

ΑΝΑΛΟΓΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Σενάριο με το λογισμικό THE GEOMETER'S SKETCHPAD
στα πλαίσια Εκπαίδευσης Επιμορφωτών

ΠΑΚΕ ΒΟΡΕΙΟΥ και ΝΟΤΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΗΣ

ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά

- 1) **Τι** καλούνται οι μαθητές να μάθουν και γιατί. Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορούν να συνδεθούν οι μεταβολές δυο ποσών. Θα αντιληφθούν τη συμμεταβολή αυτή μελετώντας διάφορα γεωμετρικά και αριθμητικά δεδομένα με τη βοήθεια του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας The Geometer's SketchPad. Συγκεκριμένα θα εξετάσουν τα ανάλογα ποσά και κατ' επέκταση την έννοια της γραμμικής συνάρτησης $\psi = \alpha\chi$, τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και κατ' επέκταση την έννοια της υπερβολής $\psi = \alpha/\chi$. Πιστεύω ότι πρέπει να μελετηθεί και η έννοια της σταθερής συνάρτησης $\psi = c$ που θεωρώ ότι είναι μια παραμελημένη έννοια στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Η κατανόηση της συμμεταβολής δυο ποσών είναι αυτή που θα οδηγήσει τους μαθητές να αντιληφθούν την έννοια της συνάρτησης. Αυτή λοιπόν η πολύ σημαντική έννοια πρέπει να προσεγγισθεί διεξοδικά και δημιουργικά από τους μαθητές για να αποκτήσουν τις σωστές βάσεις για τη συνέχεια της μαθητικής τους διαδρομής και της ενασχόλησης τους με τα Μαθηματικά.

ΕΜΠΛΕΚΟΜΕΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

α) Γραφική παράσταση β) περίμετρος γ) εμβαδόν δ) τετράγωνο ε) κύκλος στ) ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ζ) εμβαδόν τετραγώνου η) εμβαδόν κύκλου θ) εμβαδόν ορθογωνίου ι) ανάλογα ποσά κ) αντιστρόφως ανάλογα ποσά λ) περίμετρος μ) σύστημα συντεταγμένων

Ορισμοί εννοιών:

Η κατανόηση της έννοιας του **εμβαδού** αποτελεί μέρος της καθημερινής ζωής, της οικονομικής ζωής, όλων των επιστημών και των επιστημών του μηχανικού. Ομοίως η περίμετρος αποτελεί μέρος της καθημερινής ζωής και ο διαχωρισμός της έννοιας της **περιμέτρου** από την έννοια του εμβαδού είναι σημαντικός.

Το **τετράγωνο** είναι το ευκολότερο γραμμικό γεωμετρικό σχήμα και είναι το κυριότερο σχήμα που χρησιμοποιείται σε πλακοστρώσεις και γενικά σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Από την κανονικότητα της μορφής του είναι ιδανικό εργαλείο για τη μέτρηση επιφανειών. Η απλότητα του τύπου του **εμβαδού τετραγώνου** καθώς και η δυνατότητα απόλυτης κάλυψης ορθογωνίων επιφανειών το καθιστά την πλέον ιδανική μονάδα μέτρησης επιφανειών. Μαζί με το παράγωγο σχήμα του τον κύβο έχει εφαρμογές στη τέχνη και ιδίως τη ζωγραφική και στην αρχιτεκτονική.

Η έννοια του **ορθογωνίου** αλλά και ο **τύπος του εμβαδού του** είναι ένα από τα

ευκολότερα πράγματα που μπορούν να διαπραγματευτούν οι μαθητές μετά το τετράγωνο.

Ο **κύκλος** από τη μεριά του είναι το ευκολότερο καμπυλόγραμμο σχήμα. Η χρήση αυτού του σχήματος ιστορικά έχει προωθήσει την ανάπτυξη της ανθρωπότητας με την εφαρμογή του τροχού. Σε εύπλαστα υλικά αποτελεί το πρώτο σχήμα που κατασκευάζεται και μάλλον αυτός είναι ο λόγος που μεταμορφώνει τη ζύμη σε πατροπαράδοτα στρογγυλά Πασχαλινά κουλουράκια. Το **εμβαδόν του κύκλου** είναι από τους πρώτους τύπους που μαθαίνουν οι μαθητές στο δημοτικό. Για τους μαθητές ο τύπος αυτός καθώς και ο τύπος της **περιμέτρου του κύκλου** είναι οι μοναδικοί τύποι που μαθαίνουν από το δημοτικό και είναι συνδεδεμένοι με τον πρώτο άρρητο αριθμό που μαθαίνουν. Εξαιτίας αυτής της σύνδεσης, η αναφορά σε αυτούς τους τύπους την ώρα του μαθήματος, οδηγεί αρκετούς μαθητές να διατυπώσουν την ερώτηση κύριε αυτός με το π ;

Η **γραφική παράσταση** αποδίδει οπτικά μια συνάρτηση δίνοντας άμεσα τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε. Η γραφική παράσταση μπορεί να μας πληροφορήσει και για τη γενικότερη συμπεριφορά της συνάρτησης, ώστε να μπορούμε να την κατανοήσουμε και να προβλέψουμε τη συμπεριφορά της διαισθητικά. Αυτή η ικανότητα είναι εξαιρετικά χρήσιμη, ειδικά αν ο τύπος της συνάρτησης είναι πολύπλοκος ή χρειάζεται αρκετές πράξεις για υπολογισμό. Η γραφική παράσταση σε ποσά που συνδέονται γραμμικά, μας επιτρέπει άμεσα να αντιληφθούμε την συσχέτιση αυτών των ποσοτήτων.

