Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Σενάριο με το λογισμικό Cabri Geometry II
στα πλαίσια Εκπαίδευσης Επιμορφωτών

ΠΑΚΕ ΒΟΡΕΙΟΥ και ΝΟΤΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΗΣ

ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ: ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

1) Τι καλούνται οι μαθητές να μάθουν και γιατί

Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν ή να επεξεργαστούν ισότητες και σχέσεις που ικανοποιούν τα εμβαδά κανονικών πολυγώνων. Συγκεκριμένα να συγκρίνουν το εμβαδόν των κανονικών πενταγώνων και των κανονικών εξαγώνων με το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με αυτή του κανονικού πολυγώνου. Μετά να δουν πώς αυτή η σύγκριση μπορεί να μας δώσει κάποια σημαντικά συμπεράσματα που μπορούν να συσχετίσουν τα εμβαδά αυτών των κανονικών πολυγώνων. Αυτά τα συμπεράσματα τελικά θα δούνε ότι μπορούν να τα εφαρμόσουν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Για να το κατορθώσουν αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουν πολλές άλλες έννοιες των Μαθηματικών όπως είναι το εμβαδόν, το τετράγωνο, η ομοιότητα, τα κανονικά πολύγωνα, ο κύκλος και η γραφική παράσταση συνάρτησης. Αρκετές από αυτές τις έννοιες που θα εμπλακούν θα τους βοηθήσουν να δουν και να κατανοήσουν σε βάθος την αξία του Πυθαγορείου θεωρήματος. Θα δουν δηλαδή ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα έχει εφαρμογή γενικά σε όμοια σχήματα που κατασκευάζονται με τη χρήση των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου.

ΕΜΠΛΕΚΟΜΕΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- **Ορθή γωνία**
- **Ορθογώνιο τρίγωνο**
- **Τετράγωνο**
- **Εμβαδόν τετραγώνου**
- **Κύκλος**
- **Ομοιότητα**
- **Κανονικά πολύγωνα**
- **Γραφική παράσταση**
- **Ανάλογα ποσά**

Οι έννοιες του **ορθογωνίου τριγώνου** και της **ορθής γωνίας** είναι από τις πλέον εφαρμόσιμες έννοιες των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Είναι χρήσιμη στους αρχιτέκτονες, τους σχεδιαστές, στους μηχανικούς, τους μαραγκούς, στους χτίστες και γενικά σε όλους όσους ασχολούνται με κατασκευές.

Το **τετράγωνο** είναι το ευκολότερο γραμμικό γεωμετρικό σχήμα και είναι το κυριότερο σχήμα που χρησιμοποιείται σε πλακοστρώσεις και γενικά σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Από την κανονικότητα της μορφής του είναι ιδανικό εργαλείο για τη μέτρηση επιφανειών. Η απλότητα του τύπου του **εμβαδού τετραγώνου** καθώς και η δυνατότητα απόλυτης κάλυψης ορθογωνίων επιφανειών το καθιστά την πλέον ιδανική μονάδα μέτρησης επιφανειών. Μαζί με το παράγωγο σχήμα του τον κύβο έχει εφαρμογές στη τέχνη και ιδίως τη ζωγραφική και στην αρχιτεκτονική.

Ο **κύκλος** από τη μεριά του είναι το ευκολότερο καμπυλόγραμμο σχήμα. Η χρήση αυτού του σχήματος ιστορικά έχει προωθήσει την ανάπτυξη της ανθρωπότητας με την εφαρμογή του τροχού. Σε εύπλαστα υλικά αποτελεί το πρώτο σχήμα που κατασκευάζεται και μάλλον αυτός είναι ο λόγος που μεταμορφώνει τη ζύμη σε πατροπαράδοτα στρογγυλά Πασχαλινά κουλουράκια.

Η **ομοιότητα** αποτελεί μέρος της καθημερινής ζωής, είναι χρήσιμη για τους σχεδιαστές, τους αρχιτέκτονες, στις μετρήσεις αντικειμένων που είναι δυνατόν να μετρηθούν, στο να μπορούμε να κατανοήσουμε κλίμακες π. χ. στους χάρτες. Η ομοιότητα ήταν η βασική έννοια που μας επέτρεψε να μετρήσουμε μη προσβάσιμα αντικείμενα όπως είναι οι αποστάσεις και οι διαστάσεις των άστρων.

Τα **κανονικά πολύγωνα** είναι τα σχήματα που κατά τεκμήριο χρησιμοποιούνται σε καλλιτεχνικά θέματα. Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα. Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο "συμμετρικός" τρόπος χρωματισμού. Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία.

Η **γραφική παράσταση** αποδίδει οπτικά μια συνάρτηση δίνοντας άμεσα τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε. Με περισσότερη εξοικείωση η γραφική παράσταση μπορεί να μας πληροφορήσει και για τη γενικότερη συμπεριφορά της συνάρτησης, ώστε να μπορούμε να την κατανοήσουμε και να προβλέψουμε τη συμπεριφορά της διαισθητικά. Αυτή η ικανότητα είναι εξαιρετικά χρήσιμη, ειδικά αν ο τύπος της συνάρτησης είναι πολύπλοκος ή χρειάζεται αρκετές πράξεις για υπολογισμό. Η γραφική παράσταση σε ποσά που συνδέονται γραμμικά, μας επιτρέπει άμεσα να αντιληφθούμε την συσχέτιση αυτών των ποσοτήτων.

