ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΚΙΝΗΤΑ (ΟΜΑΛΗ-ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ)

1^{ος} τρόπος - Διανυσματικά με τις θέσεις των κινητών.

(Ο τρόπος αυτός είναι γενικός και θα χρειαστεί στα παρακάτω κεφάλαια καθώς στην Β΄- Γ΄ Λυκείου)

Α. Φτιάχνουμε ένα σχήμα στο οποίο φαίνονται κάποιες **χαρακτηριστικές θέσεις** των κινητών (αρχική-τελική) . Τις θέσεις στο σχήμα τις συμβολίζουμε (σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε) **με διάνυσμα** που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος την αρχική ή τελική θέση του κινητού**.** (Στα σχήματα που θα φτιάχνω παρακάτω θα είναι με κόκκινο χρώμα).

Β. Γράφουμε για κάθε σώμα την **διανυσματική σχέση** που αφορά την μετατόπιση (π.χ αν η κίνηση είναι ομαλή μεταβαλλόμενη την σχέση : $\overrightarrow{\Delta x_{A}} = \overrightarrow{\upsilon_{A}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \Delta t^2$) ή την ταχύτητα των κινητών (π.χ αν η κίνηση είναι ομαλή μεταβαλλόμενη την σχέση $\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\upsilon_0} + \vec{\alpha} t$). Για να ''περάσουμε'' από τις σχέσεις αυτές σε μια σχέση **μη διανυσματική** καθορίζουμε θετική φορά. Όσα διανύσματα έχουν φορά προς τα θετικά θα παίρνουν στην καινούργια σχέση πρόσημο + (συν) , ενώ όσα έχουν αρνητική φορά θα παίρνουν πρόσημο – (πλην) .Η σχέση που προκύπτει είναι **σχέση μέτρων** και όταν θα αντικαθιστούμε τιμές των μεγεθών είναι λογικό ότι **δεν** βάζουμε πρόσημο αφού το μέτρο ενός μεγέθους έχει πάντα θετική τιμή.

Γ. Συσχετίζουμε τις σχέσεις που προκύπτουν για κάθε σώμα και επιλύουμε το πρόβλημα.

2^{ος} τρόπος - Χρήση των διαστημάτων που διανύουν τα κινητά.

(Ο τρόπος αυτός είναι πιο εύκολος προς το παρόν)

Α. Φτιάχνουμε ένα σχήμα στο οποίο φαίνονται τα διαστήματα που έχει διανύσει κάθε κινητό**.** Θυμίζω ότι το διάστημα είναι το συνολικό μήκος που διανύει ένα κινητό και είναι μονόμετρο μέγεθος. Τα διαστήματα στο σχήμα που θα φτιάχνω παρακάτω θα είναι με μπλε χρώμα.

Β. Γράφουμε για κάθε κινητό την σχέση του διαστήματος που διανύει (π.χ αν η κίνηση είναι ομαλή επιταχυνόμενη την σχέση $S_A = \upsilon_A \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, ή για ομαλή επιβραδυνόμενη την σχέση $S_A = \upsilon_A \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$), ή την ταχύτητα των κινητών (π.χ αν η κίνηση είναι ομαλή επιταχυνόμενη την σχέση $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$, ή για ομαλή επιβραδυνόμενη την σχέση $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$) , οι οποίες αφορούν μονόμετρα μεγέθη, και αντικαθιστώ πάντα θετικές τιμές των μεγεθών .

Γ. Συσχετίζουμε τις σχέσεις που προκύπτουν για κάθε σώμα και επιλύουμε το πρόβλημα.

