

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α) $(-2)+(-6)-(-8)$

β) $(+14)+(-23)+(-5)-(-9)-(-12)$

γ) $(-2,7)+(-5,8)-(+9,1)+(-8)$

δ) $(-5)-(+8)-(-9,6)+(-5,23)$

ε) $(-\frac{6}{5})+(-\frac{7}{2})-(-3)+(+5,5)+(-\frac{4}{5})$

2) Δίνεται ότι $\chi=-3$ $\psi=5$ $\omega=-7$. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

α) $\chi+\psi+\omega$ β) $|\chi+\psi-\omega|$ γ) $|- \chi+\psi-\omega|$ δ) $|7-\chi|+|\psi-\omega|-|\chi+\psi+\omega|$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\chi+2=0$ β) $\chi-6=5$ γ) $8+\chi=-11$ δ) $(-7)+\chi=-(+5)$ ε) $-6+(-8)+\chi=-9$ στ) $|-6|+\chi=-9$

4) Εστω $A=-3+6+8-9-17$ $B=-7,5-6,5+8$ $\Gamma=-(-8)-(+6)+(-12)-(-20)$

Βρείτε την τιμή της παράστασης $A-B+|\Gamma|$

5) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

α) $A=-(-3+5-9)-[8-(-4+7)-9]$

β) $B=5-\{-3+8+[-5-(-6+4)+3]\}$

γ) $\Gamma=-(8-12)-[-9-(4-7)]+[-(4+7)+(6-9)]$

6) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $A=+(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta-\gamma)-(9+\gamma)$

β) $B=-\gamma+(\alpha+2)-(\alpha+\beta-\gamma+5)-(-\beta)$

γ) $\Gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)-\{\alpha-[\beta-(-\gamma+3)+7]\}$

7) Να βάλετε τις παρακάτω παραστάσεις μέσα σε μία παρένθεση που να 'χει μπροστά το πρόσημο - χωρίς να μεταβάλλετε την τιμή τους.

α) $\alpha+3+\beta-\gamma$ β) $3-\alpha-\beta-\gamma$ γ) $5+\alpha-\beta+\gamma$ δ) $-2\alpha+\beta-3\gamma+8$

8) Στις παρακάτω παραστάσεις ο 1ος και ο 3ος όρος να γραφούν σε μια παρενθεση με πρόσημο + μπροστά και οι υπόλοιποι όροι μέσα σε μια παρένθεση με το - μπροστά

α) $-\alpha+\beta+\gamma-\delta+7$ β) $3-\alpha+\beta+\delta-\gamma$ γ) $-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\epsilon$ δ) $-5+\alpha-\delta+\gamma-\epsilon+\beta-\chi$

9) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$A=2-\{5+[\alpha-(\beta+2)]\}-[\beta-(2+\alpha)]$

10) Αποδείξτε ότι η παράσταση $A=-2-\{-3-[(1-\chi)-(2-5)]\}$ είναι ίση με $5-\chi$

11) Αν $\chi+\psi=-5$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων

α) $A=-(-5-\chi)-[3-(1+\psi)]$

β) $B=+(2+\psi)-(7-\chi)+\psi-(3+\psi)$

γ) $\Gamma=-(-6+\chi)+\{5-[6+(-2+\psi)]\}$

12) Αποδείξτε ότι οι παρακάτω παραστάσεις έχουν τιμή ανεξάρτητη των τιμών των μεταβλητών χ και ψ .

α) $\chi-(3+\psi)-[5+(\chi-7)]-(-\psi)$

β) $\alpha-[3-(\chi+\psi)]-5-(\chi-1)-\psi+2$

13) Αν $\chi = |3-7|$ και $\psi = |-2 - \frac{1}{2}|$ βρείτε τη τιμή της παράστασης

$$A = -\psi - \{-\chi + \psi + [-\chi - (-\chi - \psi)]\}$$

14) Αν $\chi + \psi = 5$ και $\alpha - \beta = -3$ βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = -(3 + \chi) + (6 + \beta) - (\psi + \alpha + 4)$$