Τα **ανάλογα ποσά** είναι μια έννοια που συχνά χρησιμοποιείται στην ζωή μας. Οι Μαθηματικές έννοιες εξελίχτηκαν και διαμορφώθηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Τα φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον $6^{ο}$ π. Χ. αιώνα. Ο Πυθαγόρας ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκαν με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Ταυτόχρονα με τα ανάλογα ποσά αναπτύχθηκε και οι μελέτη των **αντιστρόφως αναλόγων** ποσών. Μπορούμε να πούμε ότι οι δυο έννοιες, τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, είναι σχεδόν αντίστροφες αφού η μια προέρχεται από σταθερό γινόμενο και η άλλη από σταθερό πηλίκο.

2) **Ποιοι θα μάθουν:** Η διδασκαλία απευθύνεται σε μαθητές Β΄ Λυκείου

Ποιες οι προ-απαιτούμενες γνώσεις: Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για αυτή την εργασία είναι η έννοια του τριγώνου και ειδικότερα το ορθογώνιο τρίγωνο, η έννοια του εμβαδού και οι τύποι εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων, η έννοια του κύκλου και όλες τις έννοιες που έχουν σχέση με αυτόν όπως είναι η μέτρηση γωνιών, εγγεγραμμένες και επίκεντρες γωνίες και τα κανονικά πολύγωνα. Επίσης για τις προχωρημένες τεχνικές που προβλέπονται στο σενάριο απαραίτητες είναι οι γνώσεις των μαθητών στις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και ιδιαίτερα της γραμμικής συνάρτησης και των αναλόγων ποσών.

Ποια τα προβλήματα των μαθητών με την προς μάθηση έννοια:

Ομοιότητα: ταυτίζουν την ομοιότητα με την ισότητα και έτσι αναφέρουν τα όμοια σαν ίσα. Πολλές φορές στις αιτιολογήσεις τους για τα όμοια τρίγωνα προσπαθούν να βρουν ισότητα πλευρών.

Αναγνωρίζουν την ομοιότητα των τριγώνων κυρίως όταν αυτά έχουν παράλληλες πλευρές. Δεν ξέρουν να αναγνωρίζουν την ομοιότητα σε πιο σύνθετα σχήματα και δυσκολεύονται να προσδιορίσουν το λόγο ομοιότητας σαν κλάσμα των ομόλογων πλευρών.

Εμβαδόν: Μπερδεύουν την έννοια της επιφάνειας με την έννοια της περιμέτρου και αντιστρόφως και χρησιμοποιούν αυτές τις δύο έννοιες εναλλακτικά. Χρησιμοποιούν τις μονάδες επιφάνειας και μήκους χωρίς διάκριση. Στους τύπους υπολογισμού δεν αναγνωρίζουν τα στοιχεία που υπεισέρχονται αλλά προσπαθούν να παραγάγουν αριθμητικά αποτελέσματα με οποιοδήποτε τρόπο.

Κανονικά πολύγωνα: Δεν ξέρουν ποια είναι κατασκευάσιμα και δεν θυμούνται τους τύπους που συνδέουν τα δομικά στοιχεία των κανονικών πολυγώνων όπως παραδείγματος χάρη είναι η σχέση κεντρικής γωνίας και γωνίας του πολυγώνου, οι σχέσεις πλευράς και αποστήματος με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Γραφική παράσταση: Δεν κατανοούν εύκολα τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων χ και ψ. Δεν ξέρουν ότι κάθε μορφή αντιστοιχεί σε μια δύναμη του χ

Ανάλογα ποσά: Για τους περισσότερους μαθητές όλα τα ποσά είναι ανάλογα. Έρευνες έχουν δείξει ότι τα λάθη των μαθητών που γίνονται σε μικρές ηλικίες σε θέματα που αφορούν τα ανάλογα ποσά, ελάχιστα βελτιώνονται με τη πάροδο του χρόνου. Πολλές φορές οι έρευνες έδειξαν ότι με τη πάροδο του χρόνου υπάρχει επιδείνωση σε πολλά άτομα στην αναγνώριση των αναλόγων ποσών. Λίγοι είναι οι μαθητές που στη γραφική παράσταση αναλόγων ποσών αναγνωρίζουν τον συντελεστή αναλογίας σαν τη κλίση της ευθείας.

3) **Πως θα μάθουν οι μαθητές** (δημιουργία του μοντέλου μάθησης):

α) **ποια γνωσιοθεωρητική προσέγγιση χρησιμοποιείται**: σύγχρονες κοινωνικές και εποικοδομιστικές προσεγγίσεις

β) **ποια μεθοδολογία διδασκαλίας**: η διερευνητική μέθοδος, ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και ο καθηγητής στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης

γ) **ποιες καινοτομίες εισάγονται, σύγκριση με μια παραδοσιακή διδασκαλία για την ίδια έννοια στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι**: Το εκπαιδευτικό λογισμικό και μέσα από αυτό οι δυνατότητες ‘άμεσης διαχείρισης’ των γεωμετρικών αντικειμένων, ώστε ο μαθητής να μπορεί να διατυπώσει/επαληθεύσει εικασίες στηριγμένες, σε θεωρητικά, άπειρα εμπειρικά δεδομένα. Η ομαδοσυνεργατική δουλειά για τη διαπραγμάτευση των απόψεων. Το φύλλο εργασίας. Οι προσεκτικά σχεδιασμένες ερωτήσεις. Ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και όχι του παθητικού δέκτη που συνήθως συμβαίνει στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Ο καθηγητής μπαίνει στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης και όχι στο ρόλο του πομπού που συνήθως συμβαίνει στο περιβάλλον μιας παραδοσιακής τάξης.