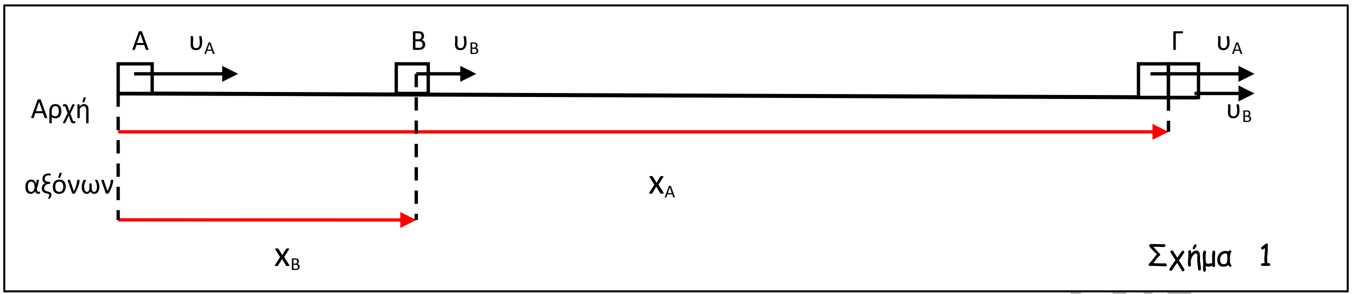
Παράδειγμα 1 . Κινητά που έχουν την ίδια φορά (Α΄ περίπτωση)

Κινητό Α την χρονική στιγμή t=0 έχει ταχύτητα υ_A=20m/sec και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση α=2m/s^2 .Το κινητό βρίσκεται στην θέση Ο την οποία θεωρούμε ως αρχή των αξόνων. Ένα άλλο κινητό περνά από την θέση Β που βρίσκεται σε απόσταση ΑΒ=200m μπροστά από το Α την χρονική στιγμή t=0 με σταθερή ταχύτητα υ_B=20m/sec, κινούμενο με την ίδια φορά στον ίδιο ευθύ δρόμο. Να βρείτε πότε και που θα συναντηθούν;

Λύση

1^{ος} τρόπος

Φτιάχνουμε το παρακάτω Σχήμα 1 όπου φαίνονται τα διανύσματα των ταχυτήτων και των θέσεων των κινητών.



Τα δύο κινητά ξεκινούν ταυτόχρονα την t=0 , άρα και τα δύο κινητά μέχρι την στιγμή της συνάντησής τους έχουν κινηθεί **το ίδιο χρονικό διάστημα** Δt=t.

Για το κινητό Α έχουμε :

$$\overline{\Delta x_{\rm A}} = \overline{\upsilon_{\rm A}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \Delta t^2 \longrightarrow \overline{x_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overline{x_{\alpha\rho\chi}} = \overline{\upsilon_{\rm A}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \Delta t^2 \xrightarrow[\Delta t=t]{\to +} x_{\rm A} = \upsilon_{\rm A} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a t^2 \longrightarrow$$

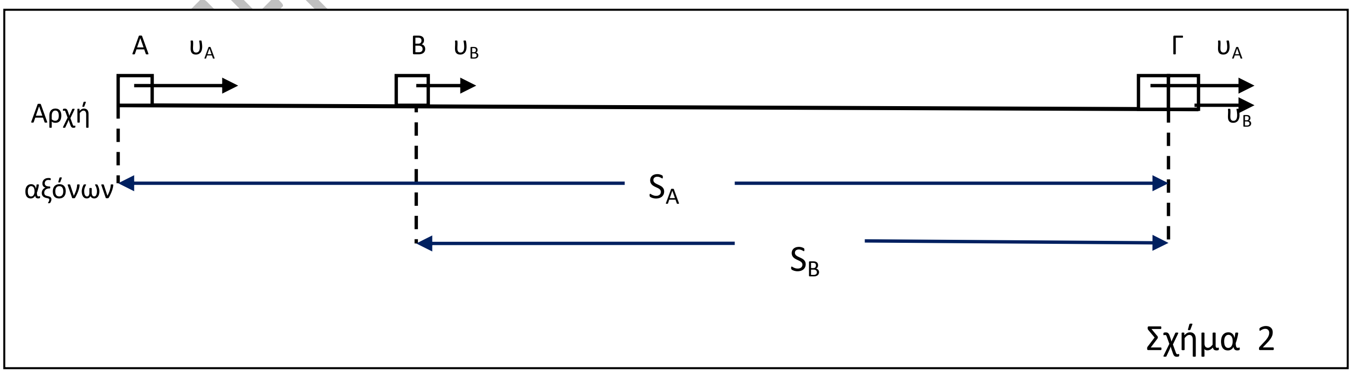
$$x_{\rm A} = 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2 \qquad 1$$