15) Να συμπληρωθεί ο πίνακας

χ	Αντίθετος του χ	Αντίστροφος του χ	Απόλυτη τιμή του χ
-3			
	$\frac{3}{5}$		
			6 με $\chi < 0$

16) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$$\alpha) -3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-4) - (-6) \cdot (+8)$$

$$\beta) -2 \cdot (-4) \cdot (+5) + 2 \cdot (-4) \cdot (+5)$$

$$\gamma) -7 \cdot (-\frac{3}{7}) + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{6}{5} \cdot (-3)$$

17) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) 5\chi - 7\chi + 2\chi \quad \beta) \chi + 2\chi + 3\chi - 4\chi \quad \gamma) -0,5\chi + 2,6\chi - 5\chi \quad \delta) \frac{-3}{5}\chi + 2\chi - \frac{1}{3}\chi + 4\chi$$

18) Ομοίως

$$\alpha) 3\chi - 5\psi + 4\chi + \chi - \psi - 9 \quad \beta) 3 - (\chi + 2) + 4\chi - \psi + 7\psi \quad \gamma) 2\chi + 5\chi + 7\psi - 3\psi - 6\psi + 9\chi$$

$$\delta) 4(\chi - 3) - 3(-\psi - 5) + 2\chi - 3\psi + 9\chi \quad \epsilon) -2(4\chi - 2\psi + 9) + 3(-2\chi + 7\psi - 5) + 9\psi - \chi$$

19) Να κάνετε τις πράξεις

$$\alpha) \alpha(\beta - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta)$$

$$\beta) \alpha(\chi + \psi) - \chi(\alpha + \psi) + \psi(-\alpha + \chi)$$

$$\gamma) \alpha(\chi - \psi + 1) - \chi(\alpha + \psi) + \psi(\alpha + 5 + \psi)$$

20) α) Αν $\gamma = -4$ αποδείξτε ότι $3(\alpha + \beta) + \gamma(\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 0$

β) Αν $\alpha + \gamma = \beta$ αποδείξτε ότι $\alpha\chi - \beta\chi + \gamma\chi = 0$

21) Αν $\chi - \psi = 0,5$ και $\alpha - \beta = -2$ αποδείξτε ότι η παράσταση

$$A = 2\chi + \alpha\chi + \beta\psi - \beta\chi - \alpha\psi - 2\psi \text{ είναι ίση με το μηδέν}$$

22) Αποδείξτε ότι οι αριθμοί χ και ψ είναι αντίστροφοι, όπου $\chi = \frac{3}{2} - \frac{1}{5}$

$$\text{και } \psi = -2(-5)(\frac{2}{26}).$$

23) Να βρεθούν τα γινόμενα

$$\alpha) (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \quad \beta) (\chi + 1)(\psi - 1) \quad \gamma) (\alpha - 1)(-\chi - \psi + 1)$$

24) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων όταν $\alpha = -2$ $\beta = 3$ $\gamma = -4$

$$\alpha) A = (\alpha + 2)(\beta\gamma - 8)(\alpha\beta\gamma + 5)$$

β) $B = (2\alpha - 1)(-3\beta + 2\gamma - 6)(-\gamma + 2\alpha)$

γ) $\Gamma = [-2\alpha - (4\beta - 7 + 2\gamma)] \cdot (2 - \alpha)$

25) Αν $\chi + \psi = 0$ και $\alpha\beta = 1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\alpha\beta\chi\psi$

26) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-5(-4) : \frac{-10}{3}$ β) $[(-2) + (-3)] : (-10) - (+7)$ γ) $\frac{(-2)(-3) + 5}{-4} - \frac{-2 + -4(-3)}{-5}$

δ) $(-5-3) - (-2 + \frac{3}{4}) : (-\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{8} \cdot \frac{-8}{6} + 1) : (-\frac{11}{3})$

ε) $(-\frac{5}{3}) : (-\frac{11}{6}) + (-\frac{10}{3}) : (+\frac{9}{2}) - 15 : (-3)$

27) Για ποιες τιμές του χ δεν ορίζονται τα παρακάτω κλάσματα;