δ) **ποιος ο ρόλος των εργαλείων και των άλλων υλικών που χρησιμοποιούνται (το φύλλο εργασίας που θα δοθεί)** : Ο μαθητής θα χρησιμοποιήσει το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και θα μπει στη θέση του ερευνητή με στόχο να κατασκευάσει εικασίες, γενικεύσεις και συμπεράσματα. Το φύλλο εργασίας με τις κατάλληλες ερωτήσεις θα βοηθήσει το μαθητή να εστιάσει στα σημεία που δυσκολεύεται και να τα ξεπεράσει μέσω του πειραματισμού του στο λογισμικό και επίσης θα τον βοηθήσει να αποτυπώσει τη γνώση που κατασκεύασε. Το φύλλο εργασίας με τις κατάλληλες ερωτήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση της μάθησης του μαθητή.

ε) **ποιος ο χρόνος, ο χώρος και τα απαιτούμενα μέσα υλοποίησης. Ποια θα είναι η οργάνωση της τάξης**: 4 περίπου διδακτικές ώρες στο εργαστήριο υπολογιστών. Οι μαθητές θα δουλεύουν σε ομάδες των 2-3 ατόμων (2-3 άτομα ανά υπολογιστή). στ) **ποιες δραστηριότητες θα τεθούν, ποιες ερωτήσεις θα χρησιμοποιηθούν, πως θα γίνει η αξιολόγηση της μάθησης**: Παρατίθενται τα σχετικά φύλλα εργασίας.

Σχέση με τη καθημερινή ζωή: Από τα αρχαιότατα χρόνια το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησίμευε για τον υπολογισμό του ύψους που φτάνουν οι σκάλες. Επίσης ήταν άμεσα συνδεδεμένο με την τέχνη του χτισίματος. Σήμερα χρησιμοποιείται με έξυπνο τρόπο για την μαζική μεταφορά οχημάτων. Τα οχήματα τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου. Αποτέλεσμα αυτού είναι σε μικρό οριζόντιο μήκος να τοποθετούμε αντικείμενα μεγάλου μήκους. Εικόνες όπως αυτές που υπάρχουν παρακάτω με παρακίνησαν να φτιάξω αυτή τη διδασκαλία.



Αυτές ή παρόμοιες εικόνες θα κληθούν να βρουν οι μαθητές στο διαδύκτιο μετά το τέλος των διδασκαλιών.

4) Ροή διδασκαλίας και επιλογή κατάλληλων εργαλείων: Επειδή οι μαθητές είναι Β΄ Λυκείου, έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν διάφορες τεχνικές που εμπλέκουν πολλές έννοιες των Μαθηματικών. Με αυτές τις τεχνικές μπορούν να βγάλουν συμπεράσματα τα οποία φανερώνουν τις συσχετίσεις που έχουν τα μεγέθη που μελετάνε. Από αυτές τις συσχετίσεις μπορούν να καταλήξουν σε συμπεράσματα που θα τους οδηγήσουν στην επίλυση των διαφόρων προβλημάτων που θα τους τεθούν. Επειδή λοιπόν ο στόχος μου είναι οι μαθητές να δουλέψουν με ένα μεγάλο πεδίο δεδομένων και από τη παρατήρηση να οδηγηθούν σε εικασίες και συμπεράσματα, αποφάσισα η διδασκαλία να γίνει με το λογισμικό Cabri Geometry II έκδοση 1.4.3 MS Windows, για να μπορέσουν σε λίγο χρονικό διάστημα να επεξεργαστούν μεγάλο όγκο στοιχείων. Η επιλογή του συγκεκριμένου λογισμικού έγινε γιατί είναι απλούστερο στη λειτουργία του σε σχέση με τα άλλα λογισμικά του ίδιου είδους. Η απλότητα αυτή παρουσιάζεται στην κατασκευή αλλά και στη χρήση των μακροεντολών (των εργαλείων) που έφτιαξα, για να μπορέσουν οι μαθητές να επεξεργαστούν γρήγορα τα ερωτήματα που τους έθεσα και να εξάγουν συμπεράσματα. Το συγκεκριμένο λογισμικό έχει επίσης τη δυνατότητα να εμφανίζει αναλυτικές οδηγίες όταν ενεργοποιήσεις τη βοήθεια. Αυτές οι οδηγίες θα είναι χρήσιμες όταν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν τις μακροεντολές που κατασκεύασα. Τα εργαλεία αυτά οι μαθητές της Β΄ Λυκείου έχουν τις γνώσεις να τα κατασκευάσουν μόνοι τους. Η διαδικασία όμως αυτή είναι χρονοβόρα και κρίνω ότι θα αποπροσανατολίσει τους μαθητές από τους στόχους που έχω βάλει.

