασκευή

1. Κάντε απόκρυψη των μεσοκαθέτων, των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και των τιμών τους
2. Μετρήστε τις γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου, υπολογίστε το άθροισμα Α+Β+Γ και πινακοποιήστε τις τιμές τους
3. Μετακινήστε τα σημεία Α, Β, Γ σε διάφορες θέσεις ώστε το Ο να είναι μέσα, έξω ή πάνω στις πλευρές του τριγώνου και πινακοποιήστε αυτόματα τις νέες τιμές των παραπάνω γωνιών



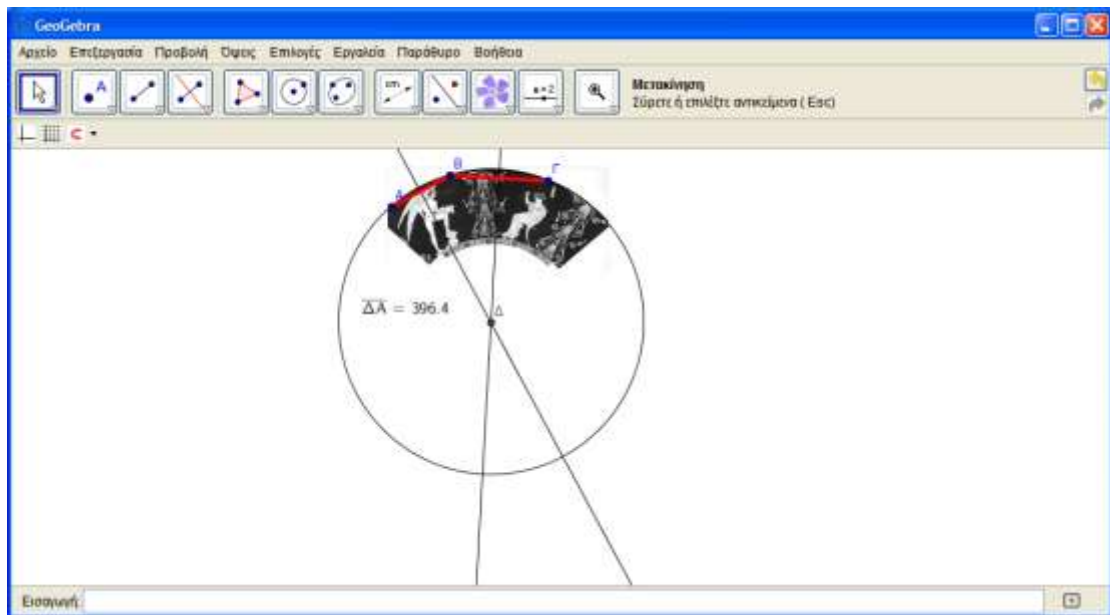
Σχήμα 2β. Άθροισμα γωνιών τριγώνου



#### Δ. Ερωτήσεις

- Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ αν το Ο είναι μέσα στο τρίγωνο;
- Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ αν το Ο είναι έξω από το τρίγωνο;
- Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ αν το Ο είναι πάνω στις πλευρές του;
- Διατυπώστε συγκεντρωτικά τα συμπεράσματά σας

Τελικά θα επεξεργαστούμε το αρχικό πρόβλημα για να βρούμε την ακτίνα του πιάτου. Ένα στιγμιότυπο για τον τρόπο λύσης φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Το μέγεθος της εικόνας του πιάτου μπορούμε να το μεταβάλλουμε ανάλογα αν θέλουμε να έχουμε ακτίνα πάνω από 28cm ή κάτω από αυτό το όριο.