α) $\frac{2}{x}$ β) $\frac{3x}{x-1}$ γ) $\frac{5+x}{5-x}$ δ) $\frac{4}{2x-4}$

28) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3\chi = 18$ β) $-2\chi = -12$ γ) $-\frac{1}{3}\chi = 6$ δ) $\chi : (-4) = 6$ ε) $\chi : \frac{5}{3} = \frac{-3}{4}$

στ) $\frac{x}{-4} = 15$ ζ) $-50 : \chi = 2$ η) $-\frac{7}{5} : \chi = -3$

29) Αν $\alpha \neq 0$ να κάνετε τις πράξεις:

α) $[0 : \alpha - \alpha \cdot (-1)] : \alpha$ β) $[-\alpha : (-1) + \alpha] : 2\alpha$ γ) $[-\alpha : (-2\alpha)] \cdot (-2\alpha) + 4\alpha$

30) Αν δυο αριθμοί είναι αντίθετοι το ηλίκό τους με ποιο αριθμό ισούται;

31) Εστω οι παραστάσεις:

$A = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ και $B = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

Αποδείξτε ότι $A = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$ ενώ $B = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

32) Αν $\frac{a}{\beta} = -3$ βρείτε την τιμή των κλασμάτων:

α) $\frac{\alpha - \beta}{\beta}$ β) $\frac{4\alpha - 3\beta}{\beta}$ γ) $\frac{-2\alpha + 5\beta}{3\beta}$ δ) $\frac{2\alpha - 7\beta}{\alpha}$

33) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^{15} + (-1)^{26}$ β) $(-2)^3 + 9^3 : 3^6$ γ) $[-2 \cdot 3^2 + 6 \cdot (-1)^3 - 5^2 + 22] : (-2)^3$

34) Να γραφούν σε μορφή μιας δύναμης οι παραστάσεις:

α) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ β) $(-3)^4 (-3) (-3)^5$ γ) $\alpha^4 \cdot \alpha \cdot \alpha^7 \cdot \alpha^5$ δ) $5^2 (-5)^4 (-5)^3$

35) Ομοίως:

$$\alpha) [\alpha^3 : \alpha^2] : \frac{1}{a^5} \quad \beta) [(-2)^3 (-2)^4 (-2)] : [(-2)^5 (-2)]$$

$$\gamma) (2^3)^4 : [2^5 \cdot 2^3] \quad \delta) [(-\frac{3}{2})^4 : (-\frac{3}{2})^3] \cdot (-\frac{3}{2})^5 \quad \epsilon) (\alpha^3 \alpha^2 \alpha) : (\alpha^4 \alpha)$$

$$\sigma\tau) 0.2^5 \cdot 0.5^5 \cdot 100^5 \quad \zeta) (\frac{2}{5})^7 (\frac{1}{2})^7 (\frac{5}{3})^7 \quad \eta) [3^4 \cdot 6^4] : 9^4$$

36) Αν $\chi\psi\omega = -2$ αποδείξτε ότι:

$$\alpha) \chi^4 \psi^4 \omega^4 = 16 \quad \beta) \chi^3 \psi^2 \omega^4 \chi^2 \psi \omega \psi^2 = -32 \quad \gamma) -\frac{1}{8} \chi^3 \psi \omega^2 \chi^2 \psi^2 \omega = \chi^2$$

$$\delta) (\chi^2)^3 \psi^4 \omega^5 \psi^2 \omega = 64$$

37) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 3^5 \chi = 3^7 \quad \beta) 5^3 \chi = 10^3 \quad \gamma) \chi : 2^7 = \frac{1}{2^4} \quad \delta) 10^4 \chi = -1000 \quad \epsilon) \frac{2^5}{x} = 2^3$$

38) Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha) 2^{\chi+1} + 2^{\chi-1} + 3^{\chi+3} - \chi^{\chi+2} \quad \text{για } \chi = -2$$

$$\beta) (\chi+1)^2 + (1-\chi)^\chi - \chi^\chi \quad \text{για } \chi = 3$$

$$\gamma) 3 \cdot 2^{\chi-1} + 5 \cdot 2^\chi - (3\chi-1)^\chi \quad \text{για } \chi = -1$$

39) Αποδείξτε ότι $\alpha^{\kappa-2} \alpha^{\kappa+5} \alpha^{-3-2\kappa} = 1$ 40) Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $\chi = (2^4)^{-1}$ και $\psi = 2^5 \cdot 2^3 \cdot (2^2)^{-2}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί.

41) Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) 8^3 \cdot 2^3 = 4^6 \quad \beta) 9^{-2} \cdot 27^2 = 3^2 \quad \gamma) [6^{100} \cdot 3^{100}] : 9^{100} = 4^{50}$$

42) Υπολογίστε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) A = 5 \cdot (-2)^3 + 3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^{-9} - [-3 \cdot 5^2 + (-1)^{103} - (\frac{1}{4})^{-2}]$$

$$\beta) B = \frac{5 \cdot 2^{-1} + (\frac{4}{3})^{-1} - (-7+5)^{-2}}{5^3 \cdot 5^{-5} \cdot 5} - 1$$

$$\gamma) \Gamma = (3^2)^2 - [(-2)^3]^2 - (-5^2)^2$$

$$\delta) \Delta = (-\frac{1}{5})^{-2} + (3^2 + 4^2) : 5^2 - 8^2 : 4^2 + 7 \cdot 3^2$$

43) Για $a = -\frac{1}{2}$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{2a^2 + a - 1}{5 - a} \quad B = (a+1)(a^2-2) + 2 - a$$

44) Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

$$\alpha) (-1)^3 = (-1)^{2003} \quad \beta) (-1)^{-2} = 1 \quad \gamma) (-a)^4 = a^4 \quad \delta) (a - \beta)^2 = (\beta - a)^2$$

$$\epsilon) (a - \beta)^3 = (\beta - a)^3 \quad \sigma\tau) (-0,5)^{-2} = 2^2 \quad \zeta) (-2)^5 = -2^{-5}$$

45) Αποδείξτε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι αντίστροφοι:

$$\alpha) \chi = 2^5 \text{ και } \psi = 2^{-5}$$

$$\beta) \chi = [(\alpha^2)^{-3} \cdot \alpha^{-2}] : (\alpha^3)^{-3} \text{ και } \psi = \alpha^{-1}$$

$$\gamma) \chi = 5^2 - 3^2 \text{ και } \psi = 8^{-2} : 2^{-2}$$

46) Για $\chi = -2$ και $\psi = 3$ αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα:

$$(\psi - \chi)^3 = \psi^3 - 3\chi^2\psi + 3\chi\psi^2 - \chi^3$$

47) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$3^{-5} \chi = 3^2 \quad \beta) -\frac{1}{2} \chi = 2^{50} \quad \gamma) 7^4 : \chi = 7^{-3}$$

48) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\chi = 3^{29} + 10 \cdot 3^{28} - 13$ διαιρείται ακριβώς με τον αριθμό 13.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1) Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι εξίσωση του χ ;

α) $2-\chi=5$ β) $\chi+4-5\chi$ γ) $3-\chi^2=\chi$ δ) $\chi^2+\chi-6=0$

2) Γράψτε τρεις δικές σας εξισώσεις.

3) Γράψτε σε μαθηματική έκφραση τα παρακάτω:

α) Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς χ είναι ίση με 48cm.

β) Το τετράγωνο αριθμού ισούται με το 49.

γ) Μισό κιλό φέτας στοιχίζει 3,6€.

δ) Αυτοκίνητο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα διένυσε σε 4,5 ώρες 270km

ε) Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος άλλου αριθμού κατά 25.

Το άθροισμα και των δύο είναι ίσο με 147.

στ) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται με το 1722.

ζ) Το τετράγωνο αριθμού προστιθέμενο με τον αριθμό ισούται με 72.

η) Ένα κεφάλαιο κατατέθηκε σε μία τράπεζα με επιτόκιο 3%.

Μετά από ένα χρόνο εισπράξαμε 3.090€.

θ) Ποσό 5.000€ κατατέθηκε σε τράπεζα. Μετά από ένα χρόνο εισπράξαμε ποσό 5.600€. Γράψτε εξίσωση που να υπολογίζει το επιτόκιο.

4) Έστω η εξίσωση $2\chi-1=243$. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι λύση της; -45, 122, 141, 244.