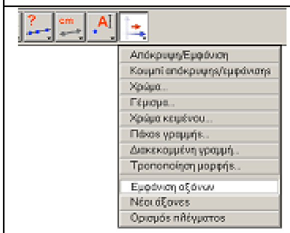
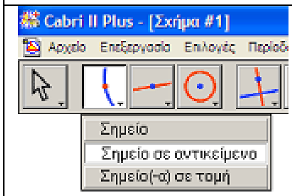
1η διδασκαλία: Στόχος αυτής της διδασκαλίας είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές **τη σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου και στο εμβαδόν ενός τετραγώνου με ίση πλευρά.** Αυτό θα χρησιμοποιηθεί αργότερα όταν θα δούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα με μια πιο γενική ματιά και όχι μόνο σαν ισότητα εμβαδών τετραγώνων. Τη συσχέτιση αυτή θα την ανακαλύψουν οι μαθητές χρησιμοποιώντας τα ανάλογα ποσά. Το αρχικό πρόβλημα που θα τους δοθεί είναι η σχέση που συνδέει τη συμμεταβολή των εμβαδών ενός κανονικού πενταγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου. Τα δυο αυτά κανονικά πολύγωνα δεν είναι όμοια, οπότε και οι καλοί μαθητές θα προβληματισθούν και έτσι πιστεύω ότι το ερώτημα δεν θα είναι βαρετό γιατί δεν είναι άμεσα προβλέψιμο. Στους μαθητές στην αρχή θα διατυπωθεί το πρόβλημα, χωρίς να τους δοθεί το φύλλο εργασίας. Θα ακολουθήσει συζήτηση στην τάξη για να αποφασισθεί η καλύτερη μονάδα μέτρησης. Θα προσπαθήσω να κατευθύνω τη συζήτηση τους στο τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με την πλευρά των κανονικών πολυγώνων. Επιθυμώ η σύγκριση να γίνει με τη βοήθεια του τετραγώνου γιατί όπως προανέφερα έχω στόχο το Πυθαγόρειο θεώρημα. Όταν η συζήτηση καρποφορήσει θα τους δοθούν τα φύλλα εργασίας. Επειδή τα ποσά που θα επεξεργαστούν είναι ανάλογα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να τα απεικονίσουν εύκολα σε περιοχή του 0. Για το λόγο αυτόν επέλεξα οι κορυφές των κανονικών πολυγώνων να είναι πάνω σε ευθεία ώστε οι μετακινήσεις τους να είναι ευκολότερες και να επιτυγχάνεται ευκολότερα ο μηδενισμός της πλευράς τους.

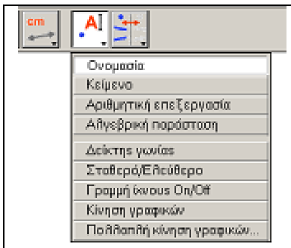
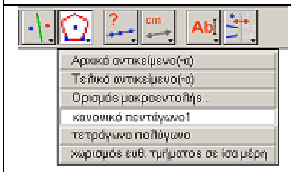
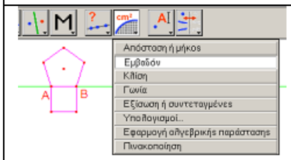
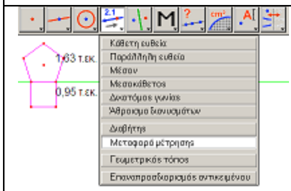
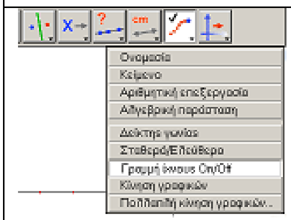
Φύλλο εργασίας 1

Το πρόβλημα

«Θέλω να εξετάσω αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του εμβαδού ενός κανονικού πενταγώνου και του εμβαδού ενός κανονικού εξαγώνου, με δεδομένο ότι τα δυο αυτά πολύγωνα έχουν πλευρά ίδιου μήκους. Γενικά να ελέγξω πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν αυτών των δυο πολυγώνων αν μεταβληθεί η πλευρά τους και να εξετάσω αν μπορώ να βρω ένα κοινό μέτρο μέτρησης.»

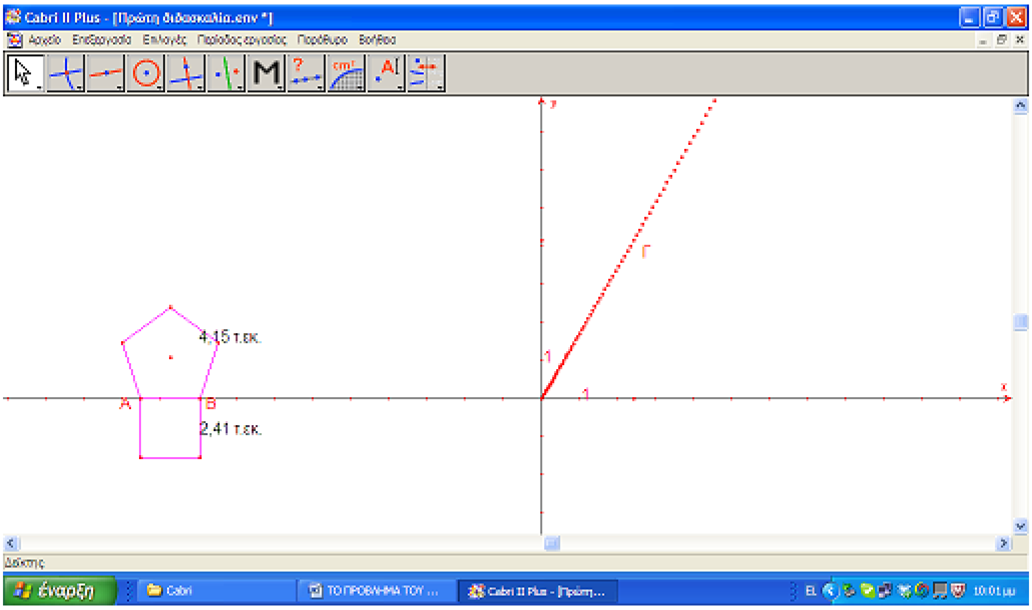
Στο φάκελο C:\Documents and Settings\Τα έγγραφά μου\ΑΡΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ θα βρείτε το αρχείο του Cabri με την ονομασία **Πρώτη Διδασκαλία.env** το οποίο πρέπει να ανοίξετε.