Για το κινητό Β έχουμε :

$$\overline{\Delta x_{\rm B}} = \overline{\upsilon_{\rm B}} \cdot \Delta t \longrightarrow \overline{x_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overline{x_{\alpha\rho\chi}} = \overline{\upsilon_{\rm B}} \cdot t \xrightarrow{\to +} x_{\rm A} - x_{\rm B} = \upsilon_{\rm B} \cdot t \xrightarrow{x_B=(AB)=200} x_{\rm A} - 200 = 20 \cdot t \qquad 2$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 1 και 2 λύνουμε το πρόβλημα.

2^{ος} τρόπος



Για το κινητό Α έχουμε : $S_{\rm A} = \upsilon_{\rm A} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \longrightarrow S_{\rm A} = 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2$ 1

Για το κινητό Β έχουμε : $S_B = \upsilon_B \cdot t \longrightarrow S_B = 20 \cdot t$ 2

Από το Σχήμα 2 διαπιστώνουμε ότι : $S_{\mathrm{A}} = (\mathrm{AB}) + S_{\mathrm{B}}$, και συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις λύνουμε το πρόβλημα.

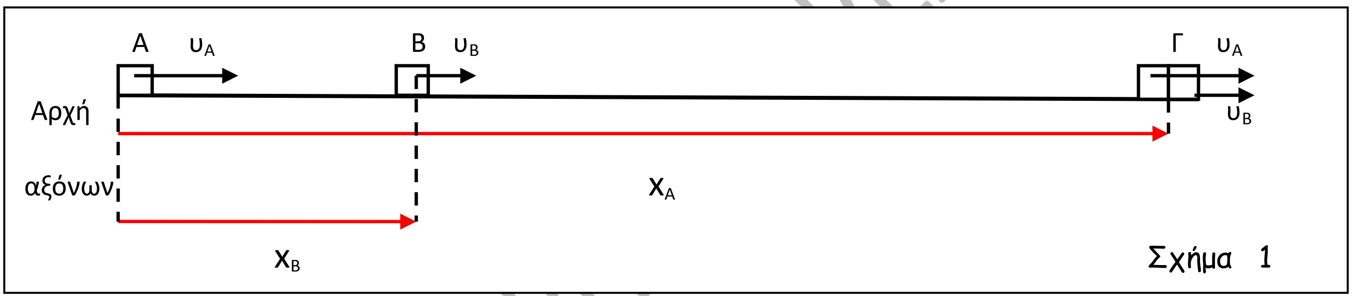
Παράδειγμα 2 . Κινητά που έχουν την ίδια φορά (Β΄ περίπτωση)

Κινητό Α την χρονική στιγμή t=0 έχει ταχύτητα υ_A=40m/sec και επιβραδύνεται με σταθερή επιτάχυνση α=2m/s^2 .Το κινητό βρίσκεται στην θέση Ο την οποία θεωρούμε ως αρχή των αξόνων. Ένα άλλο κινητό περνά από την θέση Β που βρίσκεται σε απόσταση ΑΒ=200m μπροστά από το Α την χρονική στιγμή t=0 με σταθερή ταχύτητα υ_B=10m/sec, κινούμενο με την ίδια φορά στον ίδιο ευθύ δρόμο. Να βρείτε πότε και που θα συναντηθούν;

Λύση

1^{ος} τρόπος

Φτιάχνουμε το παρακάτω Σχήμα 1 όπου φαίνονται τα διανύσματα των ταχυτήτων και των θέσεων των κινητών.



Σχήμα 1

Τα δύο κινητά ξεκινούν ταυτόχρονα την t=0 , άρα και τα δύο κινητά μέχρι την στιγμή της συνάντησής τους έχουν κινηθεί **το ίδιο χρονικό διάστημα** Δt=t.