5) Έστω η εξίσωση $\chi^3-7\chi+6=0$. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι λύση της; -2, 1, 2, -3.

6) Έστω ότι η εξίσωση $\chi^3+\chi^2+\chi=\alpha+2$ έχει λύση τον αριθμό $\chi=3$. Ποιος είναι ο αριθμός α ;

7) Σκεφτείτε ένα πρόβλημα που να έχει σαν εξίσωση την :

$$2\chi+5=20$$

8) Βρείτε μια λύση με δοκιμες στις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^x + \chi = 6$ β) $3^x + 4^x = 5^x$ γ) $3^x + \chi(\chi-1) = \chi^2 + \chi + 1$

9) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) -2(\chi-1)+3(-4+2\chi)=5\chi-6$$

$$\beta) \chi(2-\chi) + 4(5+2\chi) = 6-\chi^2$$

$$\gamma) -3(-2\chi-6) - [5 - (3+\chi)+2\chi] = 4 - (2-\chi)$$

$$\delta) -4(1+\chi)+3=2\chi+6(5-\chi)$$

$$\epsilon) 5\chi-3(\chi+2)=2(\chi-2)-2$$

10) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) -\chi + \frac{1-\chi}{2} = 5+2\chi$$

$$\beta) 1 - \frac{4-2x}{12} + 2\chi = \frac{1+x}{2} + \frac{3-x}{6}$$

$$\gamma) \omega + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = 8(1-\omega)$$

$$\delta) \frac{3}{4} - \frac{1+x}{3} + 5\chi = \frac{2x-1}{6} + \chi - 2$$

$$\epsilon) \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \left(x - \frac{5}{3}\right) = 5 - \frac{x+1}{6}$$

$$\sigma\tau) \frac{2}{3} \cdot \left(6 - \frac{x}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{3} - \frac{2}{5}\right)$$

11) Αν $\alpha + \beta = 2$ να λυθεί η εξίσωση:

$$(\alpha+2)\chi - 2\chi + 3 = (5-\beta)\chi + 6\chi + 1$$

12) Αν η λύση της παρακάτω εξίσωσης είναι $\chi = -2$ να βρεθεί η τιμή του α :

$$2\chi - \alpha + 3 = 3(\chi - 4) + 5\alpha - 1$$

13) Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση αν $\lambda = 4$:

$$(\lambda+3)\chi - 4\lambda + 5 = \lambda^2 + 5\lambda - 6 + \chi(-2\lambda+5)$$

14) Για ποια τιμή του α οι παρακάτω εξισώσεις έχουν την ίδια λύση; $-3\chi + 6 = \chi + 2$ $\alpha\chi + 24 = 4(\chi - 2\alpha + 3)$

15) Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την μεταβλητή που ζητείται:

$$\alpha) E = \alpha \cdot \beta \text{ ως προς } \alpha$$

$$\beta) F = m \cdot g \text{ ως προς } g$$

γ) $PV=nRT$ να λυθεί ως προς 1) T 2) V .

δ) $S=ut + at^2$ ως προς u .

ε) $E= m(\frac{1}{2}u^2 +gh)$ ως προς 1) m 2) g

στ) $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{\Gamma}$ ως προς 1) A 2) Γ

16) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

α) Να βρείτε ένα αριθμό που το επταπλάσιό του όταν μειωθεί κατά το μισό του αριθμού να ισούται με τον αριθμό αυτό αυξημένο κατά 22.

β) Το άθροισμα δύο διαδοχικών ακεραίων είναι 133. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

γ) Αν από ένα αριθμό αφαιρέσουμε το 122 προκύπτει το ένα τρίτο του αριθμού μειωμένο κατά 46. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

δ) Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στους όρους του κλασματος $\frac{5}{12}$ ώστε αυτό να ισούται με το $\frac{4}{5}$;

ε) Αν σε ένα αριθμό προσθέσουμε το μισό και το ένα τρίτο του αριθμού προκύπτει ο αριθμός 264. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

17) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΗΛΙΚΙΑΣ

α) Ένας πατέρας είναι σήμερα 41 ετών και ο γιος του 9 ετών. Μετά από ποσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιού του;