<table>
<tr><th>Ένδειξη Λογισμικού</th><th>Οδηγίες για την κατασκευή του ερωτήματος που θα διερευνήσουμε</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Επέλεξε το εργαλείο «Εμφάνιση αξόνων» και κάνε κλικ κάπου στην οθόνη (Το σύστημα συντεταγμένων μπορείς να το σύρεις κάνοντας κλικ στην αρχή των αξόνων).</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Επέλεξε το εργαλείο «Σημείο σε αντικείμενο» και πάνω στον άξονα χχ΄ να τοποθετήσεις δυο σημεία (Κάνουμε δυο κλικ σε σημεία του άξονα).</td></tr>
</table>

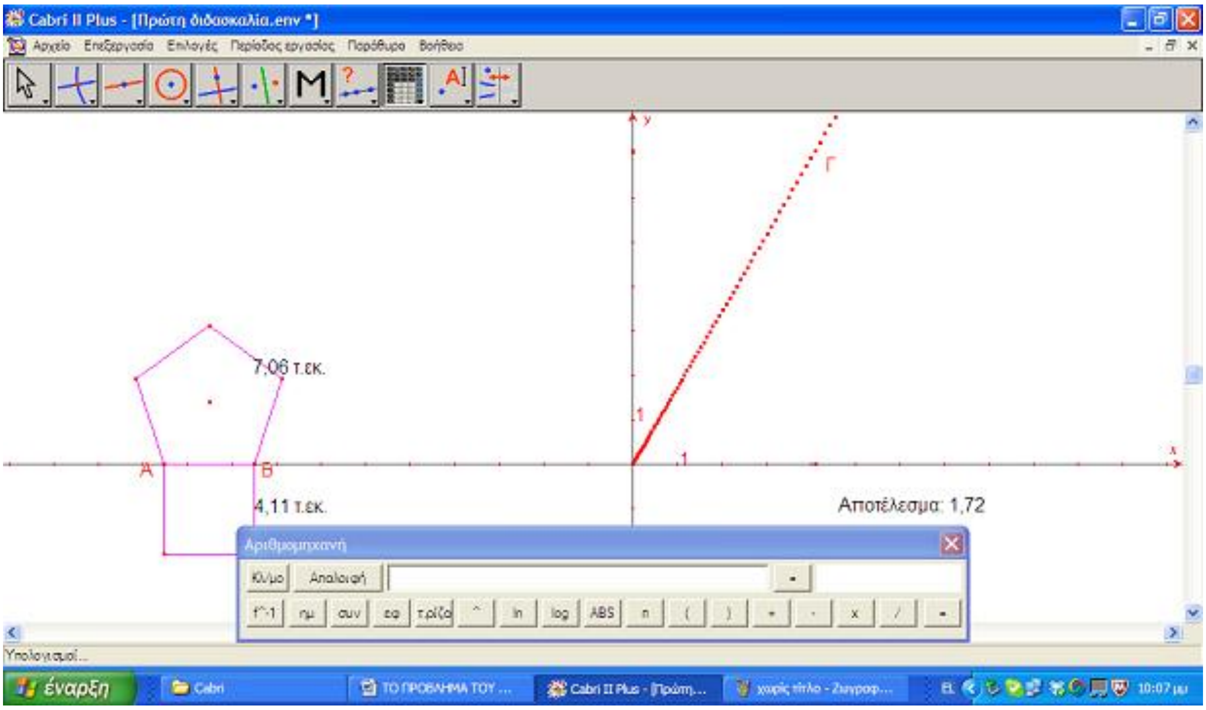
	Επέλεξε το εργαλείο «**Ονομασία**» και ονόμασε αυτά τα σημεία Α και Β. (Κλικ δίπλα σε κάθε σημείο και γράφεις στο πλαίσιο που ανοίγει)
	Επέλεξε το εργαλείο «**κανονικό πεντάγωνο1**» και κάνε κλικ διαδοχικά στα σημεία Α και Β (με τη σειρά που γράφονται). Μετά επέλεξε το εργαλείο «**τετράγωνο πολύγωνο**» και κάνε κλικ σε κάθε ένα από τα σημεία Β και Α (με τη σειρά που γράφονται).
	Επέλεξε το εργαλείο «**Εμβαδόν**» και μέτρησε τα εμβαδά του πενταγώνου και του τετραγώνου. (Πλησιάζεις τον κέρσορα κοντά στο πολύγωνο και μόλις εμφανιστεί το ερώτημα «Αυτό το πολύγωνο» ή «Αυτό το κανονικό πεντάγωνο» κάνεις κλικ)
	Επέλεξε το εργαλείο «**Μεταφορά μέτρησης**» και μετέφερε το εμβαδόν του πενταγώνου στον ψψ΄ και του τετραγώνου στον χχ΄. (Κάνε κλικ πρώτα στο εμβαδόν και μετά κλικ στο άξονα). Θα εμφανιστούν πάνω στους άξονες δυο σημεία που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με το αντίστοιχο εμβαδόν.
	Επέλεξε το εργαλείο «**Κάθετη ευθεία**» και κάνε κλικ στο σημείο από τη μεταφορά μέτρησης και αμέσως μετά κλικ στον αντίστοιχο άξονα. Αυτό να επαναληφθεί και για τα δυο σημεία μεταφοράς μέτρησης. (Το εργαλείο βρίσκεται στο ίδιο κουμπί με το εργαλείο «Μεταφορά μέτρησης»)
	Επέλεξε το εργαλείο «**Σημείο(-α) σε τομή**» και όρισε τη τομή των δυο κάθετων ευθειών που έφερες προηγουμένως στους άξονες (Το εργαλείο θα το βρεις στο κουμπί των σημείων. Εκεί βρήκες και το εργαλείο «Σημείο σε αντικείμενο»). Ονόμασε αυτό το σημείο Γ.
	Επέλεξε το εργαλείο «**Γραμμή ίχνους On/Off**» και ενεργοποίησε το ίχνος του σημείου Γ (Φέρνουμε τον κέρσορα κοντά στο σημείο και κάνουμε κλικ).
	Αν όλα πήγαν καλά τότε επιλέγοντας το εργαλείο «Δείκτης» μπορείς να μετακινήσεις τα σημεία Α ή Β. Τότε το ίχνος θα γράψει μια γραμμή. Να βγάλεις συμπεράσματα. Αν χρειαστείς υπολογισμούς θα

