Αυτό είναι ένα **κλάσμα**: $\frac{3}{5}$ Κόβω μια σοκολάτα σε **5** κομμάτια και παίρνω τα **3**.

$\frac{3}{5}$ αριθμητής
κλασματική γραμμή
παρονομαστής

Κάθε κλάσμα είναι μια διαίρεση. $\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$

- Κλάσμα ίσο με την ακέραιη μονάδα. $\frac{6}{6}$, $\frac{2}{2}$

Ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή.

$\frac{6}{6} = 1$ επειδή 6 = 6 — Κόβω μια σοκολάτα σε **6** κομμάτια και παίρνω και τα **6** δηλαδή παίρνω ολόκληρη τη σοκολάτα.

$\frac{2}{2} = 1$ επειδή 2 = 2 — Κόβω μια σοκολάτα σε **2** κομμάτια και παίρνω και τα **2** δηλαδή παίρνω ολόκληρη τη σοκολάτα.

- Κλάσμα μικρότερο από την ακέραιη μονάδα (**γνήσιο κλάσμα**). $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{8}$

Ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή.

$\frac{3}{5} < \frac{5}{5}$ ή $\frac{3}{5} < 1$ επειδή 3 < 5 — Κόβω μια σοκολάτα σε **5** κομμάτια και παίρνω τα **3**.

$\frac{6}{8} < \frac{8}{8}$ ή $\frac{6}{8} < 1$ επειδή 6 < 8 — Κόβω μια σοκολάτα σε **8** κομμάτια και παίρνω τα **6**.

- Κλάσμα μεγαλύτερο από την ακέραιη μονάδα (**καταχρηστικό κλάσμα**). $\frac{6}{4}$, $\frac{5}{3}$

Ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.

$\frac{6}{4} > \frac{4}{4}$ ή $\frac{6}{4} > 1$ επειδή 6 > 4 — Κόβω μια σοκολάτα σε **4** κομμάτια, παίρνω και τα **4**, αλλά παίρνω και άλλα **2** κομμάτια από μια ακόμη σοκολάτα κομμένη στα **4**.

$\frac{5}{3} > \frac{3}{3}$ ή $\frac{5}{3} > 1$ επειδή 5 > 3 — Κόβω μια σοκολάτα σε **3** κομμάτια, παίρνω και τα **3**, αλλά παίρνω και άλλα **2** κομμάτια από μια ακόμη σοκολάτα κομμένη στα **3**.

- Αγόρασα 85 μέτρα ύφασμα για να φτιάξω τις κουρτίνες του σπιτιού μου αλλά χρησιμοποίησα μόνο τα $\frac{3}{5}$. Πόσα μέτρα χρησιμοποίησα;

Τι μου λέει το κλάσμα;
Ο παρονομαστής μου λέει: **Χώρισε** το ύφασμα σε 5 κομμάτια. 85 : 5 = 17
17 μέτρα είναι το κάθε κομμάτι.
Ο αριθμητής μου λέει: **Πάρε** τα 3 κομμάτια. 3 Χ 17 = 51
Χρησιμοποίησα 51 μέτρα.

- Ο **μικτός αριθμός** αποτελείται από έναν ακέραιο αριθμό κι ένα κλασματικό. $3\frac{2}{5}$

$3\frac{2}{5}$ 3 ακέραιος και $\frac{2}{5}$ κλάσμα.

Εχω **3** σοκολάτες. Κόβω και μια άλλη σοκολάτα σε **5** κομμάτια και παίρνω τα **2**.

- Κάνω το καταχρηστικό κλάσμα μεικτό αριθμό.

$\frac{6}{4}$ το 4 στο 6 χωράει 1 φορά και περισσεύουν 2 άρα: $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$

- Κάνω το μεικτό αριθμό καταχρηστικό κλάσμα.

