

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

A) ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1) Οι αριθμοί 0,1,2,3,4,...,2102,2103,2104,... ονομάζονται φυσικοί. (Στα αγγλικά natural numbers).

2) Οι φυσικοί χωρίζονται στους:

α) Άρτιους (ή ζυγούς) που είναι τα πολλαπλάσια του αριθμού 2: 0,2,4,6,8,10,12,14,... και

β) Περιττούς (ή μονούς) που δεν είναι τα πολλαπλάσια του 2: 1,3,5,7,9,11,13,....

3) Οι αριθμοί μπορούν να συγκριθούν με τα σύμβολα $< = >$. Η σύγκριση των αριθμών λέγεται και διάταξη. Έτσι π.χ. ισχύει $7 < 9$, $125 > 89$, $2 < 8 < 17$ κλπ. Να θυμάστε ότι

εδώ γράφομε τον **μικρότερο** $\longrightarrow < \longleftarrow$ από δω γράφομε το **μεγαλύτερο**.

4) Σε ένα αριθμό φυσικό κάθε ψηφίο αντιστοιχεί σε μονάδες ή δεκάδες κλπ. Έτσι π.χ. ο αριθμός 23.407 αποτελείται από 7 μονάδες , 0 δεκάδες, 4 εκατοντάδες, 3 χιλιάδες, και 2 δεκάδες χιλιάδες.

5) Είναι συνηθισμένο οι αριθμοί να αναπαριστώνται γραφικά με τη βοήθεια άξονα:

0 1 2 4 5 6

B) ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛ/ΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1) Στην πρόσθεση $7 + 5 = 12$ το 7 και το 5 λέγονται **προσθετέοι** ενώ το 12 **άθροισμα τους**.

2) Ιδιότητες της πρόσθεσης:

ΚΑΝΟΝΑΣ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$	$7 + 0 = 7$, $0 + 234 = 234$
αντιμεταθετικότητα: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$7 + 5 = 12$ αλλά και $5 + 7 = 12$
προσεταιριστικότητα $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$28 + 22 + 6 = (28 + 22) + 6 = 50 + 6 = 56$

3) Η αφαίρεση γίνεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης:

$$16 - 7 = 9 \text{ διότι } 16 = 9 + 7 \text{ και γενικά}$$

$$M - A = \Delta \text{ διότι } M = \Delta + A$$

(M= Μειωτέος , A= Αφαιρετέος , Δ= Διαφορά των αριθμών)

4) Ιδιότητες πολ/σμού:

ΚΑΝΟΝΑΣ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$	$8 \cdot 1 = 8$, $1 \cdot 87 = 87$
(η σκούπα του πολ/σμού) $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 5 = 0$, $91 \cdot 0 = 0$
(αντιμεταθετική ιδ.) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	$7 \cdot 8 = 8 \cdot 7 = 56$
(προσεταιριστική) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	$2 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 5) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$
επιμεριστική $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	$25 \cdot 7 + 25 \cdot 9 + 25 \cdot 4 = 25(7 + 9 + 4) = 25 \cdot 20 = 500$
επιμεριστική $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$	$512 \cdot 23 - 512 \cdot 22 = 512(23 - 22) = 512 \cdot 1 = 512$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Χρησιμοποιήστε τις επιμεριστικές ιδιότητες $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$, $\alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta - \gamma)$

για να απλοποιήσετε τις παράστασεις:

α) $77 \cdot 18 + 77 \cdot 52 + 77 \cdot 30$

β) $567 \cdot 3 + 567 \cdot 28 + 567 \cdot 19$

γ) $123 \cdot 57 - 123 \cdot 17$

δ) $78 \cdot 12 + 48 \cdot 78$

ε) $456 \cdot 134 + 67 \cdot 456 - 456 \cdot 201$

στ) $5 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha + 8 \cdot \alpha$ (το α είναι κάποιος αριθμός που απλά δεν τον ξέρομε για την ώρα, στα μαθηματικά τον λέμε **μεταβλητή**)

ζ) $18 \cdot \alpha + 34 \cdot \alpha - 12 \cdot \alpha + 7 \cdot \alpha$

η) $5 \cdot \chi + 4 \cdot \chi + 7 \cdot \chi - 6 \cdot \chi - 10 \cdot \chi$

θ) $9 \cdot \mu + 6 \cdot \mu - 5 \cdot \mu - \mu$ (ΘΥΜΙΖΩ ΟΤΙ $1 \cdot \mu = \mu \dots$)

ι) $7 \cdot \kappa - 2 \cdot \kappa - 4 \cdot \kappa + 6 \cdot \kappa$

2) Με χρήση της επιμεριστικής

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

κάντε πράξεις κι απλοποιήστε τις παραστάσεις όσο είναι δυνατόν

α) $3 \cdot (\alpha + 2)$

β) $5 \cdot (\alpha + 1) - 5$

γ) $7 \cdot (\beta + 3) - 21$

δ) $2 \cdot (\alpha + \beta + 3) - 6$

ε) $4 \cdot (\alpha + \beta) - 4 \cdot \alpha$

3) Ξέρομε ότι δυο φυσικοί αριθμοί α , β , έχουν άθροισμα 50. Δηλαδή για τους α , β ισχύει:

$$\alpha + \beta = 50$$

Μπορείτε να υπολογίσετε με ποιο αριθμό ισούται η παράσταση:

α) $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$

β) $5 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta$

γ) $2 \cdot \alpha + \alpha + 3 \cdot \beta$

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1) α) Υπολογίστε τους παρακάτω αριθμούς Α, Β, Γ όπου είναι:

$$A = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} - \frac{5}{4}, \quad B = \frac{2}{3} + \frac{5}{12} + \frac{7}{9} - 1, \quad \Gamma = 5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right).$$

β) Διατάξτε τους αριθμούς Α, 1, Β, 2 και Γ.

2) Αποδείξτε ότι οι αριθμοί Α, Β είναι ίσοι, όπου:

$$A = 3 + \frac{5}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad B = 5 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{6}{8}\right)$$

3) Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot 3 - \frac{3}{4} : \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \quad (\beta) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) : \left(2 - \frac{5}{7} : \frac{3}{7}\right) \quad (\gamma) \frac{\frac{7}{12} + 2 \cdot \frac{5}{4}}{\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}}$$

4) Δικαιολογήστε ότι οι αριθμοί $\alpha = 2 - \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

5) Λύστε τις εξισώσεις: (α) $\frac{3}{x} = \frac{2}{66}$ (β) $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$

6) Έστω α, β φυσικοί αριθμοί με $\alpha > 10$. Διατάξτε τα κλάσματα:

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha+5}{\beta}, \quad \frac{\alpha-3}{\beta}, \quad \frac{\alpha-8}{\beta}, \quad \frac{\alpha+12}{\beta}$$

7) Έστω α, β φυσικοί αριθμοί με $\beta > 10$. Διατάξτε τα κλάσματα:

$$\frac{\alpha}{\beta-4}, \quad \frac{\alpha}{\beta+5}, \quad \frac{\alpha}{\beta-6}, \quad \frac{\alpha}{\beta+25}$$

ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟ $\frac{\alpha}{\beta}$ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ Α ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΟ ΠΟΛ/ΣΜΟ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot A$

8) Για να γίνει μια ολόημερη εκδρομή πρέπει να συμμετέχουν τουλάχιστον τα $\frac{3}{4}$

της τάξης. Αν στην Α' τάξη είναι 144 μαθητές πόσοι πρέπει να συμμετάσχουν για να γίνει η εκδρομή;

9) Η Μαρία πήγε στα Χανιά για ψώνια έχοντας μαζί της 160 ευρώ. Αγόρασε με τα $\frac{7}{32}$ των χρημάτων της δώρο για τον αδελφό της και με τα $\frac{3}{8}$ των χρημάτων της παπούτσια για αυτήν (α) Τι λεφτά έδωσε για τον αδελφό της; (β) Τι λεφτά ξόδεψε για τα παπούτσια της; (γ) Πόσα της περίσσεψαν;

10) Ο κ. Γιώργος έχει 32.000 ευρώ στην τράπεζα. Λόγω αναγκών του 'σήκωσε' τα $\frac{5}{16}$ των χρημάτων που είχε στην τράπεζα. Από τα λεφτά που σήκωσε έδωσε τα $\frac{5}{8}$ για αγορά εμπορευμάτων στην επιχείρηση του. Έδωσε 450 ευρώ στο γιο του δώρο. Από αυτά που του περισσέψανε έδωσε τα $\frac{7}{11}$ για αγορά μιας μοτοσυκλέτας. (α) Πόσα λεφτά έδωσε για αγορά εμπορευμάτων; (β) Τι λεφτά έδωσε για την αγορά της μηχανής;

11) Ένα θέατρο χωράει 450 θεατές. Το παιδικό εισιτήριο είναι 8 ευρώ και των ενηλίκων είναι 12.