	βρεις το εργαλείο στο ίδιο κουμπί με το εργαλείο «Εμβαδόν».
	Αν νομίζεις ότι κάτι δεν λειτουργεί καλά φώναξέ με.

Μετακινώντας το σημείο Α ή το σημείο Β το ίχνος του Γ θα διαγράψει μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Αυτό μας δείχνει ότι το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου και του τετραγώνου που έχει ίση πλευρά με το κανονικό πεντάγωνο είναι ανάλογα. Η παρακάτω εικόνα δείχνει πράγματι αυτή την εικασία.

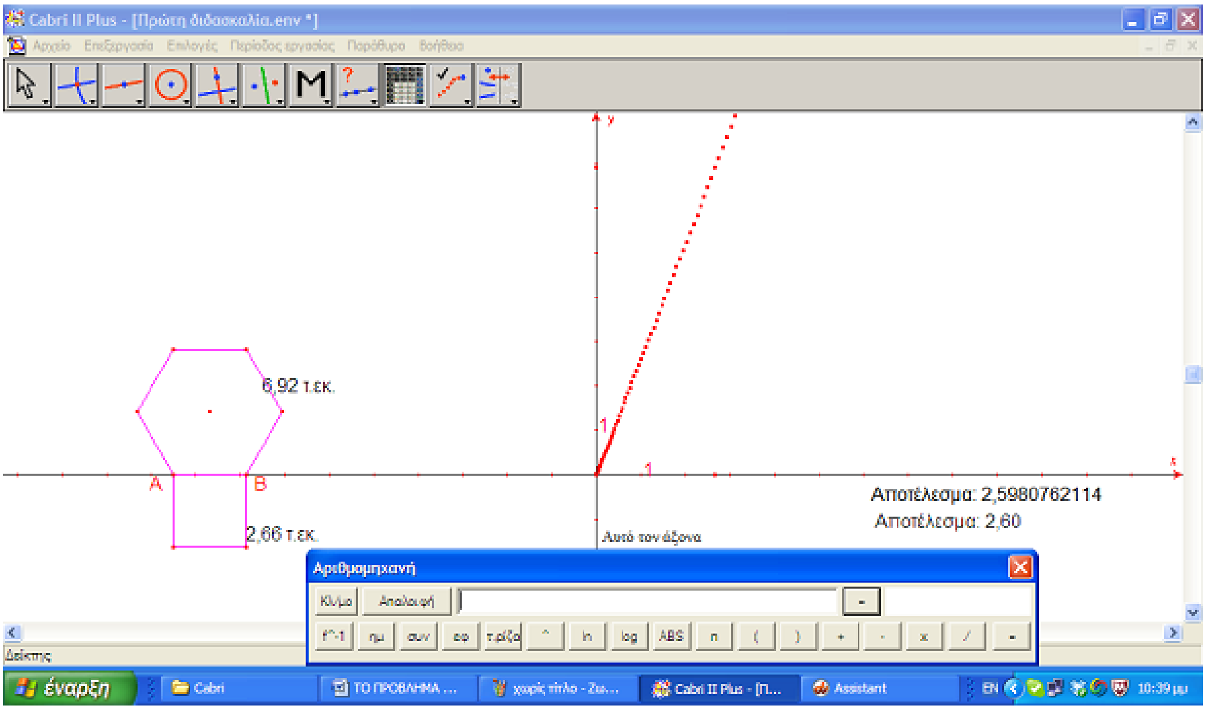


Οι μαθητές πρέπει να καταλήξουν σε αυτή την εικασία και μετά να προτείνουν κατάλληλη χρήση των εργαλείων του λογισμικού για να βρούνε τη συνάρτηση που προσεγγίζει αυτή την αναλογία. Προφανώς θα προτείνουν τον «Υπολογισμοί» και διαιρώντας τις τιμές των εμβαδών σε μια τυχαία θέση να υπολογίσουν ότι ο συντελεστής αναλογίας είναι περίπου 1,72 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