$4\frac{2}{3} = \frac{(4 \cdot 3) + 2}{3} = \frac{14}{3}$ $5\frac{2}{6} = \frac{(5 \cdot 6) + 2}{6} = \frac{32}{6}$

- Τα **δεκαδικά κλάσματα**: $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{8}{1000}$, κτλ

έχουν παρονομαστή το 10, το 100, το 1000 , κτλ

- Κάνω το δεκαδικό κλάσμα δεκαδικό αριθμό.

$\frac{2}{10} = 0{,}2$ $\frac{5}{100} = 0{,}05$ $\frac{8}{1000} = 0{,}008$ $\frac{36}{100} = 0{,}36$ $\frac{71}{1000} = 0{,}071$ $\frac{862}{1000} = 0{,}862$

- Κάνω το μεικτό αριθμό δεκαδικό αριθμό.

$3\frac{6}{10} = 3{,}6$ $25\frac{18}{100} = 25{,}18$ $9\frac{357}{1000} = 9{,}357$ $25\frac{7}{100} = 25{,}07$ $567\frac{32}{1000} = 567{,}032$

- Ας αναλύσουμε ένα δεκαδικό αριθμό, π.χ. τον αριθμό 5836,247

ακέραια ψηφία					**δεκαδικά ψηφία**		
χιλιάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	υποδιαστολή	δέκατα	εκατοστά	χιλιοστά
5	8	3	6	**,**	2	4	7

- Τα **ισοδύναμα κλάσματα** $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{15}{30}$ έχουν την ίδια αξία.

$\frac{1}{2}$ Κόβω μια σοκολάτα σε 2 κομμάτια και παίρνω το 1.

$\frac{5}{10}$ Κόβω την ίδια σοκολάτα σε 10 κομμάτια και παίρνω τα 5.

$\frac{15}{30}$ Κόβω την ίδια σοκολάτα σε 30 κομμάτια και παίρνω τα 15.

Πήρα την ίδια ποσότητα σοκολάτας και τις τρεις φορές.

- Πώς προκύπτουν ισοδύναμα κλάσματα με πολλαπλασιασμό.

Πολλαπλασιάζω τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό.

$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}$ $\quad$ $\frac{5}{10}=\frac{5\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{15}{30}$

- Πώς προκύπτουν ισοδύναμα κλάσματα με διαίρεση.

Διαιρώ τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό.

$\frac{5}{10}=\frac{5:5}{10:5}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{15}{30}=\frac{15:3}{30:3}=\frac{5}{10}$

- Πώς κάνω απλοποίηση κλασμάτων

Διαιρώ και τους δύο όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό
και βρίσκω ένα ισοδύναμο κλάσμα με μικρότερους όρους.

$\frac{8}{12}=\frac{8:2}{12:2}=\frac{4}{6}$ $\quad$ $\frac{4}{6}=\frac{4:2}{6:2}=\frac{2}{4}$

- **Ανάγωγο κλάσμα** είναι το κλάσμα που δεν απλοποιείται.

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{20}{33}$

- Ποσοστό στα εκατό

Το κλάσμα $\frac{15}{100}$ γράφεται και 15% (διαβάζεται: 15 στα 100)

- Τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**.

$\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$

- Τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα**.

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$

- Συγκρίνω ομώνυμα κλάσματα.

Μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.

$\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5} > \frac{2}{5} > \frac{1}{5}$

- Συγκρίνω ετερώνυμα κλάσματα που έχουν ίδιο αριθμητή.

Μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.

$\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5} > \frac{3}{8} > \frac{3}{10}$

- Δεν μπορώ να συγκρίνω ετερώνυμα κλάσματα
  που έχουν διαφορετικούς αριθμητές:

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{1}{2}$

● Πότε μεταβάλλεται η αξία ενός κλάσματος

1) Μεγαλώνω ένα κλάσμα

α) <u>Πολλαπλασιάζω</u> (μεγαλώνω) τον αριθμητή. $\frac{2}{8}$ $\frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{6}{8}$ $\frac{6}{8} > \frac{2}{8}$