Σήμερα το $\frac{1}{6}$ του θεάτρου γέμισε από ενήλικες και τα $\frac{3}{5}$ του θεάτρου από παιδιά. (α) Τι εισπράξεις έκανε σήμερα το θέατρο; (β) Πόσες καρέκλες έμειναν άδειες στο θέατρο;

ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΑ $\frac{\alpha}{\beta}$ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ Δ ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ:

$$\text{ΜΕΓΕΘΟΣ} = \Delta : \frac{\alpha}{\beta}$$

12) Τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων μου είναι 50 ευρώ. Πόσα λεφτά έχω συνολικά;

13) Σε μια τούρτα του ζαχαροπλαστείου < Ο Γλυκούλης > τα $\frac{3}{5}$ είναι κρέμα σοκολάτα και τα $\frac{2}{5}$ παντεσπάνι. Σε μια τούρτα το παντεσπάνι ζυγίζει 420 γραμμάρια. Πόσο ζυγίζει όλη η τούρτα;

14) Ένα μπουκάλι νερού είναι γεμάτο κατά τα $\frac{5}{7}$ και ζυγίζει μαζί με το μπουκάλι 220 γραμμάρια.

Αν το άδειο μπουκάλι ζυγίζει 20 γραμμάρια, πόσο θα ζυγίζει όταν είναι γεμάτο;

15) Τα $\frac{3}{4}$ των μαθητών ενός σχολείου είναι 240 μαθητές. Πόσοι μαθητές είναι τα $\frac{4}{5}$ του σχολείου;

16) Έδωσα τα $\frac{3}{7}$ των χρημάτων μου για αγορά ενός ρολογιού. Τα $\frac{2}{5}$ από τα λεφτά που περίσσεψαν είναι 64 ευρώ. Πόσα λεφτά είχα αρχικά;



17) Μια δεξαμενή γεμίζει από 3 βρύσες. Η Α βρύση σε 1 ώρα γεμίζει το $\frac{1}{18}$ της δεξαμενής η Β βρύση γεμίζει σε 1 ώρα τα $\frac{3}{40}$ της δεξαμενής και η Γ σε 1 ώρα γεμίζει τα $\frac{7}{120}$ της δεξαμενής. Ανοίξαμε την Α για 3 ώρες την Β για 5 ώρες και την Γ για 6 ώρες. Κατόπιν μετρήσαμε την στάθμη του νερού και διαπιστώσαμε ότι για να γεμίσει χρειάζεται 104 κιλά νερού. Βρείτε πόσα κιλά νερό χωράει γεμάτη η δεξαμενή;

ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΟ ΚΑΝΟΝΑ

$$\text{κλάσμα} = \frac{\text{μερικό μέγεθος}}{\text{Ολικό μέγεθος}}$$

18) Στο 6^ο Γυμνάσιο η Α' τάξη είναι 120 μαθητές η Β' τάξη 160 και η Γ' τάξη 140. Το τμήμα Α2 αποτελείται από 20 μαθητές. α) Τι κλάσμα της Α' τάξης είναι το Α2; β) Τι κλάσμα όλου του 6^{ου} Γυμνασίου είναι το Α2;

19) Στη γιορτή του ο Κώστας από μία τούρτα 1400 γραμμαρίων έφαγε τα 280. Τι μέρος (κλάσμα) της τούρτας έφαγε;

20) Για να αγοράσει ένα εργαλείο για τη δουλειά του ο Νίκος έδωσε τα $\frac{2}{5}$ από τα 200 ευρώ που είχε μαζί του κι επιπλέον άλλα 20 ευρώ. Τι κλάσμα των χρημάτων που είχε πλήρωσε;

21) Ο κ Νίκος μοίρασε στα 3 παιδιά του το ποσό των 480 ευρώ ως εξής. Στη κόρη του Μαρία έδωσε τα $\frac{3}{8}$ και 20 ευρώ επιπλέον. Στο γιο του Σήφη τα $\frac{3}{10}$ αυτών που περίσσεψαν και 30 ευρώ επιπλέον.

Τέλος στο γιό του Κώστα τα υπόλοιπα. α) Πόσα λεφτά πήρε ο Κώστας; β) Τι κλάσμα των 480 ευρώ πήρε ο Κώστας;

ΑΝ ΑΠΟ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ $\frac{\alpha}{\beta}$ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΠΑΡΟΥΜΕ ΤΑ $\frac{\gamma}{\delta}$ ΑΥΤΟΥ ΤΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ ΠΑΡΕΙ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$ ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΜΕΓΕΘΟΣ

22) Τι κλάσμα είναι τα $\frac{2}{5}$ του $\frac{1}{6}$ ενός μεγέθους ;

23) Τι κλάσμα είναι τα $\frac{3}{7}$ των $\frac{5}{9}$ ενός μεγέθους ;

24) Τι κλάσμα είναι τα $\frac{3}{7}$ των $\frac{2}{9}$ του $\frac{1}{3}$ ενός μεγέθους ;

25) Ο Πέτρος πήρε στην τσάντα του το $\frac{1}{3}$ των μαρκαδόρων που έχει. Το μεσημέρι επέστρεψε στο σπίτι του μόνο τα $\frac{3}{4}$ των μαρκαδόρων που είχε πάρει μαζί του. Μετρώντας όλους τους μαρκαδόρους το μεσημέρι στο σπίτι του τους βρήκε 44. Πόσους μαρκαδόρους είχε το πρωί;

26) Από τους 400 μαθητές του 6^{ου} Γυμνασίου τα $\frac{5}{8}$ πήγαν εκδρομή με το λεωφορείο. Από αυτούς που πήγαν εκδρομή τα $\frac{2}{9}$ κρατούσαν μαζί τους κολατσιό. α) Τι κλάσμα του 6^{ου} γυμνασίου πήγε με κολατσιό στην εκδρομή με το λεωφορείο; Πόσοι μαθητές ήταν αυτοί;

27) Κυρία αγόρασε τα $\frac{5}{9}$ ενός τοπιού υφάσματος . Το $\frac{1}{4}$ του υφάσματος που αγόρασε το έδωσε για φόρεμα. Το υπόλοιπο ύφασμα το χώρισε σε 2 ίσα μέρη. Το κάθε μέρος από τα ίσα ήταν 15 μέτρα. α) Πόσα μέτρα ήταν όλο το τόπι ύφασμα; β) Αν για το ύφασμα πλήρωσε 128 ευρώ πόσο στοιχίζει το κάθε μέτρο ύφασμα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥΣ

28) Δυο τεμάχια υφάσματος , που έχουν το ίδιο μήκος , αξίζουν το α΄ 8480 ευρώ , και το β΄ 7526 ευρώ. Αν το ένα μέτρο υφάσματος του α΄ είναι ακριβότερο κατά 18 ευρώ από ότι το ένα μέτρο του β΄ , βρείτε: α) Πόσα μέτρα ήταν το κάθε ύφασμα. β) Ποια η τιμή του κάθε μέτρου υφάσματος.
(εξετάσεις ΑΣΔΥ 1973- προσαρμοσμένο σε ευρώ)

29) Παραγωγός έχασε από τη θεομηνία τα $\frac{7}{20}$ της σοδειάς του. Έτσι του περίσσεψαν 390 κιλά που τα πούλησε και εισέπραξε 731.250 δραχμές. Εάν δεν είχε συμβεί η θεομηνία θα πουλούσε όλη τη

σοδειά του κατά 350 δραχμές το κιλό φθηνότερα . Πόσα λεφτά έχασε συνολικά λόγω της θεομηνίας;
(εξετάσεις για την Εθνική Τράπεζα 1994)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ 2

1) Ένα σακί άμμου ζυγίζει 50 κιλά .α) Πόσο ζυγίζει το $\frac{1}{5}$ αυτού;

β) Πόσο ζυγίζουν τα $\frac{14}{20}$ του σακιού;

2) Το $\frac{1}{8}$ μιας σοκολάτας ζυγίζει 25 γραμμάρια..α) Πόσο ζυγίζει

όλη η σοκολάτα; β) Πόσο ζυγίζουν τα $\frac{5}{8}$ αυτής;

3) Σε μια κοινότητα τα $\frac{2}{7}$ είναι μαθητές το $\frac{1}{7}$ είναι παιδιά προσχολικής ηλικίας και οι υπόλοιποι είναι ενήλικες . Αν οι ενήλικες είναι 312 να βρεθεί πόσα παιδιά πάνε σχολείο και πόσα δεν πάνε.