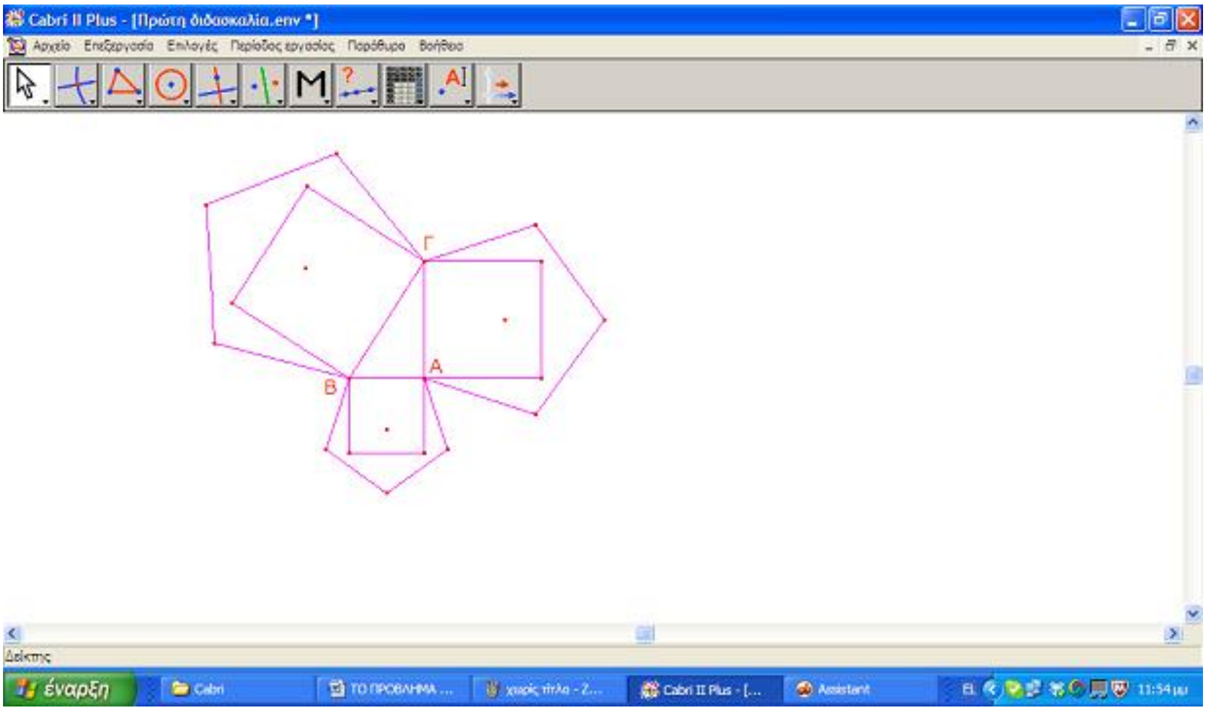


Θέλω οι μαθητές πρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ο συντελεστής αναλογίας είναι άρρητος. Θα πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες του λογισμικού που δίνονται στο μενού «Επιλογές» → «Προτιμήσεις» και να πειραματισθούν με την ακρίβεια των υπολογισμών στα δεκαδικά ψηφία.

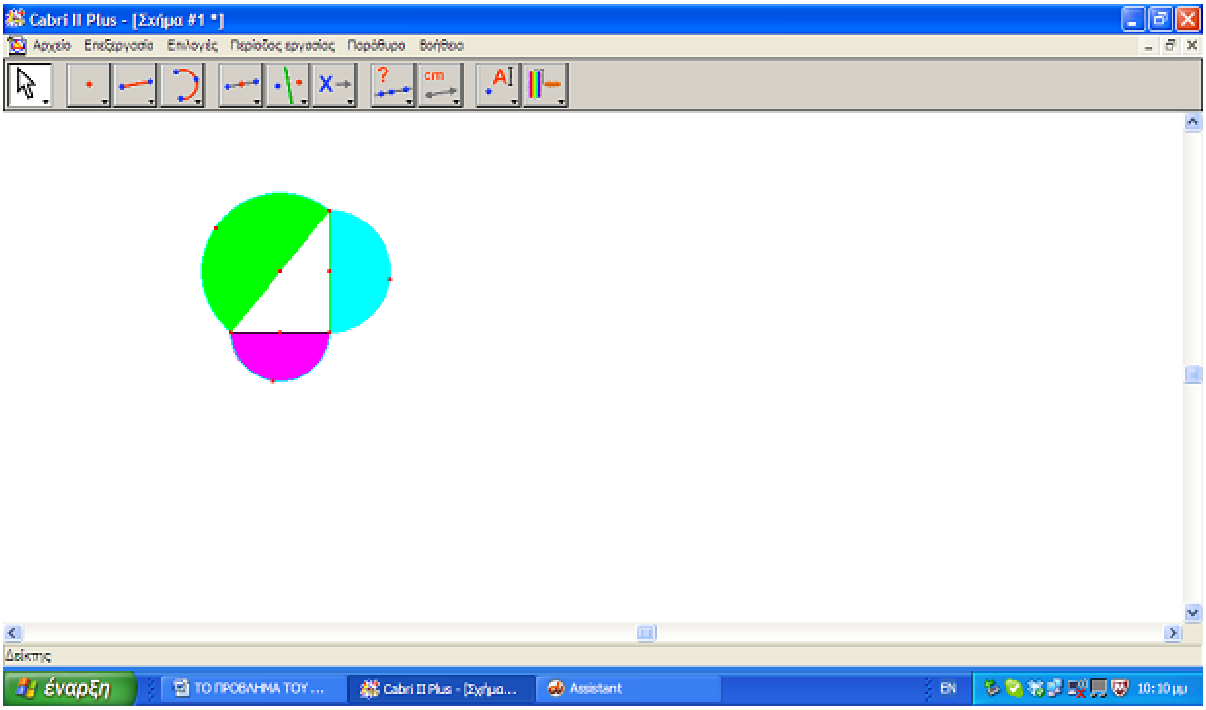
Μετά θα πρέπει να εξετάσουν τη σχέση του εμβαδού ενός κανονικού εξαγώνου με το τετράγωνο που έχει ίση πλευρά με αυτό. Η διαδικασία σχεδιασμού και γενικά η υλοποίηση αυτής της σύγκρισης είναι παρόμοια με την προηγούμενη, άρα οι μαθητές πρέπει να την υλοποιήσουν μόνοι τους. Η παρακάτω εικόνα δείχνει την τελική φάση και το συμπέρασμα που πρέπει να βγάλουν. Στην εικόνα αυτή μπορείτε να δείτε τις προσεγγίσεις του λόγου αναλογίας με δυο δεκαδικά και με το μέγιστο αριθμό δεκαδικών που παρέχει το λογισμικό. Είναι εμφανές ότι τουλάχιστον σε αυτά τα δεκαδικά που εμφανίζονται δεν υπάρχει περιοδικότητα. Μπορούμε λοιπόν να εικάσουμε ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι ρητός.