β) Μετά από 19 χρόνια θα έχω ηλικία τριπλάσια από εκείνη που είχα πέρυσι. Πόσων ετών είμαι σήμερα;

γ) Ένας πατέρας είναι σήμερα 50 ετών και η κόρη του είναι 28 ετών. Πριν πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα ήταν 3πλάσια της ηλικίας της κόρης;

δ) Πριν από 10 χρόνια η ηλικία του Γιάννη ήταν 4πλάσια της ηλικίας του Βασίλη. Σήμερα η ηλικία του Γιάννη είναι 2πλάσια της ηλικίας του Βασίλη. Βρείτε τις σημερινές ηλικίες του Γιάννη και του Βασίλη.

18) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΗΣ

α) Ένα αυτοκίνητο έκανε 5 ώρες για να πάει από την πόλη Α στη πόλη Β. Τις δύο πρώτες ώρες κινήθηκε με σταθερή ταχύτητα και στη συνέχεια αύξησε την ταχύτητα κατά 10km/h και κινήθηκε με σταθερή ταχύτητα μέχρι να φτάσει στην πόλη Β. Αν συνολικά διένυσε 330 km βρείτε τις ταχύτητες που ανέπτυξε το αυτοκίνητο.

β) Δύο αυτοκίνητα Α και Β απέχουν 280km. Ξεκινούν ταυτόχρονα στις 9 το πρωί προς συνάντησή τους με ταχύτητες 30km/h και 40km/h αντίστοιχα. Να βρείτε πότε θα συναντηθούν και πόσο διάστημα διένυσε το καθένα.

γ) Ποδηλάτης ξεκινά από τα Σφακία με σταθερή ταχύτητα 8km/h και φτάνει σε κάποιο χωριό. Αμέσως επιστρέφει στα Σφακιά με ταχύτητα 12km/h. Αν συνολικά χρειάστηκε 5h βρείτε την απόσταση Σφακίων- χωριού.

δ) Από μια πόλη ξεκινά ένας πεζός ο οποίος διανύει κάθε μέρα 20km. Μετά από 4 μερες ξεκινά από την ίδια πόλη άλλος πεζός με την εντολή να φτάσει τον πρώτο σε 8 μέρες. Πόσα km. Πρέπει να διανύει κάθε μέρα;

ε) Δύο τρένα ξεκινούν από δύο πόλεις που απέχουν 270km κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις. Το ένα κινείται με σταθερή ταχύτητα 50km/h και το άλλο με σταθερή ταχύτητα 60km/h ξεκινώντας όμως 1h αργότερα. Να βρεθεί μετά πόσες ώρες θα συναντηθούν και πόση απόσταση από από τις δύο πόλεις;

19) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΓΜΑΤΩΝ

α) Εμπορος αναμιγνύει 8κιλά μπαχαρικού ποιότητας α΄ αξίας 3€/κιλό με 12 κιλά ποιότητας β΄ κι αξίας 5€/κιλό. Πόσο θα κοστίζει το ένα κιλό μίγματος που προκύπτει;

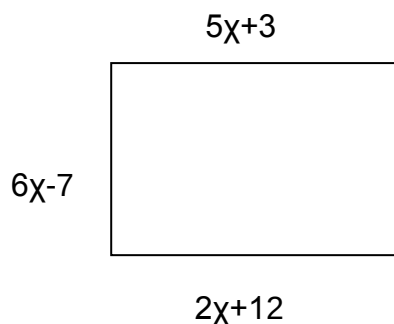
β) Αναμιγνύουμε 80λίτρα οينوπνεύματος περιεκτικότητας 75% με 60λίτρα οينوπνεύματος και προκύπτει οινόπνευμα περιεκτικότητας 70% . Ποια η περιεκτικότητα του δεύτερου οينوπνεύματος;

γ) Ένα άσπρο κρασί έχει περιεκτικότητα σε αλκόολ 10% και ένα κόκκινο περιεκτικότητα 14%. α) Άμα πιούμε ένα μπουκάλι κόκκινο βάρους 700gr πόσα gr αλκόολ έχουμε πιεί; β) Αναμιγνύουμε 100kg άσπρο με κόκκινο για να φτιάξουμε ροζ κρασί και προκύπτει κρασί περιεκτικότητας 13%. Πόσα κιλά κόκκινο κρασί βάλαμε;