4) Ένα μαγαζί που πουλάει CDs κάνει έκπτωση κατά το $\frac{1}{10}$ της αρχικής τιμής του κάθε CD. α) Ένα CD του Ξυλούρη έχει αρχική τιμή 24 €. Πόσο θα πουληθεί με την έκπτωση;

β) Ένα CD των Ημισκούμπρια πωλήθηκε με την έκπτωση 27€. Ποια ήταν η αρχική του τιμή;

5) Σε κατάστημα υφασμάτων περίσσεψε από ένα τόπι ύφασματα $\frac{2}{15}$ του τοπιού..Για να το πουλήσει έκανε έκπτωση τα $\frac{3}{5}$ της τιμής του οπότε και το πούλησε 16€. Πόσο στοιχίζει όλο το τόπι χωρίς έκπτωση;

6) Ο αριθμός α είναι μονοψήφιος φυσικός. Το κλάσμα $\frac{12}{\alpha}$ είναι ανάγωγο. Βρείτε τις δυνατές τιμές του α.



7) Στο 6^ο Γυμνάσιο τα $\frac{3}{5}$ είναι τα αγόρια. Από τα αγόρια τα $\frac{3}{11}$ έχουν γαλάζια μάτια ενώ από τα κορίτσια τα $\frac{5}{11}$ έχουν γαλανά μάτια. Ο καθηγητής κ. Περίεργος παρατηρήσε ότι οι γαλαζομάτες είναι κατά 6 περισσότερες από τους γαλαζομάτηδες. Βρείτε πόσοι περισσότεροι είναι οι μη γαλαζομάτες από τις μη γαλαζομάτες.

8) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-5}{7}=0 \quad \beta) \frac{x-5}{7}=1 \quad \gamma) \frac{42+x}{55}=1 \quad \delta) \frac{x \cdot 7}{7}=5 \quad \epsilon) \frac{8-x}{5}=0$$

9) Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

$$10/4 \quad 21/7 \quad 35/42 \quad 2/10 \quad 10/2 \quad 100/300 \quad 25/100 \quad 36/16$$

10) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{3} = \frac{5}{15} \quad \beta) \frac{4}{3} = \frac{12}{k} \quad \gamma) \frac{9}{7} = \frac{a}{21}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1) ΣΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ , ΓΡΑΨΤΕ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΕΚΦΡΑΖΕΙ ΤΟ ΚΑΘΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΛΥΣΤΕ ΤΗΝ.

Α) Βρείτε τον αριθμό που αμα προστεθεί στο 38 δίνει αποτέλεσμα 114.

Β) Αμα από ένα αριθμό αφαιρέσουμε το 18 παίρνουμε το 62.

Γ) Το άθροισμα ενός αριθμού με το τετραπλάσιο του κάνει 160.

Δ) Το άθροισμα ενός αριθμού με το διπλάσιο του ισούται με το τετραπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 22.

Ε) Το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 16 ισούται με 17.

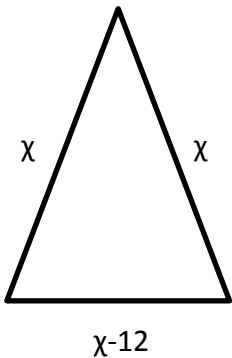
ΣΤ) Βρείτε ένα φυσικό αριθμό που αμα τον προσθέσω με τον αμέσως μεγαλύτερό του παίρνω αποτέλεσμα 111.

Ζ) Αμα προσθέσω ένα αριθμό με τον κατά 5 μεγαλύτερό του παίρνω αποτέλεσμα 157.

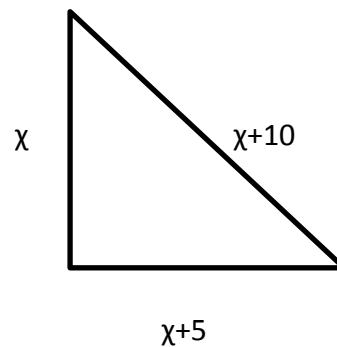
Η) Αμα προσθέσω το διπλάσιο ενός αριθμού με τον κατά 2 μονάδες μικροτερό του παίρνω αποτέλεσμα 97.

2) Στα παρακάτω σχήματα βρείτε το χ

α)



β)



Το τρίγωνο έχει περίμετρο 147 cm.

Το τρίγωνο έχει περίμετρο 60cm.

3) Στα παρακάτω ερωτήματα εξεταστε αν οι αριθμοί που σας δίνονται είναι λύσεις της εξίσωσης:

Α) $5 \cdot \chi - 12 = 123$ για $\chi = 23$ και για $\chi = 27$

Β) $\chi^2 + 3 \cdot \chi - 10 = 0$ για $\chi = 2$ και για $\chi = 4$

Γ) $\chi^3 + 11 \cdot \chi - 6 \cdot \chi^2 = 6$ για $\chi = 1$, $\chi = 2$ και για $\chi = 3$

Δ) $1 + \frac{1}{\chi-1} = \frac{36}{\chi-1} - 6$ για $\chi = 6$

Ε) $6 \cdot \chi^2 - 5 \cdot \chi + 1 = 0$ για $\chi = \frac{1}{2}$ και για $\chi = \frac{1}{3}$.

4) Και μια σπαζοκεφαλιά . Βάλτε στο μυαλό σας ένα αριθμό. Προσθέστε το 5. Από το αποτέλεσμα που βρήκατε αφαιρέστε το μισό του. Πολλαπλασιάστε αυτό που βρήκατε με το 6. Προσθέστε στο αποτέλεσμα το 5. Τέλος αφαιρέστε από το νέο αποτέλεσμα το τριπλάσιο του αριθμού που είχατε βάλει αρχικά στο μυαλό σας. Αφήστε να μαντέψω. Προκύπτει ο αριθμός που θα θέλατε να χετε σε όλα τα μαθήματα δηλαδή 20!! Μαγικό? Γράψτε την εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα αυτό. Μην προσπαθήσετε να την λύσετε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

1) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

- 1) Κατάθεσε κάποιος 30.000 € για ένα χρόνο με επιτόκιο 4%. Τι τόκο θα πάρει μετά από 1 χρόνο; Ποιο θα είναι το κεφαλαιό του τότε;
- 2) Κατάθεσε κάποιος 20.000 € στην τράπεζα Α με επιτόκιο 3,5% και άλλες 25.000 στην τράπεζα Β με επιτόκιο 4% για ένα χρόνο. Όταν έκλεισε χρόνος από την ημέρα κατάθεσης σκέφτηκε να σηκώσει τους τόκους και από τις δυο τράπεζες για να πάρει στην συζυγό του δώρο ένα κόσμημα αξίας 1850 €. Του φτάνουν οι τόκοι που σήκωσε από τις τράπεζες; Αν όχι βρείτε τι χρήματα πρέπει να βάλει επιπλέον για να πάρει το κομμάτι.
- 3) Κατάθεσε κάποιος 18.000€ σε μια τράπεζα με επιτόκιο 2,5% για 5 μήνες . Στη συνέχεια σήκωσε όλο το κεφάλαιο μαζί με τους τόκους. Πόσα λεφτά σήκωσε;
- 4) Ένας άνθρωπος σκέφτεται σε ποια από τις τράπεζες Α και Β να καταθέσει τα χρήματά του (50.000€). Η Α τράπεζα προσφέρει επιτόκιο 5% για όλο το χρόνο. Η Β τράπεζα προτείνει 2,5% επιτόκιο ανά εξάμηνο και ανακεφαλαίωση των τόκων ανά εξάμηνο. Ποιο θα είναι το κεφάλαιο του μετά από 1 χρόνο σε κάθε τράπεζα , ποια τον συμφέρει;
- 5) Κάποιος καταθέτει κάποιο ποσό με επιτόκιο 3,5% για ένα χρόνο . Οι τόκοι που εισέπραξε ήταν 490 €. Τι κεφάλαιο είχε καταθέσει;
- 6**) Κάποιος καταθέτει κάποιο ποσό με επιτόκιο 5% για ένα χρόνο . Μετά από ένα χρόνο συνολικά είχε στην τράπεζα 19.425 €. Τι κεφάλαιο είχε καταθέσει;
- 7) Κάποιος καταθέτει 18000 € για ένα χρόνο και μετά από 1 χρόνο το κεφάλαιο του είχε γίνει 18.540 €. Τι επιτόκιο είχε η τράπεζα;
- 8) Κάποιος καταθέτει για 3 χρόνια 20.000€ σε μια τράπεζα με επιτόκιο 3%. Τι λεφτά θα 'χει στην τράπεζα στο τέλος του τρίτου χρόνου;

2) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΠΑ

- 1) Κάποιος αγόρασε ηλεκτρικά είδη αξίας 1200€ χωρίς ΦΠΑ. Αν το ΦΠΑ για τα ηλεκτρικά είδη είναι 23% τι λεφτά θα πληρώσει;
- 2) Κάποιος αγόρασε τρόφιμα αξίας 32€ και ποτά αξίας 24€ χωρίς ΦΠΑ. Αν το ΦΠΑ για τρόφιμα είναι 13% και για τα ποτά 23% τι λεφτά θα πληρώσει στο ταμείο;
- 3**) Μια τηλεόραση στοιχίζει μαζί με το ΦΠΑ 23% 615€. Ποια η αξία της τηλεόρασης χωρίς το ΦΠΑ;
- 4) Ένα ψυγείο χωρίς το ΦΠΑ 23% κοστίζει 750 €. Κάποιος το αγόρασε και συμφώνησε να δώσει αρχικά με την παράδοση του ψυγείου το 50% της αξίας του και όλο το ΦΠΑ. Τα υπόλοιπα χρήματα θα τα πλήρωνε σε 3 μηνιαίες δόσεις. Βρείτε τι λεφτά θα πλήρωνε σε κάθε δόση και αρχικά κατά την παράδοση.

3) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ – ΑΥΞΗΣΕΩΝ

- 1) Αγόρασε η Μαρία ρούχα αρχικής αξίας 75 €. Η έκπτωση που κάνει το κατάστημα είναι 40%. Τι λεφτά θα πληρώσει τελικά η Μαρία;
- 2) Ο Γιώργος στις εκπτώσεις αγόρασε ένα τζίν αρχικής αξίας 84€ με έκπτωση 20% κι ένα φούτερ αρχικής αξίας 55 € με έκπτωση 40%. Τι λεφτά θα πληρώσει τελικά;
- 3) Ο Κώστας αγόρασε ένα φούτερ αρχικής αξίας 65 € . Στο ταμείο πλήρωσε 39 € . Τι ποσοστό έκπτωσης του κάνανε;

4) Ο μισθός του Γιώργου είναι 850 €. Επειδή πήρε προαγωγή θα του αυξηθεί ο μισθός κατά 12%. Ποιος θα είναι ο νέος του μισθός;

5) Ο Γιώργος το 2011 έπαιρνε μισθό 1080 € και το 2012 παίρνει μισθό 1112,40 €. Τι ποσοστό αύξησης μισθού του έγινε;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΕΙΞΗΣ

1) Μια σοκολάτα βάρους 65 γρ. έχει περιεκτικότητα 55% σε κακάο. Πόσο κακάο περιέχει;

 2) Ένας χημικός αναμιγνύει 500 γρ διαλύτη με 1000 γρ. καθαρού οινόπνευματος για να φτιάξει μια λοσιον καθαρισμού. α) Τι περιεκτικότητα σε οινόπνευμα έχει η λοσιόν που παρασκευάζει; β**) Πρόκειται να φτιάξει 1000 φιαλίδια από τη λοσιόν αυτή καθαρού βάρους 120 γρ. Αυτός αγοράζει το διαλύτη προς 2 € το κιλό, το καθαρό οινόπνευμα προς 12 € το κιλό και επιπλέον το κόστος συσκευασίας ανα μπουκάλι έχει υπολογίσει ότι του στοιχίζει 30 λεπτά. Αποφάσισε να πουλήσει κάθε μπουκαλάκι προς 2,20 €. Τι κέρδος θα βγάλει αν τα πουλήσει όλα;

3) Σε μια κατσαρόλα έχουμε φτιάξει αλατόνερο βάρους 2500 γραμ.με περιεκτικότητα σε αλάτι 4%. Βάλαμε να βράσει το αλατόνερο οπότε εξατμίστηκαν 200 γραμ. νερού (όλο το αλάτι παρέμεινε στην κατσαρόλα) . Ποια είναι τώρα η % περιεκτικότητα σε αλάτι;

4) Ένα κρασί έχει περιεκτικότητα σε αλκόολ 12%. α) Ένα κιλό από αυτό το κρασί (1000 γραμμάρια) πόσα γραμμάρια αλκοόλης περιέχει; β) Αναμιγνύουμε 1200 γρ. από το παραπάνω κρασί με 800 γρ από άλλο κρασί περιεκτικότητας 17%. Βρείτε την περιεκτικότητα σε αλκόολη του μείγματος που φτιάξαμε.

** Τα προβλήματα με 2 αστερισκούς μπορούν να λυθούν στο κεφάλαιο των αναλόγων ποσών απλούστερα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ (II)

 1) Τα Χανιά το 1980 είχαν πληθυσμό 50.000 κατοίκους. Μέχρι το 1960 ο πληθυσμός τους είχε αυξηθεί κατά 12% . Από το 1960 μέχρι το 1990 ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά 30% . Από το 1990 μέχρι το 2012 ,τέλος, ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά 24%. α) Να βρεθεί ο πληθυσμός των Χανίων το 2012. β) Από το 1960 ως το 2012 τι ποσοστιαία αύξηση έγινε στον πληθυσμό των Χανίων;

 2) Ένα κινητό που εισάγεται από την Κίνα στοιχίζει αρχικά 40 €. Ο αντιπρόσωπος που το εισάγει το μεταπωλεί με κέρδος 45%. Το κατάστημα το πουλάει με κέρδος 40% επί της τιμής που το αγόρασε από τον αντιπρόσωπο. Τέλος επί της τιμής πώλησης μπαίνει ΦΠΑ 23%. Σε τι τιμή το αγοράζει ο καταναλωτής το συγκεκριμένο κινητό; Πόσο % αυξήθηκε η τιμή του κινητού ως προς την τιμή που είχε όταν εισάχθηκε από την Κίνα;

3) Το σιτάρι κατά την αλεσή του χάνει το 20% του βάρους του. Στην συνέχεια το αλεύρι όταν ζυμώνεται αυξάνει το βάρος του κατά 50%. Τέλος όταν ψήνεται το ζυμάρι χάνει το 20% του βάρους του. Με 4000 κιλά σιτάρι πόσο ψωμί μπορούμε να παρασκευάσουμε;

4) Το Ρέθυμνο έχει σήμερα 43.600 κατοίκους. Από 2000 ως σήμερα ξέρουμε ότι η αύξηση του πληθυσμού είναι 20% . Ποιος ο πληθυσμός του Ρεθύμνου το 2000;

5) Ο κ. Νίκος καταθέτει στην τράπεζα Α ένα ποσό με επιτόκιο 4%. Την ίδια μέρα καταθετεί στην τράπεζα Β τα διπλάσια χρήματα με επιτόκιο 6% . Μετά από ένα χρόνο εισέπραξε και από τις δυο τράπεζες τόκους + κεφάλαιο 142.200 €. Τι λεφτά είχε καταθέσει σε κάθε τράπεζα;

6) Έμπορος πουλάει (χωρίς ΦΠΑ) ένα κινητό στην τιμή των 126 € κι έτσι βγάζει κέρδος 40%. Επειδή δεν κατάφερε να το πουλήσει αποφάσισε να ρίξει το ποσοστό κέρδους του στο 22%. Σε τι τιμή θα το πουλήσει τώρα χωρίς το ΦΠΑ;

7) Έμπορος προϊόν που το αγόρασε 36 € αποφάσισε να το πουλήσει με κέρδος 60%. Στις εκπτώσεις μείωσε την αναγραφόμενη τιμή στην βιτρίνα κατά 30%. α) Τι τιμή το πουλάει τώρα; β) Τι κέρδος βγάζει τώρα σε σχέση με την τιμή αγοράς; (Μην λάβετε υπόψιν το ΦΠΑ σε αυτό το πρόβλημα).