Έχοντας αυτά τα δεδομένα οι μαθητές μπορούν τώρα να συμπεράνουν ότι το εμβαδόν ενός κανονικού εξαγώνου και ενός κανονικού πενταγώνου με ίση πλευρά, είναι ανάλογα. Ο λόγος αναλογίας ισούται με το πηλίκο των δυο λόγων που προσδιόρισαν προηγουμένως συγκρίνοντας το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου και του κανονικού εξαγώνου με το εμβαδόν του τετραγώνου ίδιας πλευράς. Το γεγονός αυτό μπορούν να το επαληθεύσουν με την χρήση του λογισμικού εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία σύγκρισης. Αυτή θα την υλοποιήσουν μόνοι τους αφού είναι ακριβώς ίδια με τις προηγούμενες. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν ενός κανονικού εξαγώνου και ενός κανονικού πενταγώνου με ίσες πλευρές είναι ανάλογα και μάλιστα να ξέρουμε ρητή προσέγγιση του συντελεστή αναλογίας. Επειδή οι μαθητές είναι Β΄ Λυκείου έχουν αρκετές γνώσεις και πρέπει να είναι σε θέση να προσδιορίσουν ακριβώς τον συντελεστή αναλογίας. Αυτό θα τους το ζητήσω να το κάνουν σαν άσκηση στο σπίτι. Αυτό είναι εύκολο να το υπολογίσουν γιατί ήδη ξέρουν τις πλευρές και τα αποστήματα των κανονικών πολυγώνων σαν συνάρτησης της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου. Οι μαθητές τώρα είναι σε θέση να προχωρήσουν στην επόμενη φάση που είναι να δουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με μια πιο γενική θεώρηση. Τώρα μπορούν να μελετήσουν το εξής πρόβλημα: **Στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου να κατασκευάσεις κανονικά πεντάγωνα. Να μετρήσεις τα εμβαδά τους και να εξετάσεις τη σχέση που τα συνδέει. Μπορείς να εξηγήσεις το αποτέλεσμα;** Η αρχική μελέτη του προβλήματος μπορεί να γίνει με τον κλασικό τρόπο που χρησιμοποιούμε το λογισμικό. Θα μετρηθούν τα εμβαδά, θα προσθέσουμε τα εμβαδά των δυο κάθετων πλευρών και με πινακοποίηση θα βγάλουμε συμπέρασμα την ισότητα. Η ερμηνεία του αποτελέσματος θα δοθεί με τη χρήση των προηγούμενων συμπερασμάτων.



Ξέρουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Πολλαπλασιάζοντας με τον συντελεστή 1,72 που βρήκαμε προηγουμένως έχουμε τα εμβαδά των κανονικών πενταγώνων. Άρα το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει και κανονικά πεντάγωνα. Παρόμοια μπορούμε να κάνουμε τη μελέτη και την απόδειξη για κανονικά εξάγωνα. Αυτά που αποδείξαμε μέχρι τώρα έχουν να κάνουν με ευθύγραμμα σχήματα. Μπορούμε να επεκτείνουμε την δραστηριότητα αυτή και σε μη ευθύγραμμα σχήματα που κατασκευάζονται με τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα του Πυθαγορείου θεωρήματος με τον άρρητο αριθμό π, τότε μεταβαίνουμε σε εμβαδά κύκλων που έχουν διάμετρο τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Αν μάλιστα πολλαπλασιάσουμε με το π/2, εύκολα λοιπόν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων που σχηματίζονται με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, έχουν άθροισμα ίσο με το εμβαδόν του ημικυκλίου της υποτείνουσας.



Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει για μια μεγάλη ποικιλία σχημάτων που δημιουργούνται με όμοιο τρόπο από τις πλευρές ενός οποιουδήποτε ορθογωνίου τριγώνου.