Τα **ανάλογα ποσά** είναι μια έννοια που συχνά χρησιμοποιείται στην ζωή μας. Οι Μαθηματικές έννοιες εξελίχτηκαν και διαμορφώθηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Τα φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον 6^ο π. Χ. αιώνα. Ο Πυθαγόρας ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκαν με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Ταυτόχρονα με τα ανάλογα ποσά αναπτύχθηκε και οι μελέτη των **αντιστρόφως αναλόγων** ποσών. Μπορούμε να πούμε ότι οι δυο έννοιες, τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, είναι σχεδόν αντίστροφες αφού η μια προέρχεται από σταθερό γινόμενο και η άλλη από σταθερό πηλίκο.

Η **γραφική παράσταση** είναι μια τεχνική με την οποία απεικονίζουμε τη συμμεταβολή δυο ποσών. Είναι η καλύτερη απεικονιστική μέθοδος της συμμεταβολής δυο ποσών. Μπορεί να μας δώσει πάρα πολλές πληροφορίες και με τη βοήθεια των πληροφοριών

αυτών μπορούμε να ερμηνεύσουμε διάφορα φαινόμενα. Η τεχνική αυτή αναπτύχθηκε από τον Καρτέσιο όπως λέγεται αρχικά σαν παιχνίδι σε έναν αχυρώνα. Ζούσε εκεί σαν στρατιώτης μαζί με άλλους στρατιώτες και στοιχημάτιζαν ποια μύγα θα πετάξει πρώτη από την οροφή του αχυρώνα. Ο προσδιορισμός της θέσης της μύγας οδήγησε τον Καρτέσιο να φτιάξει ένα κάρναβο. Έτσι ο προσδιορισμός της μύγας έγινε ένα ζευγάρι αριθμών. Στην ουσία δηλαδή ο Καρτέσιος έφτιαξε ένα **σύστημα συντεταγμένων** για να επιτύχει να προσδιορίσει σημεία στο επίπεδο. Το σύστημα συντεταγμένων είναι η βάση για τις γραφικές παραστάσεις. Μια εξοικείωση μαζί του, καθώς και με την ορολογία που το συνοδεύει, είναι απαραίτητο να γίνει από τους μαθητές.

2) Ποιοι θα μάθουν

Σε ποιους μαθητές απευθύνεται η διδασκαλία: Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές Β΄ Γυμνασίου.

Ποιες οι προ-απαιτούμενες γνώσεις: Κύκλος, τετράγωνο, γωνία, τύποι εμβαδών βασικών σχημάτων, μέτρηση γωνιών, βασικές έννοιες στην απεικόνιση σημείων σε σύστημα συντεταγμένων, τύποι περιμέτρου βασικών σχημάτων. Βασικές λειτουργίες του λογισμικού.

Ποια τα προβλήματα των μαθητών με την προς μάθηση έννοια:

Με το **σύστημα συντεταγμένων** έχουν πρόβλημα κυρίως με την ορολογία. Δεν ξέρουν τις ονομασίες των αξόνων, δυσκολεύονται στο διατεταγμένο ζεύγος και πολύ συχνά διαβάζουν τις συντεταγμένες ενός σημείου ανάποδα.

Ξέρουν ότι μια **γωνία μετριέται** σε μοίρες. Δεν ξέρουν όλοι οι μαθητές τις υποδιαίρεσεις της μοίρας.

Εμβαδόν: Μπερδεύουν την έννοια της επιφάνειας με την έννοια της **περιμέτρου** και αντιστρόφως και χρησιμοποιούν αυτές τις δύο έννοιες εναλλακτικά. Χρησιμοποιούν τις μονάδες επιφάνειας και μήκους χωρίς διάκριση. Στους τύπους υπολογισμού δεν αναγνωρίζουν τα στοιχεία που υπεισέρχονται αλλά προσπαθούν να παραγάγουν αριθμητικά αποτελέσματα με οποιοδήποτε τρόπο. Δεν θυμούνται τους **τύπους των εμβαδών στα βασικά σχήματα**. Μόνο το τετράγωνο είναι εύκολο για τους περισσότερους μαθητές.

Γραφική παράσταση: Δεν κατανοούν εύκολα τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων χ και ψ . Για το **σύστημα συντεταγμένων** δεν γνωρίζουν την ορολογία με αποτέλεσμα να λένε ασαφή ή λανθασμένα πράγματα.

Ανάλογα ποσά: Για τους περισσότερους μαθητές όλα τα ποσά είναι ανάλογα. Έρευνες

έχουν δείξει ότι τα λάθη των μαθητών που γίνονται σε μικρές ηλικίες σε θέματα που αφορούν τα ανάλογα ποσά, ελάχιστα βελτιώνονται με τη πάροδο του χρόνου. Πολλές φορές οι έρευνες έδειξαν ότι με τη πάροδο του χρόνου υπάρχει επιδείνωση σε πολλά άτομα στην αναγνώριση των αναλόγων ποσών. Λίγοι είναι οι μαθητές που στη γραφική παράσταση αναλόγων ποσών αναγνωρίζουν τον συντελεστή αναλογίας σαν τη κλίση της ευθείας.