8) Στο 6^ο Γυμνάσιο για την φετινή σχολική χρονιά ισχύουν τα παρακάτω:
Απαντήστε στα παρακάτω:

α) Πόσους μαθητές έχει το 6^ο Γυμνάσιο; β) Ποιο το ποσοστό των κοριτσιών στο σχολείο; γ) Ποιο το ποσοστό των αγοριών της Α΄τάξης ως το σύνολο των μαθητών της Α΄τάξης; δ) γ) Ποιο το ποσοστό των αγοριών Α΄τάξης ως προς το σύνολο των μαθητών του 6^{ου} Γυμνασίου;

	Αγόρια	Κορίτσια
Α΄Γυμνασίου	78	66
Β΄Γυμνασίου	75	82
Γ΄Γυμνασίου	65	68

προς
της



9) Κάποιος κατέθεσε 50.000 € με 5% επιτόκιο και μετά από 4 χρόνια κατέθεσε 125.000 € με 4% επιτόκιο. Αν γνωρίζετε ότι δεν υπάρχει ανατοκισμός (δηλαδή ο τόκος κάθε χρόνο για κάθε κεφάλαιο είναι ο ίδιος) βρείτε πότε οι τόκοι των δύο κεφαλαίων θα γίνουν ίσοι. (ΙΩΝΙΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ 1973)



10) Έμπορος πουλάει ύφασμα με ζημιά 15% (επί της τιμής που το αγόρασε). Αν το πούλαγε 18 € ακριβότερα θα κέρδιζε 15% (επί της τιμής που το αγόρασε). Πόσο είχε αγοράσει το μέτρο το ύφασμα; (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΥΜΝ. ΑΘΗΝΩΝ 1976)



11) Οι άρρενες μαθητές της Α΄τάξης όλων των γυμνασίων της Ελλάδας κατά το σχολικό έτος 1969-70 ήταν το 60% όλων των μαθητών της Α΄τάξης. Από τους άρρενες μαθητές το 10% έμεινε μεταξιστάν. Αν προβιβάστηκαν στη Β΄Γυμνασίου μόνο 96579 άρρενες να βρείτε το σύνολο των μαθητριών της Α΄ Γυμνασίου (ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ 1970)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ

- 1) Με 52,8 ευρώ αγοράζουμε 24 κιλά ρύζι. Με 110 ευρώ πόσα κιλά ρύζι αγοράζουμε; (Απ. 50)
- 2) Με 45 κιλά αλεύρι ένας φούρναρης φτιάχνει 54 κιλά ψωμί. Με 120 κιλά αλεύρι πόσα κιλά ψωμί φτιάχνει; (Απ. 144)
- 3) 9 εργάτες εργαζόμενοι για 8 ημέρες εισπράττουν για αμοιβή 2160 ευρώ. Αν εργαστούν 20 εργάτες για 7 ημέρες τι λεφτά θα εισπράξουν; (Απ. 4200)
- 4) Αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα διανύει την απόσταση Χανιά- Ρέθυμνο σε 40 λεπτά που είναι 58 χιλιόμετρα. Πόση ώρα θα του χρειαστεί για την απόσταση Ρέθυμνο- Ηράκλειο που είναι 87 χιλιόμετρα; (60 λεπτά)
- 5) Σε πολυκατάστημα όλα τα είδη έχουν έκπτωση 30%. Αν αγοράσουμε είδη αρχικής αξίας 350 ευρώ τι έκπτωση θα έχουμε και τι λεφτά θα πληρώσουμε; (Απ. 105, 245)
- 6) Για ένα ρούχο σε εκπτώσεις 25% πληρώσαμε (μετά την έκπτωση) 66 ευρώ. Ποια ήταν η αρχική του τιμή; (Απ. 88)
- 7) Σε κάθε προϊόν που αγοράζουμε πληρώνουμε και ΦΠΑ 19%. Αγοράσαμε μια δερμάτινη τσάντα και πληρώσαμε 249,90 ευρώ. Πόσα ευρώ ήταν το ΦΠΑ που πληρώσαμε και ποια η αξία της τσάντας χωρίς το ΦΠΑ; (Απ. 39,90 210)
- 8) Σε ένα συνεργείο αυτοκινήτων τα εργατικά για την επισκευή αυτοκινήτου είναι 120 ευρώ. Θα κοπεί απόδειξη στην οποία θα προστεθεί και ΦΠΑ 19%. Πόσα λεφτά θα πληρώσει τελικά ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου αν επιπλέον πληρώσει και 300 ευρώ για τα ανταλλακτικά; (Απ. 442,8)
- 9) Δημόσιος υπάλληλος το 2008 έπαιρνε μισθό 1100 ευρώ. Την 1-1-09 του έγινε αύξηση 4% (τιμαριθ- μική αναπροσαρμογή). Στις 1-3-2009 άλλαξε μισθολογικό κλιμάκιο οπότε του ξανάγινε αύξηση 7% στο νέο μισθό που έπαιρνε το 2009. α) Ποιος είναι ο τελικός μισθός που παίρνει; β) Ποια είναι η % αύξηση του μισθού του από το 2008 μέχρι τις 1-3-2009; (Απ. 1224,08 11,28%)
- 10) Καταθέτει κάποιος 10.000 ευρώ σε μια τράπεζα. Το πρώτο έτος το καθαρό επιτόκιο ήταν 3%. Τα λεφτά μαζί με τους τόκους της πρώτης χρονιάς ξανατοκίστηκαν με καθαρό επιτόκιο 5% για δεύτερη χρονιά. Πόσα λεφτά ήταν οι τόκοι του δεύτερου έτους; (Απ. 515)
- 11) Έμπορος πουλάει έπιπλα με στάνταρ ποσοστό κέρδους 30% επί της τιμής που αγοράζει τα έπιπλα από το εργοστάσιο. Σε ένα φίλο του, ένα καναπέ που αρχικά τον πούλαγε 650 ευρώ του έκανε σκόντο και του τον άφησε 590 ευρώ. Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους που είχε από την πώληση αυτή; (Απ. 18%)

1) Κάντε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

$$\beta) (-7,2) + (+6,6) + (+12) + (-6,6) + (+7,2) + (-6) =$$

$$\gamma) \left(-\frac{3}{2}\right) + (-5) + \left(+\frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + (-3) + \left(+\frac{7}{4}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right) =$$

$$\delta) -(-6) + (+7) + (-5) + (-8) - (+3) - (+5) =$$

$$\epsilon) -(-(+5)) + (-(-(-5))) =$$

$$\sigma\tau) \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + (+3) - \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) - (+3) =$$

$$\zeta) -7 + \frac{5}{12} + (-4 - 9 + 5) - 4 + 7 - 6 + \left(-\frac{17}{12}\right) - 8 - 6 - 2 =$$

2) Λύστε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x+11=1$$

$$\beta) -7+x=-4$$

$$\gamma) -x+5=4$$

$$\delta) -x-5=7$$

3) α) Αν $\alpha=4$, $\beta=-5$, $\gamma=-3$ υπολογίστε τους αριθμούς Α, Β, Γ :

$$A = -\alpha - \beta + (\gamma - 8) \quad B = -\gamma + \beta + \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) - 15 \quad \Gamma = -(1 - \alpha) + (-4 + \beta) - (\gamma - \beta)$$

β) Λύστε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \chi + A = B - \Gamma \quad \beta) A - \chi = -B - \Gamma \quad \gamma) -(A + B - \Gamma) = -\chi + A$$

4) Ο Θεαίτητος ο Αθηναίος σπουδαίος γεωμέτρης μαθητής του Πλάτωνα γεννήθηκε το -417 και πέθανε το -369 (δηλαδή 369 π.Χ). Σε τι ηλικία πέθανε;

5) Στο Νευροκόπι Δράμας η χαμηλότερη θερμοκρασία που παρατηρήθηκε το 2008 είναι -26 C και η ψηλότερη +32. Ποια η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας τη χρονιά εκείνη;

6) Αν $\alpha=-5$, $\beta=-1/3$ βρείτε τους αριθμούς Α, Β, Γ:

$$A = -\alpha + \beta - 1/2 \quad B = -(\alpha + \beta + 4) - (-3 - 6 - \alpha) + (1/2 + 1/3) \quad \Gamma = -2/3 + 5/4 - (\alpha - \beta + 1/2)$$

7) Υπολογίστε την παράσταση:

$$-\frac{3}{8} + (-7 - 4 + 9) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(-1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)$$

8) Οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι. Αν $\alpha+14$ κάνει -12 βρείτε πόσο κάνει το $\beta+14$ καθώς και το $\alpha-\beta+11$.

9) Οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι. Δικαιολογήστε ότι $\alpha+2012 = -(\beta-2012)$.

10) Οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι. Υπολογίστε την παράσταση: $A = (\alpha + \beta)^{100} + (\alpha + 6) \cdot (\beta + 1) \cdot (\alpha + \beta)$

11) Για τους αριθμούς α , β ισχύει η ισότητα: $-5 + \alpha + 2 - 3 = -(\beta - 11) - 17$. Αποδείξτε ότι είναι αντίθετοι.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) (-1) + (+5) - (-12) - (+4) \quad \beta) -(-2 + 4 - 6 + 11) - (-3 - 2) + (6 - 12)$$

$$\gamma) (-2)(-3) + 7(-4) - 2(-5 + 8 + 2 - 4)$$

$$\delta) [(-20) : (+5) - (-12)] [(-24) : (-6) + (-12)] \quad \epsilon) -\frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right)(+2) + \frac{5}{6}$$

$$\sigma\tau) -\frac{3}{4}(-2 + 5 - 7) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{-1}{2}\right) + 6$$

$$\zeta) \left[-\frac{3}{4}(-6 + 22) + \left(\frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-2 : \frac{4}{7}\right) + \left(+\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{8}{-4}\right) \right] \left(-5 + \frac{7}{2}\right)$$

$$(\text{Απαντήσεις: } \alpha)+12 \quad \beta) -8 \quad \gamma) -24 \quad \delta) -64 \quad \epsilon) -\frac{17}{6} \quad \sigma\tau) + 10 \quad \zeta) \frac{261}{16})$$

2) Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \beta \cdot \beta - 4\alpha\gamma \text{ όταν } \alpha = 5, \beta = -4, \gamma = -3$$

$$\beta) B = (\alpha - \beta) - (\gamma + \alpha) + (\beta + \gamma) \text{ όταν } \alpha = -5, \beta = 2, \gamma = -3.$$

$$(\text{Απαντήσεις: } \alpha) A=76 \quad \beta) B=0)$$

3) Επαληθεύστε ότι η ισότητα είναι σωστή:

$$\alpha) (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \beta \text{ όταν } \alpha = 7, \beta = -3$$

$$\beta) \alpha(\beta + \gamma) - \gamma(\beta + \alpha) = \beta(\alpha - \gamma) \text{ όταν } \alpha = 5, \beta = 2, \gamma = -4$$

4) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = -2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \quad , \quad B = -\frac{3}{5} \cdot \left(-1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{2}$$

$$\alpha) \text{Να υπολογίσετε τις τιμές των } A, B. \quad \beta) \text{Βρείτε τον αριθμό } \Gamma \text{ ώστε να ισχύει η ισότητα } A + \Gamma = B.$$

5) α)Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(-3 : \frac{1}{2} + \frac{5}{4} - 2\right) \cdot \left(-\frac{12}{45}\right)$$

β) Μετατρέψτε την παράσταση A σε ανάγωγο κλάσμα γ) Βρείτε ανάμεσα σε ποιους διαδοχικούς ακέραιους βρίσκεται η τιμή της A.

4) Λύστε τις εξισώσεις:

$$\alpha) -3 + \chi = -\frac{1}{2} \quad \beta) \chi + 6 = 2 \quad \gamma) -3\chi = -27 \quad \delta) \frac{\chi}{-2} = \frac{-9}{5}$$

5) α) Ποιος είναι ο αντίθετος του -2 και ποιος ο αντίστροφος;

β) Το γινόμενο δυο αριθμών είναι αρνητικός αριθμός. Τι πρόσημο θα έχει το πηλίκο των ίδιων αριθμών;

γ) Δυο αριθμοί το γινόμενό τους είναι θετικό αλλά το άθροισμα τους αρνητικό. Τι πρόσημο έχουν οι αριθμοί;

δ) Δυο αριθμοί έχουν άθροισμα 0. Τι πρόσημο έχει το γινόμενό τους αν ξέρετε ότι κανένας τους δεν είναι ίσος με το μηδέν;



6)

α) Υπολογίστε την παράσταση: $\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 3(+4)}{|-3 - 2 + 4 - 5| : (-2)}$

β) Δικαιολογήστε ότι η εξίσωση $|x - 11| = 5$ επαληθεύεται για $x=16$ και για $x=6$.

γ) Δικαιολογήστε ότι η εξίσωση $x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) = -720$ επαληθεύεται για $x = -4$.

7) Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες:

α) $-3 - x = -(\dots \dots \dots)$ β) $\alpha - \beta = +(\dots \dots \dots)$ γ) $\alpha - \beta + 6 = -(\dots \dots \dots)$ δ) $-\frac{\alpha}{3} + \beta = -(\dots \dots \dots)$

8) Γράψτε σε απλούστερη μορφή τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $-3x - 4x - 12x$ β) $5x + 7x - 12x + 4x$ γ) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x - 2x$ δ) $0,5x - 3x + \frac{3}{5}x - x$

ε) $-2(5 - 3x) + 4x$ στ) $-(4 + 3x) + 2(3 - x) - 5 + 6x$ ζ) $5x - [3x - 4 - (6 - 7x) + 2] + (-x - 1)$



9) Υπολογίστε τα παρακάτω:

$$\alpha) \frac{(-5)(-5) + 2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \left(-5\right) + \left(\frac{-3}{4}\right) \left(\frac{-3}{4}\right)}{\left[-5 + \left(\frac{-3}{4}\right)\right] \left[-5 + \left(\frac{-3}{4}\right)\right]}$$

$$\beta) \frac{-2 - \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\gamma) \frac{1 - \frac{3}{2 - \frac{1}{2}}}{-2(-3)\left(-\frac{5}{6}\right)}$$



10) Ο εξυπνάκιος καθηγητής ρώτησε τον καλύτερό του μαθητή αν μπορεί να καταλάβει αν το παρακάτω <τεράστιο> γινόμενο είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Ο μαθητής του το σκεφτηκε λίγο και είπε στον καθηγητή του το τελικό αποτέλεσμα του γινομένου. Εσείς μπορείτε να το βρείτε;

$$A = \left(1 - \frac{1}{100}\right) \left(-1 + \frac{1}{99}\right) \left(1 - \frac{1}{98}\right) \left(-1 + \frac{1}{97}\right) \dots \dots \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕ ΔΙΑΒΗΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΑ

1) ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ 3 ΠΛΕΥΡΕΣ

Παράδειγμα : Σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη ΒΓ=5 εκ, ΓΑ=4 εκ, ΒΑ= 6 εκ.

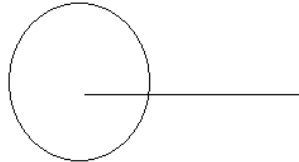
ΒΗΜΑ 1^ο

Σχεδιάζω με το χάρακα μια πλευρά



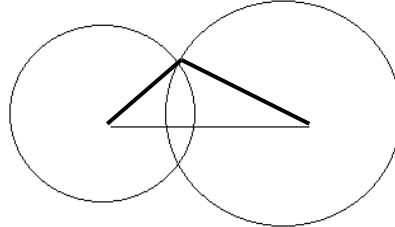
ΒΗΜΑ 2^ο

Με κέντρο το Α σχεδιάζω κύκλο ακτίνας $\rho = \Gamma\text{Α} = 4$ εκ



ΒΗΜΑ 3^ο

Με κέντρο το Β σχεδιάζω κύκλο $\rho = \text{ΒΓ} = 5$ εκ. Ενώνω όπως στο σχήμα κι έχω το ΑΒΓ.



σημείωση: η παραπάνω κατασκευή δεν είναι πάντα εφικτή (Δείτε εφαρμογές στο τέλος της σελίδας...)

2) ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ 2 ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΩΝ

Παράδειγμα : Σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=5 εκ. ΑΓ= 4 εκ. και γωνία Α= 68° .

ΒΗΜΑ 1^ο

Σχεδιάζω την ΑΒ=5 εκ



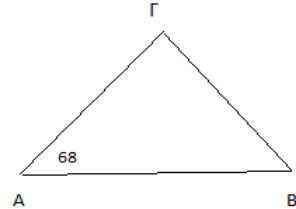
ΒΗΜΑ 2^ο

Με το μοιρογνώμονιο σχεδιάζω Την γωνία Α= 68°



ΒΗΜΑ 3^ο

Μετράω ώστε ΑΓ= 4 εκ. Σβήνω τη περισσευόμενη γραμμή κι ενώνω το ΒΓ



3) ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ 1 ΠΛΕΥΡΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΔΥΟ ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Παράδειγμα : Σχεδιάστε τρίγωνο με ΑΒ= 5 εκ. γωνία Α= 53° , γωνία Β= 47° .

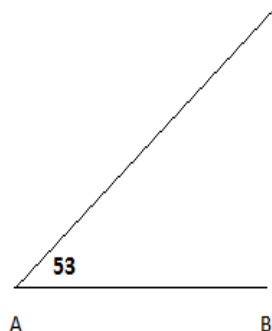
ΒΗΜΑ 1^ο

Σχεδιάζω την ΑΒ=5 εκ



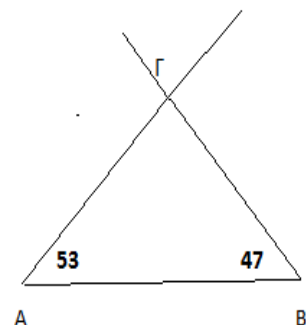
ΒΗΜΑ 2^ο

Με το μοιρογνώμονιο σχεδιάζω Την γωνία Α= 53°



ΒΗΜΑ 3^ο

Με το μοιρογνώμονιο σχεδιάζω τη γωνία Β= 47° . Εκεί που τέμνονται είναι το Γ.



4) ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΜΕ ΤΟ ΔΙΑΒΗΤΗ

Παράδειγμα : Σε οποιαδήποτε γωνία σχεδιάστε τη διχοτόμο της.