β) <u>Διαιρώ</u> (μικραίνω) τον παρονομαστή. $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{8:2} = \frac{2}{4}$ $\frac{2}{4} > \frac{2}{8}$

……………………………………………………………………………………………

2) Μικραίνω ένα κλάσμα

α) <u>Διαιρώ</u> (μικραίνω) τον αριθμητή. $\frac{4}{10}$ $\frac{4:2}{10} = \frac{2}{10}$ $\frac{2}{10} < \frac{4}{10}$

β) <u>Πολλαπλασιάζω</u> (μεγαλώνω) τον παρονομαστή. $\frac{4}{10}$ $\frac{4}{10 \cdot 2} = \frac{4}{20}$ $\frac{4}{20} < \frac{4}{10}$

● μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα
(για να κάνω σύγκριση, πρόσθεση ή αφαίρεση). $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$

Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών, διαιρώ τον κάθε παρονομαστή μ' αυτό και το πηλίκο το βάζω καπελάκι στο κλάσμα. Πολλαπλασιάζω με το καπελάκι τον αριθμητή και τον παρονομαστή. Έτσι τα κλάσματα θα έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Ε.Κ.Π.(4,6,8) = 24

24 : 4 = 6 , 24 : 6 = 4 , 24 : 8 = 3

$$\overbrace{\frac{3}{4}}^{6} , \overbrace{\frac{5}{6}}^{4} , \overbrace{\frac{7}{8}}^{3} \Rightarrow \frac{18}{24} , \frac{20}{24} , \frac{21}{24}$$

Ομώνυμα κλάσματα

- Προσθέτω ομώνυμα κλάσματα

Προσθέτω τους αριθμητές κι αφήνω τον ίδιο παρονομαστή.

$$\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{6}{10}=\frac{3+2+6}{10}=\frac{11}{10}=1\frac{1}{10}$$

- Αφαιρώ ομώνυμα κλάσματα

Αφαιρώ τους αριθμητές κι αφήνω τον ίδιο παρονομαστή.

$$\frac{10}{15}-\frac{8}{15}=\frac{10-8}{15}=\frac{2}{15}$$

- Προσθέτω μικτούς αριθμούς

α΄ τρόπος: Μετατρέπω τους μεικτούς σε κλάσματα και τα προσθέτω.

$$4\frac{1}{3}+5\frac{2}{3}+8\frac{6}{3}=\frac{13}{3}+\frac{17}{3}+\frac{30}{3}=\frac{13+17+30}{3}=\frac{60}{3}=20$$

....

β΄ τρόπος: Προσθέτω χωριστά τους ακεραίους και χωριστά τα κλάσματα.

$$4\frac{1}{3}+5\frac{2}{3}+8\frac{6}{3}=\left(4+5+8\right)\frac{1+2+6}{3}=17\frac{9}{3}=17+3=20$$

- Αφαιρώ μικτούς αριθμούς

α΄ τρόπος: Μετατρέπω τους μεικτούς σε κλάσματα και αφαιρώ.

$$7\frac{4}{5}-3\frac{2}{5}=\frac{39}{5}-\frac{17}{5}=\frac{39-17}{5}=\frac{22}{5}=4\frac{2}{5}$$

....

β΄ τρόπος: Αφαιρώ χωριστά τους ακεραίους και χωριστά τα κλάσματα.

$$7\frac{4}{5}-3\frac{2}{5}=\left(7-3\right)\frac{4-2}{5}=4\frac{2}{5}$$

- Αφαιρώ μεικτούς αριθμούς όταν το κλάσμα του αφαιρετέου δεν αφαιρείται από το κλάσμα του μειωτέου $8\frac{1}{3}-5\frac{2}{3}=$

Παίρνω μια ακέραιη μονάδα από τον ακέραιο του μειωτέου (τον 8),
τη μετατρέπω σε κλάσμα ($\frac{3}{3}$)
και αυτό το προσθέτω στο κλάσμα του μειωτέου (το $\frac{1}{3}$).
Έτσι, ο μεικτός $8\frac{1}{3}$ γίνεται $7\frac{4}{3}$.