3) **Πως θα μάθουν οι μαθητές**

α) **ποια γνωσιοθεωρητική προσέγγιση χρησιμοποιείται:** σύγχρονες κοινωνικές και επικοινωνιακές προσεγγίσεις

β) **ποια μεθοδολογία διδασκαλίας:** η διερευνητική μέθοδος, ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και ο καθηγητής στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης

γ) **ποιες καινοτομίες εισάγονται, σύγκριση με μια παραδοσιακή διδασκαλία για την ίδια έννοια στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι:** Καινοτομία είναι η χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού The Geometer's SketchPad και μέσα από αυτό οι δυνατότητες 'άμεσης διαχείρισης' των γεωμετρικών αντικειμένων ώστε ο μαθητής να μπορεί να διατυπώσει/επαληθεύσει εικασίες στηριγμένες σε, θεωρητικά άπειρα, εμπειρικά δεδομένα. Καινοτομία είναι επίσης η ομαδοσυνεργατική δουλειά μεταξύ των μαθητών, για τη διαπραγμάτευση των απόψεων. Το φύλλο εργασίας. Οι προσεκτικά σχεδιασμένες ερωτήσεις. Ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και όχι του παθητικού δέκτη που συνήθως συμβαίνει στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Ο καθηγητής μπαίνει στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή, μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης και όχι στο ρόλο του πομπού που συνήθως συμβαίνει στο περιβάλλον μιας παραδοσιακής τάξης.

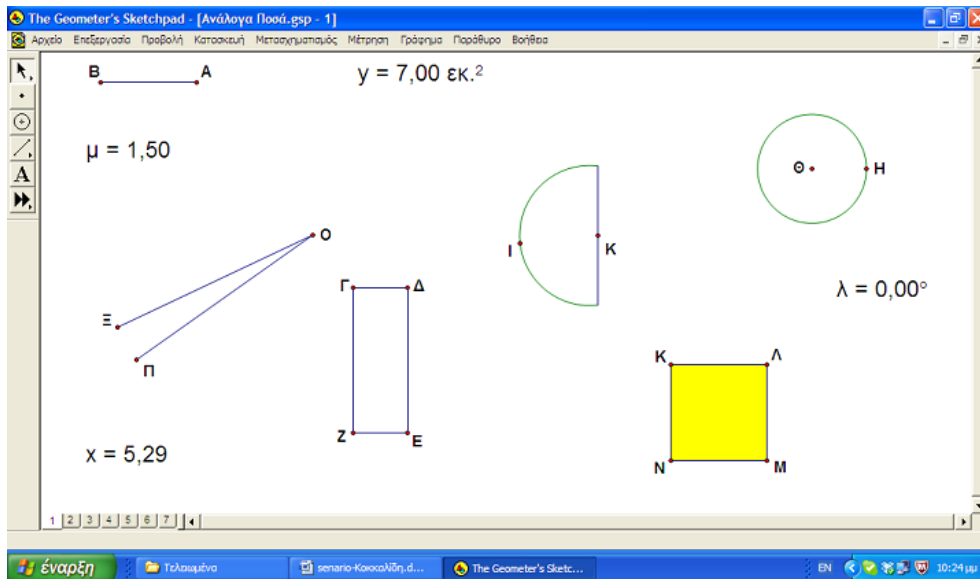
δ) **ποιος ο ρόλος των εργαλείων και των άλλων υλικών που χρησιμοποιούνται (το φύλλο εργασίας που θα δοθεί) :** Ο μαθητής θα χρησιμοποιήσει το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και θα μπει στη θέση του ερευνητή με στόχο να κατασκευάσει εικασίες, γενικεύσεις και συμπεράσματα. Το φύλλο εργασίας με τις κατάλληλες ερωτήσεις θα βοηθήσει το μαθητή να εστιάσει στα σημεία που δυσκολεύεται και να τα ξεπεράσει μέσω του πειραματισμού του στο λογισμικό. Το φύλλο εργασίας θα τον βοηθήσει επίσης να αποτυπώσει τη γνώση που κατασκεύασε. Το φύλλο εργασίας με τις κατάλληλες ερωτήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση της μάθησης του μαθητή.

ε) **ποιος ο χρόνος, ο χώρος και τα απαιτούμενα μέσα υλοποίησης, ποια θα είναι η οργάνωση της τάξης:** 5 - 6 περίπου διδακτικές ώρες στο εργαστήριο υπολογιστών. Οι μαθητές θα δουλεύουν σε ομάδες των 2-3 ατόμων (2-3 άτομα ανά υπολογιστή).

στ) ποιες δραστηριότητες θα τεθούν, ποιες ερωτήσεις θα χρησιμοποιηθούν, πως θα γίνει η αξιολόγηση της μάθησης: Παρατίθενται τα σχετικά φύλλα εργασίας.