ΒΗΜΑ 1^ο

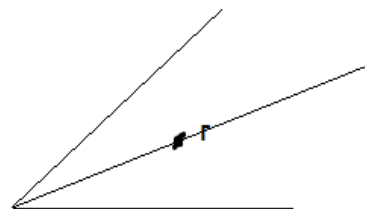
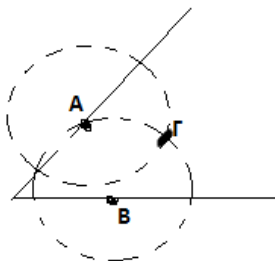
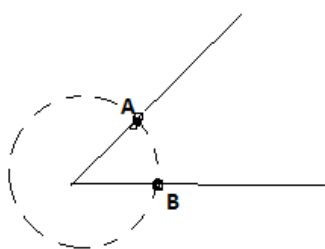
Με κέντρο την κορυφή της γωνίας σχεδιάζω 'μεγάλο' κύκλο. Σημειώνω τα σημεία που ο κύκλος τέμνει τη γωνία.

ΒΗΜΑ 2^ο

ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΑΛΛΑΞΩ ΤΟ ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΗ σχεδιάζω κύκλους με κέντρα τα σημεία. Σημειώνω το σημείο τομής των 2 κύκλων όπως στο σχήμα.

ΒΗΜΑ 3^ο

Σβήνω τους κύκλους κρατώντας μόνο το σημείο τομής τους. Το ενώνω με την κορυφή της γωνίας και έτσι σχεδιάσα τη διχοτόμο της.



5) Ο ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

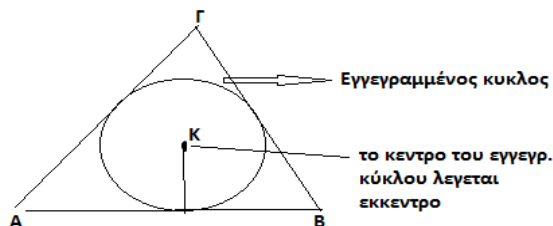
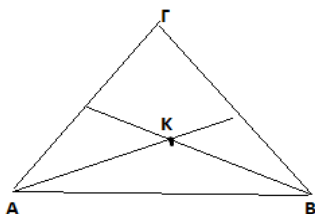
Παράδειγμα: Σε οποιοδήποτε τρίγωνο σχεδιάστε τον *εγγεγραμμένο κύκλο του*.

ΒΗΜΑ 1^ο

Σχεδιάζω 2 διχοτόμους των γωνιών του τριγώνου και σημειώνω Κ το σημείο τομής των διχοτόμων

ΒΗΜΑ 2^ο

Από το σημείο Κ που έχω βρει φέρνω το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα σε μια πλευρά. Με κέντρο το σημείο Κ κι ακτίνα το μήκος του τμήματος σχεδιάζω τον εγγεγραμμένο κύκλο



Εφαρμογές

1) Σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ όταν σας δίνουν τα παρακάτω στοιχεία:

- α) $AB = 7$ εκ. $BΓ = 5$ εκ. $ΑΓ = 4$ εκ.
- β) $AB = 3$ εκ. $BΓ = 5$ εκ. $ΑΓ = 6$ εκ.
- γ) $AB = 7$ εκ. $BΓ = 3$ εκ. $ΑΓ = 2$ εκ.
- δ) $AB = 5$ εκ. $ΑΓ = 4$ εκ. και γωνία $A = 45^\circ$
- ε) $BΓ = 4$ εκ $BA = 6$ εκ. και γωνία $B = 127^\circ$
- στ) $ΑΓ = 5$ εκ. , γωνία $A = 53^\circ$, γωνία $Γ = 64^\circ$
- ζ) $BΓ = 4$ εκ., γωνία $B = 112^\circ$, γωνία $Γ = 38^\circ$.

2) Σχεδιάστε τρίγωνο ΚΛΜ με $ΚΛ = 4$ εκ , γωνία $Λ = 90^\circ$, $ΛΜ = 3$ εκ. Κατόπιν σχεδιάστε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΚΛΜ.

3) Σχεδιάστε τρίγωνο ΠΡΣ με $ΠΡ = 6$ εκ. , $ΡΣ = 4$ εκ. , $ΣΠ = 3$ εκ. Κατόπιν σχεδιάστε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΠΡΣ.

4) Σχεδιάστε μια γωνία χωρίς χρήση μοιρογνομονίου , μόνο με χάρακα. Στη συνέχεια **τετραχοτομήστε**

την γωνία (δηλαδή χωρίστε την σε 4 ίσες γωνίες) χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και χάρακα.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1) Τι πρέπει να ξέρω από θεωρία:

Τι είναι

α) σημείο, ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, ημιευθεία, πως τα ονομάζω και τα σχεδιάζω (σελ. 148)

β) Ποιες ημιευθείες λέγονται αντικείμενες και πως τις σχεδιάζω (σελ 149)

γ) Πως σχεδιάζω γωνία και πως την ονομάζω καθώς και πότε μια γωνία λέγεται περιεχόμενη, απέναντι ή προσκείμενη σε πλευρά (σελ 153-154)

δ) Τι είναι τεθλασμένη γραμμή και τι ευθύγραμμο σχήμα (σελ 154)

ε) Τις υποδιαιρέσεις - πολλαπλάσια του μέτρου (σελ 159)

στ) Απόσταση δύο σημείων, μέσο ευθύγραμμου τμήματος (σελ 159-160)

ζ) Περίμετρος ευθ. τμήματος, μήκος τεθλασμένης γραμμής (σελ 163)

η) Διχοτόμος γωνίας (σελ 167)

θ) Τα είδη των γωνιών (σελ 170 -171)

ι) Ποιες ευθείες είναι κάθετες, σχεδιασμός, συμβολισμός (σελ 171)

ια) Εφεξής - διαδοχικές γωνίες (σελ 173)

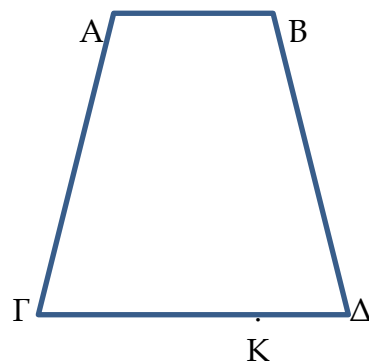
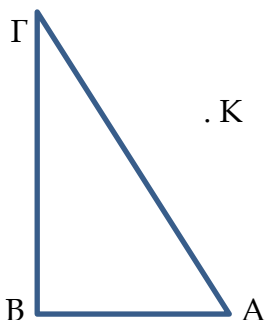
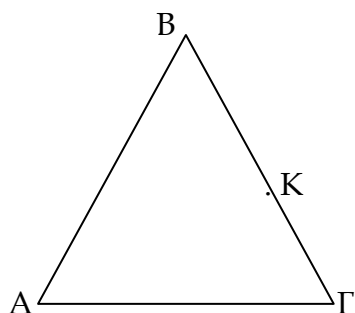
ιβ) Παρ/κές, συμ/κές, κατακορυφήν τους κανόνες και πως τις σχεδιάζω (σελ 176 και σελ 178)

ιγ) Παράλληλες - τεμνόμενες ευθείες, κανονες, και πως σχεδιάζω παράλληλες με τη βοήθεια του γνώμονα (σελ 180)

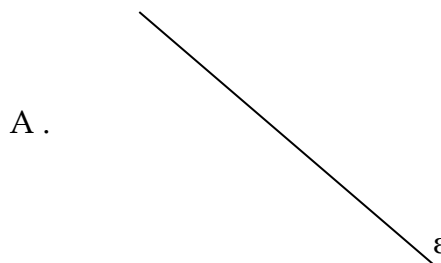
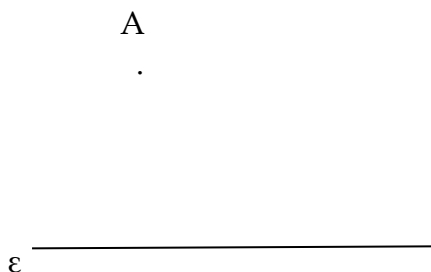
ιδ) Απόσταση σημείου από ευθεία και απόσταση παραλλήλων ευθειών. Να μπορώ να τις υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα (σελ 184)

2) Ασκήσεις επανάληψης

α) Στα παρακάτω σχήματα βρείτε την απόσταση του σημείου K από τις AB και AG.