Για το κινητό Α έχουμε :

$$\overrightarrow{\Delta x_{\mathrm{A}}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{A}}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \Delta t^2 \longrightarrow \overrightarrow{x_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overrightarrow{x_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{A}}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \Delta t^2 \xrightarrow[\Delta t = t]{\rightarrow +} x_{\mathrm{A}} = \upsilon_{\mathrm{A}} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a t^2 \longrightarrow$$

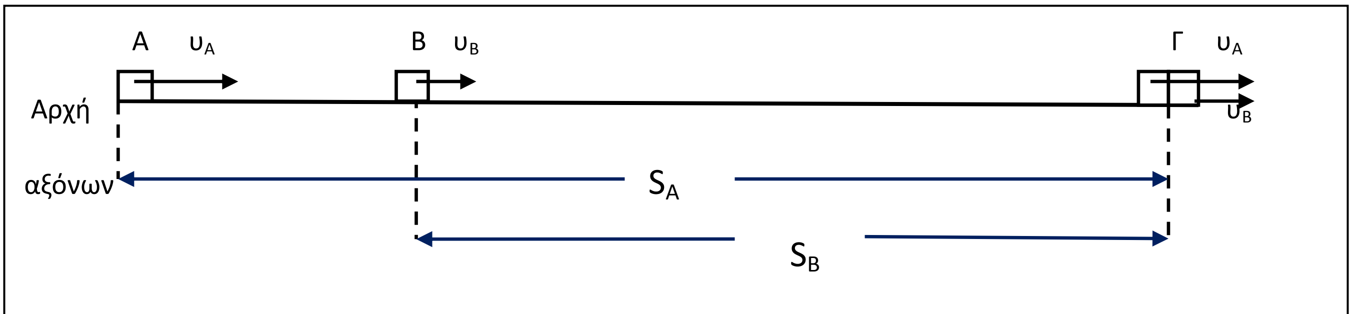
$$x_{\mathrm{A}} = 40 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 2t^2 \qquad (1)$$

Για το κινητό Β έχουμε :

$$\overrightarrow{\Delta x_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{B}}} \cdot \Delta t \longrightarrow \overrightarrow{x_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overrightarrow{x_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{B}}} \cdot t \xrightarrow{\rightarrow +} x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} = \upsilon_{\mathrm{B}} \cdot t \xrightarrow{x_B = (AB) = 200} x_{\mathrm{A}} - 200 = 10 \cdot t \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) λύνουμε το πρόβλημα.

2^{ος} τρόπος



Σχήμα 2

Για το κινητό Α έχουμε : $S_A = \upsilon_A \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \longrightarrow S_A = 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2$ (1)

Για το κινητό Β έχουμε : $S_B = \upsilon_B \cdot t \longrightarrow S_B = 10 \cdot t$ (2)

Από το Σχήμα 2 διαπιστώνουμε ότι : $S_A = (AB) + S_B$, και συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις λύνουμε το πρόβλημα.

Παράδειγμα 3. Κινητά που έχουν αντίθετη φορά (Γ΄ περίπτωση)

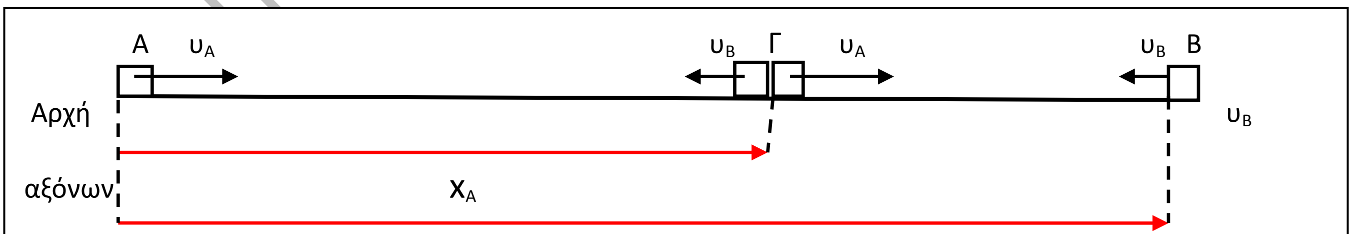
Κινητό την χρονική στιγμή t=0 έχει ταχύτητα υ_A=20m/sec και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση α=2m/s^2 .Το κινητό βρίσκεται στην θέση Α την οποία θεωρούμε ως αρχή των αξόνων. Ένα άλλο κινητό περνά από την θέση Β που βρίσκεται σε απόσταση ΑΒ=300m δεξιά από το Α την χρονική στιγμή t=0 με σταθερή ταχύτητα υ_B= 10m/sec, κινούμενο με αντίθετη φορά στον ίδιο ευθύ δρόμο. Να βρείτε πότε και που θα συναντηθούν;

(Δείτε το παρακάτω σχήμα).