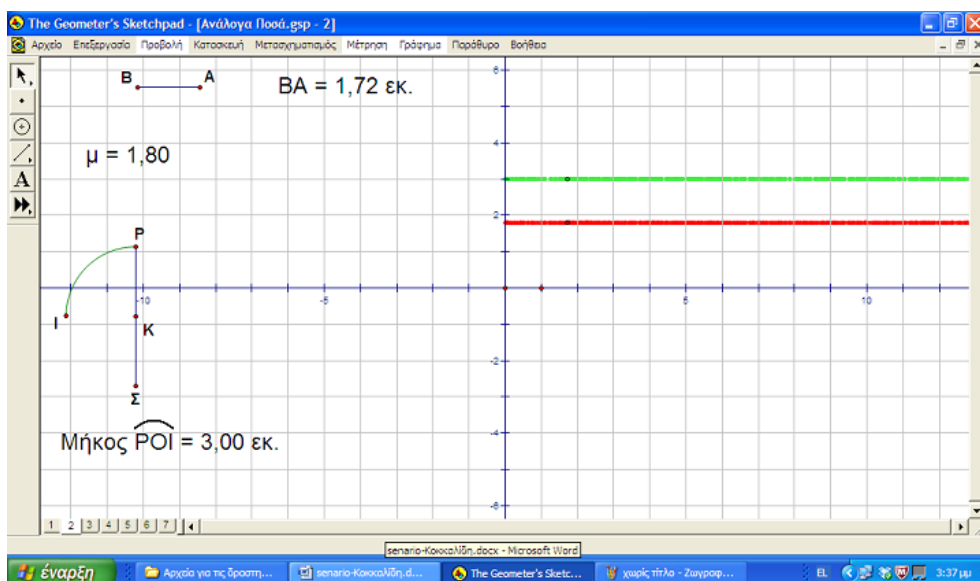
4) Ροή διδασκαλίας και επιλογή κατάλληλων εργαλείων: Οι μαθητές είναι Β΄ Γυμνασίου και δεν έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν πολλές τεχνικές που να εμπλέκουν Μαθηματικές έννοιες. Πρέπει λοιπόν να ασχοληθούν με παρατηρήσεις που θα τους επιτρέψουν να κάνουν εικασίες οι οποίες θα φανερώσουν τις συσχετίσεις που έχουν τα μεγέθη που μελετάνε. Από αυτές τις συσχετίσεις μπορούν να καταλήξουν σε συμπεράσματα και να απαντήσουν σε διάφορα ερωτήματα που θα τους τεθούν. Επειδή λοιπόν ο στόχος μου είναι οι μαθητές να δουλέψουν με ένα μεγάλο πεδίο δεδομένων και από τη παρατήρηση να οδηγηθούν σε εικασίες και συμπεράσματα, αποφάσισα η διδασκαλία να γίνει με το λογισμικό The Geometer's SketchPad έκδοση 4.07. Νομίζω ότι έτσι θα μπορέσουν σε λίγο χρονικό διάστημα να επεξεργαστούν μεγάλο όγκο στοιχείων. Η επιλογή του συγκεκριμένου λογισμικού έγινε γιατί είναι απλούστερο στη λειτουργία του σε σχέση με άλλα λογισμικά του ίδιου είδους. Η απλότητα αυτή παρουσιάζεται στην κατασκευή αλλά και στη χρήση των σχημάτων, των δεδομένων και των παραμέτρων που έφτιαξα και εμφανίζονται στην αρχική σελίδα του λογισμικού. Αυτά τα σχήματα αλλά και τις παραμέτρους που υπάρχουν στο αρχείο, καλούνται οι μαθητές να τα μεταβάλλουν δυναμικά, να τα τροποποιήσουν και να βρουν τις διάφορες συσχετίσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Οι μαθητές στην τάξη αυτή δεν έχουν ανεπτυγμένο το κατάλληλο λεξιλόγιο που είναι απαραίτητο για να περιγράψουν τέτοιου είδους συσχετίσεις, για αυτό πρέπει να είμαστε έτοιμοι να δώσουμε το απαραίτητο λεξιλόγιο και να τους καθοδηγήσουμε καθ' όλη τη διάρκεια των διδασκαλιών στη σωστή του χρήση. Το συγκεκριμένο λογισμικό έχει επίσης τη δυνατότητα να έχει πολλές σελίδες με εύκολη μετάβαση από τη μια στην άλλη. Αυτή η δυνατότητα θα είναι πολύ χρήσιμη σε κάθε φάση που οι μαθητές θα πρέπει να εστιάσουν τη προσοχή τους σε ένα συγκεκριμένο θέμα και να βγάλουν συμπεράσματα για τις ειδικές σχέσεις που συνδέουν συγκεκριμένα αντικείμενα. Με καθοδήγηση θα μπορούν να μεταβαίνουν στην κατάλληλη σελίδα και εκεί θα μπορούν να εστιάζουν τη μελέτη τους σε συγκεκριμένα θέματα. Το αρχείο SketchPad που θα δοθεί στους μαθητές θα έχει στην αρχική του σελίδα διάφορα γνωστά γεωμετρικά σχήματα, μετρήσεις και παραμέτρους. Αρκετά από αυτά τα αντικείμενα είναι χωρίς δυνατότητα επιλογής. Αυτό το αποφάσισα για να μην έχουν οι μαθητές πολλά αντικείμενα που πρέπει να επεξεργαστούν. Πιστεύω πως με αυτό τον τρόπο η όλη διαδικασία δεν θα είναι χρονοβόρα. Τα υπόλοιπα αντικείμενα που υπάρχουν θα μπορούν να επιλεγούν και να αλλάξουν δυναμικά. Η αλλαγή σε αυτά θα επιφέρει αλλαγή σε κάποια σχήματα ή μετρήσεις που υπάρχουν στη σελίδα.