3) Φτιάξτε με το γνώμονα την παράλληλη ευθεία στην (ε) που περνάει από το σημείο A



4) Σχεδιάστε με το μοιρογνώμονιο γωνία $\chi O \psi$ που να είναι 110° . Φέρτε τη διχοτόμο της OZ με τη βοήθεια του μοιρογνώμονιου. Επιλέξτε ένα τυχαίο σημείο πάνω στην διχοτόμο OZ κι ονομάστε το A. Από το A φέρτε την παράλληλη στην Oχ που θα τέμνει την Oψ στο σημείο

Β. Το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισοσκελές ή όχι;

5) Σχεδιάστε δυο εφεξής και συμπληρωματικές γωνίες $\chi\text{Ο}\psi$, $\psi\text{Ο}\zeta$ (όσες μοίρες θέλετε εσείς αρκεί να ναι συμπληρωματικές). Με τη βοήθεια του μοιρογνώμονιου φέρτε τις διχοτόμους των δύο γωνιών κι ονομάστε τις Οα και Οβ. Με το μοιρογνώμονιο μετρήστε την γωνία αΟβ Είναι 45° ή όχι;

6) Σχεδιάστε τρίγωνο ΚΛΜ. Βρείτε το μέσο της πλευράς ΚΛ κι ονομάστε το Ξ. Φέρτε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΞ. Προεκτείνετε το ΜΞ προς την πλευρά του σημείου Ξ κατά τμήμα ΞΝ ώστε $\Xi\text{Ν} = \Xi\text{Μ}$. Φέρτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΝΚ και ΝΛ. Ισχύουν οι ισότητες $\text{ΝΛ} = \text{ΚΜ}$ και $\text{ΝΚ} = \text{ΛΜ}$;

7) Η τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖ αποτελείται από τα τμήματα μήκους $\text{ΑΒ} = 26 \text{ cm}$, $\text{ΒΓ} = 0,024 \text{ Km}$, $\text{ΓΔ} = 0,4 \text{ dm}$, $\text{ΔΕ} = 165 \text{ mm}$, $\text{ΕΖ} = 23,5 \text{ cm}$. Βρείτε το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕΖ σε μέτρα. (ΜΗΝ ΚΑΝΕΤΕ ΣΧΕΔΙΟ)

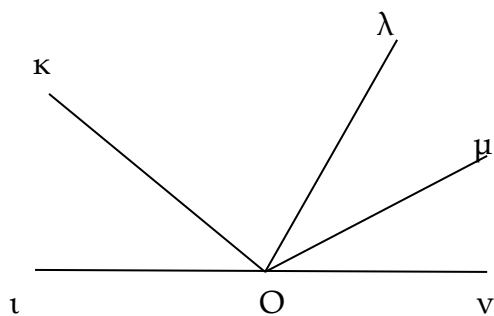
8) Κάντε τις μετατροπές:

α) $2,3 \text{ Km}$ σε m β) $0,025 \text{ m}$ σε mm γ) $16,4 \text{ dm}$ σε cm δ) 65 mm σε m ε) 23 cm σε Km
στ) $0,2 \text{ mm}$ σε dm ζ) $25,39 \text{ dm}$ σε Km .

9) Σχεδιάστε τις αντικείμενες ημιευθείες Οα, Οα'. Πάνω στην Οα πάρτε σημείο Κ ώστε $\text{ΟΚ} = 6$ εκατοστά και πάνω στην Οα' πάρτε τα σημεία Λ, Μ ώστε να ναι $\text{ΟΛ} = 3$ εκατοστά και $\text{ΟΜ} = 5$ εκατοστά. Βρείτε το μέσο Α του τμήματος ΚΜ. Βρείτε το μέσο Β του τμήματος ΟΜ. Μετρήστε την απόσταση των σημείων Α και Β.

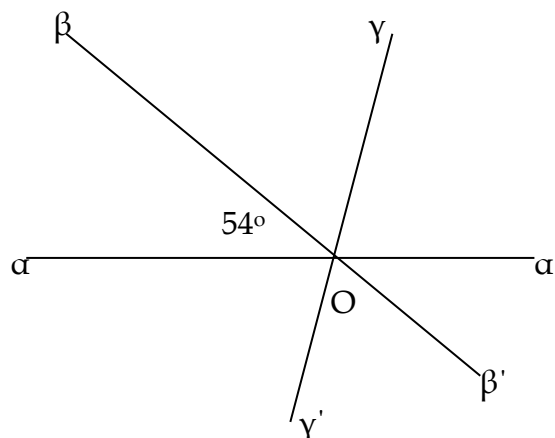
10) Στα παρακάτω σχήματα υπολογίστε τις γωνίες ΜΟΝΟ ΜΕ ΣΚΕΨΗ ΜΗ ΜΕΤΡΗΣΕΤΕ ΜΕ ΤΟ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟ :

α)



Η $\mu\text{Ολ} = 37^\circ$. Η $\kappa\text{Οι}$ είναι συμπληρωματική της $\mu\text{Ολ}$.
Επιπλέον η γωνία $\kappa\text{Ολ}$ είναι 3πλάσια της γωνίας $\mu\text{Ον}$.

β)

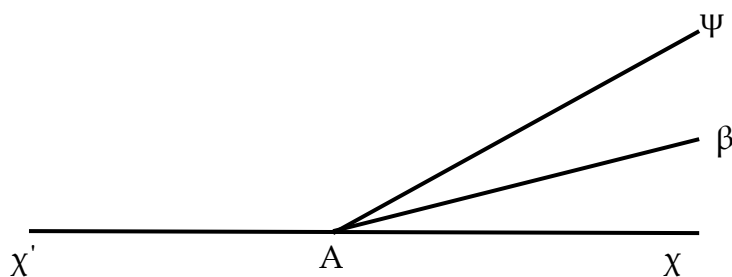


Στο σχήμα $\alpha\text{Ο}\beta = 54^\circ$. Η Οβ είναι διχοτόμος της γωνίας αΟγ.

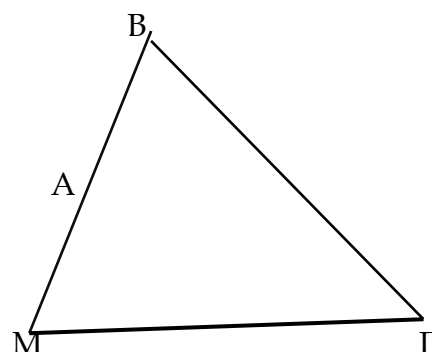
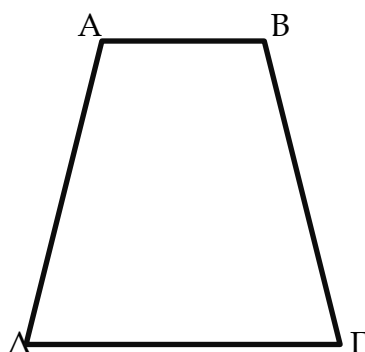
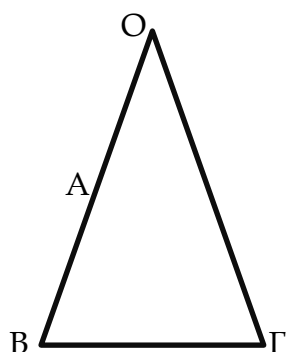
11) Δυο γωνίες είναι παραπληρωματικές. Η μεγάλη είναι διπλάσια σε μοίρες από την μικρή. Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία;

12) Δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Η μια είναι μεγαλύτερη της άλλης κατά 36 μοίρες. Πόσες μοίρες είναι κάθε γωνία και πόσες μοίρες είναι οι παραπληρωματικές τους;

13) Στο παρακάτω σχήμα η Αβ είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi\text{Α}\psi$. Επιπλέον η γωνία $\chi\text{Α}\beta = 157$ μοίρες. Βρείτε τις γωνίες $\chi\text{Α}\psi$, $\psi\text{Α}\chi$ ΜΟΝΟ ΜΕ ΣΚΕΨΗ ΜΗ ΜΕΤΡΗΣΕΤΕ ΜΕ ΤΟ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟ.



14) Στα παρακάτω σχήματα φέρτε την παράλληλη προς την $B\Gamma$ που να περνάει από το A .
Να γίνει με κατασκευή με το γνώμονα όπως έχουμε δείξει στην τάξη.



15) Φτιάξτε ένα τρίγωνο (με το χάρακα) κι ονομάστε το $AB\Gamma$. $B\Gamma$ ονομάστε την 'κάτω πλευρά'. Με το μοιρογνωμόνιο φτιάξτε τη διχοτόμο της γωνίας B και τη διχοτόμο της γωνίας Γ . Οι δυο διχοτόμοι που φτιάξατε τέμνονται σε ένα σημείο, ονομάστε το σημείο αυτό Θ . Από το Θ φέρτε(με το γνώμονα) την παράλληλη ευθεία στη $B\Gamma$. Αυτή η παράλληλη που φέρατε τέμνει τις AB και $A\Gamma$, ονομάστε τα σημεία αυτά Δ και E . Αν έχετε κάνει προσεκτικά την κατασκευή θα δείτε ότι θα ισχύει $\Delta E = B\Delta + E\Gamma$.