Μετά κάνω κανονικά την αφαίρεση. $8\frac{1}{3}-5\frac{2}{3}=7\frac{4}{3}-5\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$

- Αφαιρώ μεικτό αριθμό από ακέραιο.

Μετατρέπω τον ακέραιο (το 20) σε μεικτό ($19\frac{5}{5}$) και κάνω την αφαίρεση.

$$20-10\frac{3}{5}=19\frac{5}{5}-10\frac{3}{5}=(19-10)\frac{5-3}{5}=9\frac{2}{5}$$

- Αφαιρώ κλάσμα από ακέραιο.

α΄ τρόπος: Μετατρέπω τον ακέραιο (το 10) σε μεικτό ($9\frac{7}{7}$) και κάνω την αφαίρεση.

$$10-\frac{4}{7}=9\frac{7}{7}-\frac{4}{7}=9\frac{7-4}{7}=9\frac{3}{7}$$

β΄ τρόπος: Μετατρέπω τον ακέραιο (το 10) σε κλάσμα ($\frac{70}{7}$) και κάνω την αφαίρεση.

$$10-\frac{4}{7}=\frac{70}{7}-\frac{4}{7}=\frac{70-4}{7}=\frac{66}{7}=9\frac{3}{7}$$

Ετερώνυμα κλάσματα

- Προσθέτω ετερώνυμα κλάσματα

Μετατρέπω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών τους. Κατόπιν προσθέτω τους αριθμητές και αφήνω ίδιο τον παρονομαστή.

3 4 6

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}+\frac{6}{12}=\frac{9+8+6}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{9}{12}$$

- Αφαιρώ ετερώνυμα κλάσματα

Μετατρέπω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών τους. Κατόπιν αφαιρώ τους αριθμητές και αφήνω ίδιο τον παρονομαστή.

2 3

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$$

- Προσθέτω μεικτούς αριθμούς

α΄ τρόπος: Μετατρέπω τους μεικτούς σε κλάσματα,
κάνω τα κλάσματα ομώνυμα και προσθέτω κανονικά.

5 2 1

$$4\frac{1}{2}+6\frac{1}{5}+2\frac{3}{10}=\frac{9}{2}+\frac{31}{5}+\frac{23}{10}=\frac{45}{10}+\frac{62}{10}+\frac{23}{10}=\frac{45+62+23}{10}=\frac{130}{10}=13$$

…………………………………………………………………………………………

β΄ τρόπος: Μετατρέπω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα,
προσθέτω χωριστά τους ακεραίους και χωριστά τα κλάσματα.

5 2 1

$$4\frac{1}{2}+6\frac{1}{5}+2\frac{3}{10}=4\frac{5}{10}+6\frac{2}{10}+2\frac{3}{10}=\left(4+6+2\right)\frac{5+2+3}{10}=12\frac{10}{10}=12+1=13$$

- Αφαιρώ μεικτούς αριθμούς

α΄ τρόπος: Μετατρέπω τους μεικτούς σε κλάσματα,
κάνω τα κλάσματα ομώνυμα και αφαιρώ κανονικά.

3 2

$$4\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}=\frac{9}{2}-\frac{7}{3}=\frac{27}{6}-\frac{14}{6}=\frac{27-14}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$$

…………………………………………………………………………………………

β΄ τρόπος: Μετατρέπω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα
και αφαιρώ χωριστά τους ακεραίους και χωριστά τα κλάσματα.

3 2

$$4\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}=4\frac{3}{6}-2\frac{2}{6}=(4-2)\frac{3-2}{6}=2\frac{1}{6}$$

- Αφαίρεση μεικτών όταν το κλάσμα του αφαιρετέου
δεν αφαιρείται από το κλάσμα του μειωτέου

Παίρνω μια ακέραιη μονάδα από τον ακέραιο του μειωτέου (τον 5),

την μετατρέπω σε κλάσμα ($\frac{6}{6}$)
και αυτό το προσθέτω στο κλάσμα του μειωτέου (το $\frac{2}{6}$).
Έτσι, ο μεικτός $5\frac{2}{6}$ γίνεται $4\frac{8}{6}$. Μετά κάνω κανονικά την αφαίρεση.