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 1 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ



Οι μαθητές καλούνται να ονομάσουν ποιο αντικείμενο μεταβάλλει ποιο. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν εκφράσεις όπως « η μεταβολή του.. σχετίζεται με το ... », «το... εξαρτάται από το» , «το ... είναι συνάρτηση του» , «η μεταβολή του ... μεταβάλλει το» και άλλες τέτοιες εκφράσεις που φανερώνουν μια συναρτησιακή συσχέτιση μεταξύ των αντικειμένων. Στη παρούσα φάση πρέπει να δοθεί μεγάλη σημασία στο να καταλάβουν οι μαθητές ότι, αν ένα αντικείμενο μεταβάλλεται αυτό ή κάποια ιδιότητά του, τότε αυτή η μεταβολή συνδέεται με οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο ακόμα και αν αυτό παραμένει σταθερό. Αυτή είναι και η ουσία της σταθερής συνάρτησης. Δεν θα δώσουμε απλώς τον ορισμό της σταθερής συνάρτησης αλλά θα ωθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν τη συσχέτιση των δυο ποσών μέσα από τη γραφική τους παράσταση. Στη σελίδα 2 του αρχείου, υπάρχουν το ευθύγραμμο τμήμα AB και όλα τα αντικείμενα που δεν μεταβάλλονται όταν μετακινηθεί ή το A ή το B.

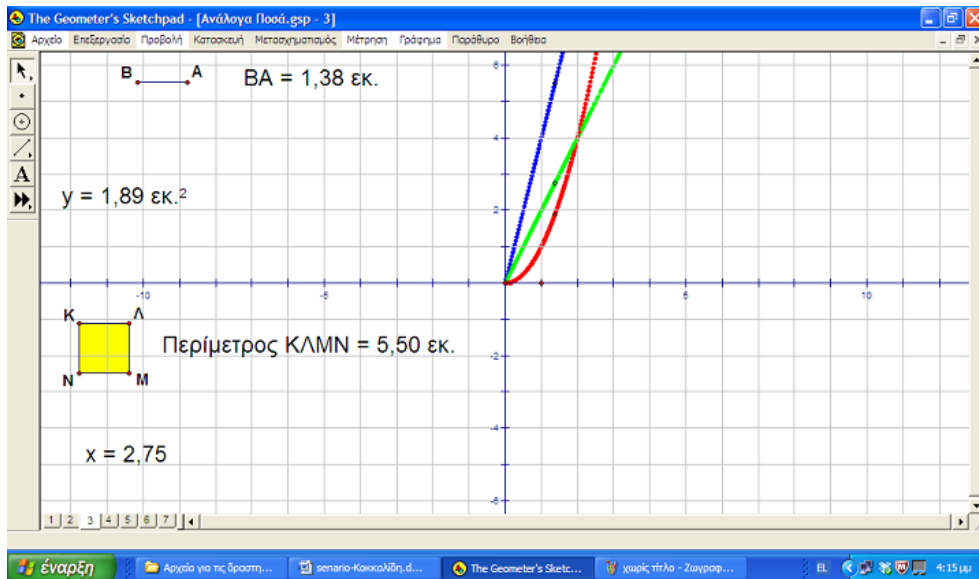
ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 2 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ



Αν επιλέξουμε να αποτυπώσουμε px το μήκος του AB με την τιμή του μ (κόκκινη γραμμή) οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι ενώ το μ παραμένει αμετάβλητο η συσχέτιση του με το AB δίνει

γραφική παράσταση. Τους παροτρύνουμε να διερευνήσουν, το γραφικό αποτέλεσμα που αποτυπώνεται από τη συμμεταβολή του μήκους του AB και του μήκους του τόξου IP (πράσινη γραμμή). Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, μπορούν να αντιληφθούν τη μορφή της γραφικής παράστασης σε δυο ποσά, που το ένα μεταβάλλεται, ενώ το άλλο παραμένει σταθερό. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές θα οικοδομήσουν με ασφάλεια την έννοια της σταθερής συνάρτησης και θα κατανοήσουν τη γραφική της παράσταση. Στην σελίδα 3 του αρχείου μπορούμε να επικεντρώσουμε τη μελέτη στα αντικείμενα που μεταβάλλονται από τη μεταβολή του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος AB.

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 3 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ



Στο παραπάνω στιγμιότυπο φαίνεται η γραφική αποτύπωση της συμμεταβολής του μήκους του AB με το y (κόκκινη γραμμή), η γραφική αποτύπωση της συμμεταβολής του μήκους του AB με την περίμετρο του KLMN (γαλανή γραμμή) και η γραφική αποτύπωση της συμμεταβολής του μήκους του AB με το x (πράσινη γραμμή). Σε άλλες σελίδες μπορούν οι μαθητές να δημιουργήσουν τις γραφικές συμμεταβολές και των άλλων στοιχείων που υπάρχουν στην αρχική σελίδα του αρχείου. Θα αποκτήσουν έτσι την αίσθηση ότι διαφορετική συσχέτιση μεταξύ των μεγεθών αποδίδει διαφορετική γραφική απεικόνιση. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσουν αφού οι οπτικές διαφοροποιήσεις των γραφικών παραστάσεων είναι εμφανείς. Οι γραφικές όμως απεικονίσεις των διαφόρων μεγεθών στο αρχείο, είναι προσεκτικά επιλεγμένες, ώστε να ομαδοποιούνται εύκολα σε κατηγορίες με κοινά χαρακτηριστικά. Αυτό μας επιτρέπει να συνεχίσουμε διερευνητικά για να ανακαλύψουμε το εξής: ένα συγκεκριμένο γραφικό αποτέλεσμα από ποια συναρτησιακή σχέση των μεγεθών προέρχεται;