Λύση

1^{ος} τρόπος

Φτιάχνουμε το παρακάτω Σχήμα 1 όπου φαίνονται τα διανύσματα των ταχυτήτων και των θέσεων των κινητών.



Σχήμα 1

Τα δύο κινητά ξεκινούν ταυτόχρονα την t=0 , άρα και τα δύο κινητά μέχρι την στιγμή της συνάντησής τους έχουν κινηθεί **το ίδιο χρονικό διάστημα** Δt=t.

Για το κινητό Α έχουμε :

$$\overrightarrow{\Delta x_{\mathrm{A}}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{A}}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} \cdot \Delta t^2 \longrightarrow \overrightarrow{x_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overrightarrow{x_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{A}}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\to +} x_{\mathrm{A}} = \upsilon_{\mathrm{A}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \longrightarrow$$

$$x_{\mathrm{A}} = 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 \qquad (1)$$

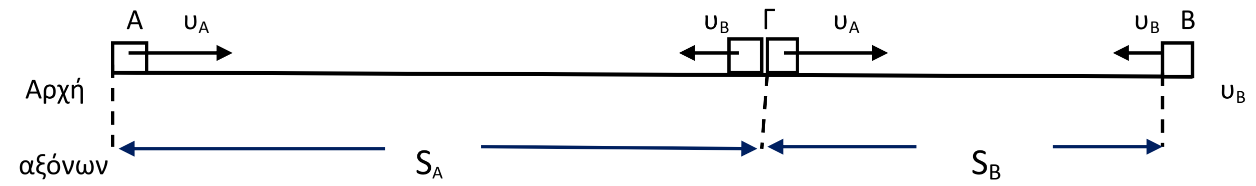
Για το κινητό Β έχουμε :

$$\overrightarrow{\Delta x_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{B}}} \cdot \Delta t \longrightarrow \overrightarrow{x_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overrightarrow{x_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{\upsilon_{\mathrm{B}}} \cdot t \xrightarrow{\to +} x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} = -\upsilon_{\mathrm{B}} \cdot t \xrightarrow{x_B = (AB) = 300} x_{\mathrm{A}} - 300 = -10 \cdot t$$

$$\longrightarrow x_{\mathrm{A}} = 300 - 10 \cdot t \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) λύνουμε το πρόβλημα.

$2^{ος}$ τρόπος



Σχήμα 2

Για το κινητό Α έχουμε : $S_{\mathrm{A}} = \upsilon_{\mathrm{A}} \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \longrightarrow S_{\mathrm{A}} = 20 \cdot t + \frac{1}{2} 2 \cdot t^2$ (1)

Για το κινητό Β έχουμε : $S_B = \upsilon_B \cdot t \longrightarrow S_B = 10 \cdot t$ (2)

Από το Σχήμα 2 διαπιστώνουμε ότι : $S_{\mathrm{A}} + S_{\mathrm{B}} = (\mathrm{AB})$ και συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις λύνουμε το πρόβλημα.

Παρατήρηση

Πρόβλημα συνάντησης δύο κινητών με διαφορετική χρονική στιγμή εκκίνησης.

Αν κάποιο από τα δύο κινητά ξεκινά αργότερα κατά π.χ 2sec , τότε καθορίζουμε για το κινητό που ξεκινά την t=0 ότι κινήθηκε για χρονικό διάστημα Δt_1=t, οπότε το δεύτερο κινητό που ξεκίνησε αργότερα θεωρούμε ότι κινήθηκε για χρονικό διάστημα Δt_2=t-2 .

Έτσι για το δεύτερο κινητό θα αντικαθιστούμε όπου t το (t-2) σε όσους τύπους αφορούν την κίνησή του.