2 3

$$5\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}=5\frac{2}{6}-2\frac{3}{6}=4\frac{8}{6}-2\frac{3}{6}=(4-2)\frac{8-3}{6}=2\frac{5}{6}$$

- Πολλαπλασιάζω ακέραιο με κλάσμα

Πολλαπλασιάζω τον ακέραιο με τον αριθμητή
και αφήνω τον ίδιο παρονομαστή.

$$15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{15 \cdot 2}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

- Πολλαπλασιάζω ακέραιο με μεικτό

Πρώτα μετατρέπω το μεικτό σε κλάσμα.

Μετά πολλαπλασιάζω τον ακέραιο με τον αριθμητή
και αφήνω τον ίδιο παρονομαστή.

$$12\frac{5}{9} \cdot 63 = \frac{113}{9} \cdot 63 = \frac{113 \cdot 63}{9} = \frac{7.119}{9} = 791$$

- Πολλαπλασιάζω κλάσμα με κλάσμα

Πολλαπλασιάζω τον αριθμητή με τον αριθμητή και
τον παρονομαστή με τον παρονομαστή.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

- Πολλαπλασιάζω κλάσμα με μεικτό

Κάνω το μεικτό κλάσμα και πολλαπλασιάζω κανονικά.

- Πολλαπλασιάζω μεικτό με μεικτό

Κάνω τους μεικτούς κλάσματα και πολλαπλασιάζω κανονικά.

- Διαιρώ ακέραιο με κλάσμα

Αντιστρέφω τους όρους του κλασματικού διαιρέτη
και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό.

$$5 : \frac{2}{8} = 5 \cdot \frac{8}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$$

- Διαιρώ ακέραιο με μεικτό

Μετατρέπω το μεικτό σε κλάσμα,
αντιστρέφω τους όρους του κλασματικού διαιρέτη
και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό.

$$132 : 5\frac{1}{2} = 132 : \frac{11}{2} = 132 \cdot \frac{2}{11} = \frac{132 \cdot 2}{11} = \frac{264}{11} = 24$$

- Διαιρώ κλάσμα με κλάσμα

Αντιστρέφω τους όρους του κλασματικού διαιρέτη
και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό
(πολλαπλασιάζω τον αριθμητή με τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον παρονομαστή).

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{8} = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} = \frac{40}{42} = \frac{20}{21}$$

- Διαιρώ κλάσμα με μεικτό

Κάνω το μεικτό κλάσμα και
ακολουθώ κανονικά τις οδηγίες για την διαίρεση κλάσματος με κλάσμα.

- Διαιρώ μεικτό με μεικτό

Κάνω τους μεικτούς κλάσματα και
ακολουθώ κανονικά τις οδηγίες για την διαίρεση κλάσματος με κλάσμα.

Σύνθετα κλάσματα

Σύνθετο είναι το κλάσμα στο οποίο ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα (ο αριθμητής, ο παρονομαστής ή και οι δύο).

α) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{4}} = \frac{3}{5} : \frac{2}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{2} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 2} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

β) $\dfrac{2}{\frac{3}{4}} = 2 : \frac{3}{4} = \frac{2}{1} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

γ) $\dfrac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} : \frac{3}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

……………………………………………………………………………………………

Αν κάποιος όρος του σύνθετου κλάσματος (ή και οι δύο) είναι μεικτός αριθμός, τον μετατρέπω σε κλάσμα κι εργάζομαι κανονικά.

δ) $\dfrac{2\frac{3}{5}}{1\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{15}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{13}{5} : \frac{5}{3} = \frac{13}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{39}{25} = 1\frac{14}{25}$