Θα επιλέξουμε να μελετήσουμε την σχέση μεταξύ των μεγεθών που έχουν γραφική παράσταση ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Θα επικεντρώσουμε έτσι την έρευνα μας στο μήκος AB και στη μεταβλητή x . Στη σελίδα 4 του αρχείου, έχουμε μόνο το AB και τη μεταβλητή x . Επειδή στόχος μας είναι τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά θα αρχίσουμε να εμφανίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο των ποσών, για να προετοιμάζουμε με

αυτό τον τρόπο το έδαφος και για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Επειδή όμως θέλουμε οι μαθητές να διερευνήσουν και να συμπεράνουν, ώστε να οικοδομήσουν τη γνώση τους, μπορούμε να εμπλέξουμε και άλλες συσχετίσεις μεταξύ των ποσών όπως είναι το άθροισμα τους, η διαφορά τους κλπ. Η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η πινακοποίηση, για να μπορούν οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα της παρατήρησης και από αυτή να εξάγουν συμπεράσματα.

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 4 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ

BA = 1,83 εκ. x = 3,65 x+BA = 5,48 $\frac{x}{BA} = 2,00 \text{ εκ.}^{-1}$ x-BA = 6,67 εκ.

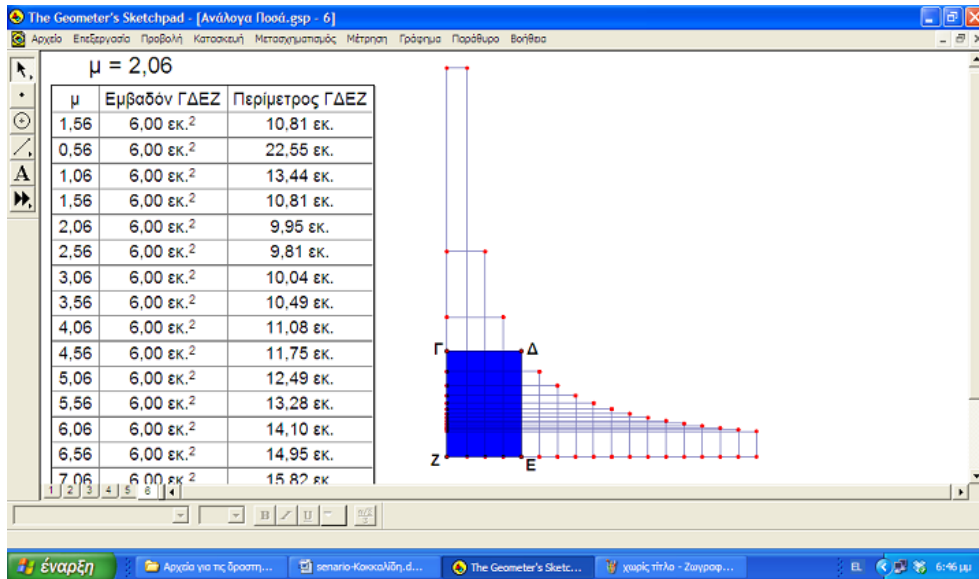
BA	x	x+BA	$\frac{x}{BA}$	x-BA
2,67 εκ.	5,34	8,02	2,00 εκ.⁻¹	14,28 εκ.
1,59 εκ.	3,18	4,76	2,00 εκ.⁻¹	5,04 εκ.
2,09 εκ.	4,18	6,27	2,00 εκ.⁻¹	8,74 εκ.
3,10 εκ.	6,19	9,29	2,00 εκ.⁻¹	19,17 εκ.
4,02 εκ.	8,04	12,07	2,00 εκ.⁻¹	32,35 εκ.
4,92 εκ.	9,84	14,76	2,00 εκ.⁻¹	48,44 εκ.
5,87 εκ.	11,75	17,62	2,00 εκ.⁻¹	69,00 εκ.
6,80 εκ.	13,60	20,40	2,00 εκ.⁻¹	92,47 εκ.
7,86 εκ.	15,72	23,57	2,00 εκ.⁻¹	123,50 εκ.
9,02 εκ.	18,04	27,07	2,00 εκ.⁻¹	162,80 εκ.
1,83 εκ.	3,65	5,48	2,00 εκ.⁻¹	6,67 εκ.

Εύκολα γίνεται φανερό από το παραπάνω στιγμιότυπο ότι το πηλίκο των δύο ποσών είναι η αναλλοίωτη ιδιότητα που έχουν. Αυτή την αναλλοίωτη ιδιότητα μπορούν εύκολα οι μαθητές να την διαπιστώσουν σαν άσκηση και σε άλλα ποσά που υπάρχουν στο αρχείο και η γραφική τους παράσταση παρουσιάζει την ίδια γραφική απεικόνιση.

Για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά η διαδικασία προσέγγισης θα είναι παρόμοια με την προσέγγιση που έγινε στα ανάλογα ποσά. Θα διαπιστώσουν οι μαθητές ότι υπάρχει ένα φυσικό μέγεθος, εδώ είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, που η συμμεταβολή του με μια μεταβλητή απεικονίζεται και δημιουργεί μια γραμμή χαρακτηριστικής μορφής.

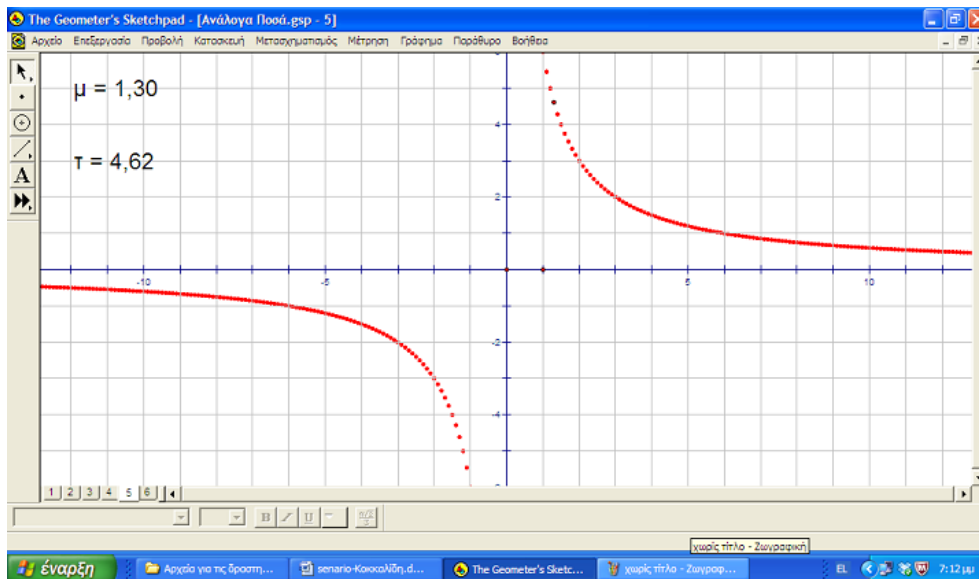
Ήδη από τα προηγούμενα, κυρίως από τις συσχετίσεις που έχουν βρει οι μαθητές κατά τη ενασχόληση τους με τα αντικείμενα στη σελίδα 1 του αρχείου, θα έχουν ανακαλύψει ότι η μεταβλητή μ μεταβάλλει το ορθογώνιο ΓΔΕΖ, τον κύκλο κέντρου Θ και την παράμετρο τ . Με κατάλληλες ερωτήσεις οι μαθητές θα οδηγηθούν να ελέγξουν αν το ορθογώνιο έχει κάποια αναλλοίωτη ιδιότητα. Κυρίως θα παροτρυνθούν να ελέγξουν το εμβαδόν και την περίμετρο των διαφόρων ορθογωνίων χρησιμοποιώντας τη πινακοποίηση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη δυνατότητα της σχεδίασης ίχνους που διαθέτει το λογισμικό και η χαρακτηριστική γραμμή θα προκύψει σαν αποτέλεσμα της μεταβολής της κορυφής Δ του ορθογωνίου.

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 5 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ



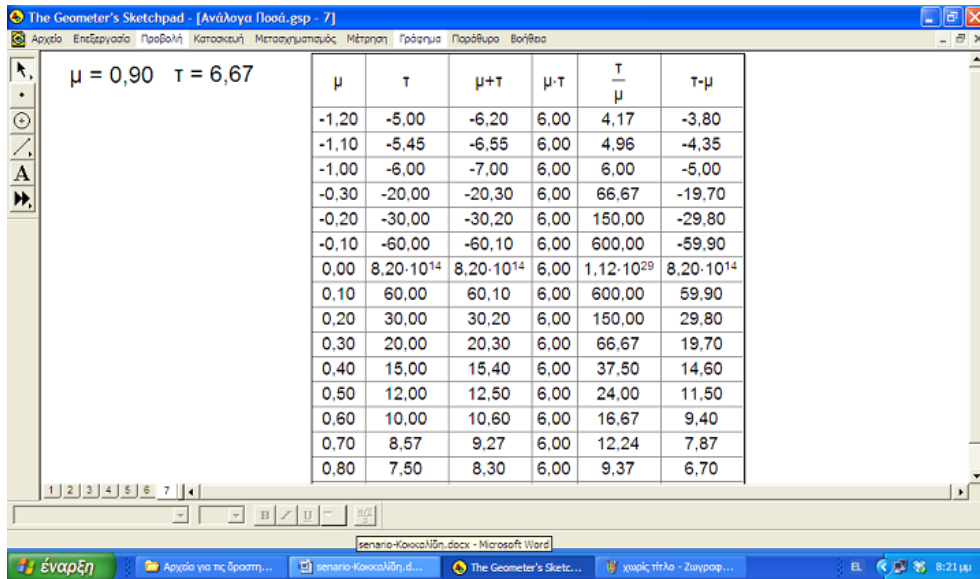
Από το παραπάνω στιγμιότυπο φαίνεται ότι η αναλλοίωτη ιδιότητα αυτών των ορθογώνιων είναι το εμβαδόν και είναι φανερή η χαρακτηριστική καμπύλη που διαγράφει η κορυφή Δ. Στη σελίδα 5 του αρχείου υπάρχει μόνο η μεταβλητή μ και η παράμετρος τ . Οι μαθητές καλούνται να αποτυπώσουν το σημείο (μ, τ) και με τη σχεδίαση του ίχνους του να απεικονίσουν τη γραμμή που δείχνει οπτικά τη συμμεταβολή των ποσών μ και τ .

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 6 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ



Η γραφική παράσταση μας δείχνει ότι η γραμμή αυτή είναι ίδιας μορφής με τη γραμμή που δημιούργησε η κορυφή Δ. Άρα η συναρτησιακή συσχέτιση μεταξύ των μ και τ θα εφαρμόζεται και στο ορθογώνιο ΓΔΕΖ. Με τη βοήθεια της πινακοποίησης ελέγχουμε τα μ και τ με το άθροισμα τη διαφορά το πηλίκο και το γινόμενο τους για να βρούμε την αναλλοίωτη σχέση που υπάρχει μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω στιγμιότυπο και εύκολα οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι αναλλοίωτο είναι το γινόμενο των δυο ποσών που έχουν αυτή τη γραφική παράσταση.

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 7 ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ



Την αναλλοίωτη σχέση του γινομένου οι μαθητές θα κληθούν να την επαληθεύσουν στο ορθογώνιο της σελίδας 5, αφού προηγουμένως μετρήσουν τις πλευρές του. Θα διαπιστώσουν επίσης ότι το μ είναι ίσο με το μήκος της μιας πλευράς του ορθογώνιου.

Παρακάτω παραθέτω ένα ενδεικτικό φύλλο εργασίας για να φανεί ο τρόπος διδασκαλίας σε μια διδακτική ώρα.

Φύλλο εργασίας 1

ΟΝΟΜΑ:

ΕΠΙΘΕΤΟ:

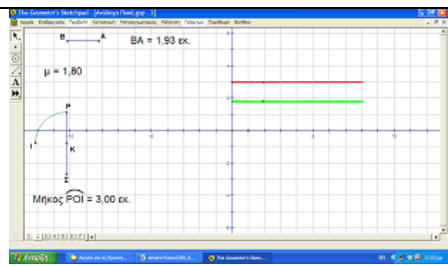
ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Στην επιφάνεια εργασίας θα βρεις το αρχείο του SketchPAD με την ονομασία **Ανάλογα Ποσά**, το οποίο πρέπει να ανοίξετε.

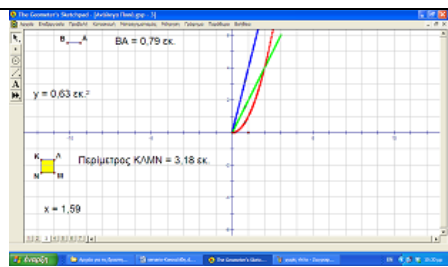
Ένδειξη Λογισμικού	Οδηγίες για την κατασκευή του ερωτήματος που θα διερευνήσουμε
	<p>Γράψε τα αντικείμενα που μπορείς να επιλέξεις και να μεταβάλλεις δυναμικά.</p>
<p>Αφού επιλέξεις ένα αντικείμενο που έχει δυνατότητα επιλογής άλλαξε το. Παρατήρησε τα υπόλοιπα αντικείμενα που υπάρχουν στην οθόνη. Το ερώτημα είναι το εξής: «Η μεταβολή του αντικειμένου που αλλάζεις μπορεί να εμφανιστεί σαν συμμεταβολή με καθένα από τα υπόλοιπα αντικείμενα ή με μερικά από αυτά;» Μετά τις παρατηρήσεις σου γράψε ποια αντικείμενα πιστεύεις ότι επηρεάζονται από το αντικείμενο που μεταβάλλεις.</p>	
<p>Επανάλαβε την παραπάνω διαδικασία για κάθε ένα αντικείμενο που μπορείς να επιλέξεις και κατέγραψε τις</p>	

παρατηρήσεις σου για τα υπόλοιπα αντικείμενα, απαντώντας στο παραπάνω ερώτημα.



Στη σελίδα 2 μέτρησε το ευθύγραμμο τμήμα AB και το τόξο ΠΙ. Αποτύπωσε το σημείο (BA , μ) και ενεργοποίησε το ίχνος του. Μετακίνησε το Α ή το Β. Τι παρατηρείς για το ίχνος του σημείου (BA , μ); Πιστεύεις ότι η συμμεταβολή του AB με το ΠΙ μπορεί να αποτυπωθεί; Από ποιο σημείο του άξονα ψ ' ψ περνάνε αυτές οι συμμεταβολές; Μπορείς να το επαληθεύσεις αυτό;

Μπορείς να βρεις στη σελίδα 1 άλλες σταθερές συμμεταβολές; Μπορείς να προβλέψεις τη γραφική απεικόνιση τους και να την επαληθεύσεις;



Στη σελίδα 3 μέτρησε το μήκος AB και την περίμετρο Π του τετραγώνου. Αποτύπωσε τα σημεία (AB, γ), (AB, χ), (AB, Π) και ενεργοποίησε τη σχεδίαση ίχνους. Μετακίνησε το σημείο Α ή το σημείο Β και παρατήρησε τις γραμμές που διαγράφουν. Εδώ έχουμε καταγράψει τρεις συμμεταβολές. Το ερώτημα είναι αν είναι όλες διαφορετικές ή κάποιες από αυτές έχουν κάποια ομοιότητα. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

Μπορείς να βρεις στη σελίδα 1 άλλες παρόμοιες συμμεταβολές;

Αν νομίζεις ότι κάτι δεν λειτουργεί καλά φώναξέ με.