δ) Το κατσικίσιο γάλα έχει 22% λιπαρά. Για να γίνει γραβιέρα βράζουμε 40 κιλά γάλακτος ώστε να εξατμιστεί νερό και να προκύψει ζεστό πηγμένο γάλα περιεκτικότητας 70% σε λιπαρά. Βρείτε πόσα κιλά νερό εξατμίστηκαν.

20) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

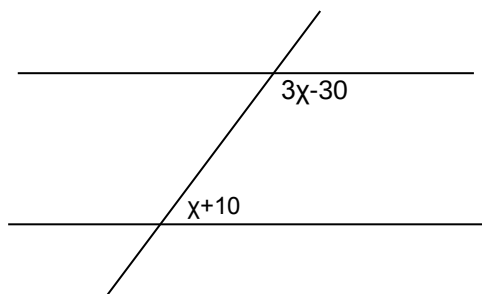
α) Στο παρακάτω ορθογώνιο βρείτε: α) το x β) την περίμετρο και το εμβαδό του ορθογωνίου.



β) Σε ορθογώνιο παρ/μο ΑΒΓΔ είναι $AB=2x+4$ και $BΓ=5x-1$ και η περιμέτρος του είναι 76 εκατοστά. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

γ) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι η γωνία Α διπλάσια της γωνίας Β ενώ η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β κατά 10 μοίρες. Να βρεθεί πόσες μοίρες είναι ηκάθε γωνία του τριγώνου.

δ) Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε είναι παράλληλη της δ. Βρείτε το χ.



ε) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις τις ΑΒ και ΓΔ η ΓΔ είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ΑΒ κατά 5 εκατοστά ενώ το ύψος του είναι 12 εκατοστά. Αν το εμβαδόν του είναι 210cm^2 να βρεθούν τα μήκη των βάσεων ΑΒ και ΓΔ.

21) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

α) Βρύση γεμίζει δεξαμενή σε 3 ώρες, άλλη την γεμίζει σε 6 ώρες και τέλος άλλη βρύση την αδειάζει σε 4 ώρες. Σε πόσες ώρες γεμίζει η δεξαμενή αν 1) Ανοίξουν ταυτόχρονα οι δύο πρώτες βρύσες. 2) Ανοίξουν και οι τρεις βρύσες ταυτόχρονα.

β) Δυο εργάτες σκάβουν ένα χωράφι σε 6 μέρες. Ο α εργάτης σκάβει μόνος το χωράφι σε 10 μέρες. Σε πόσες μέρες σκάβει μόνος το χωράφι ο β εργάτης;

γ) Σε μια βιομηχανία ομάδα 6 εργατών ανέλαβε να συσκευάσει 240 πακέτα προϊόντος. Κάθε ώρα συσκευάζει 10 πακέτα ο κάθε εργάτης. Μετά από 2 ώρες δύο εργάτες έφυγαν. Σε πόσες ώρες θα τελειώσουν οι υπόλοιποι εργάτες την συσκευασία;

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

22) Να λυθούν οι παρακατω ανισώσεις:

α) $3(x-1) + 4(5-2x) > 2x - 4(x+1)$

β) $5-[x+4(-2x+3)] < -(2x-5) + (-3x+1)$

γ) $-3(x+2) + x + 1 > 5x - 7(x-2)$

δ) $2x - (4x-3) < -2x + 9$

23) Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $-\frac{x}{3} - \frac{2}{-5} \leq x - \frac{4}{15}$

β) $1 - \frac{1-x}{2} \geq \frac{2-x}{4}$

γ) $-\frac{2x-1}{3} + \frac{1+x}{2} \leq 2x - \frac{x+2}{6}$

δ) $2x - 3 + \frac{x+2}{5} \geq \frac{x-(2+3x)}{2} - 4x + 7$

24) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $2x-1 > 5(x+3)$ και $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \leq x - \frac{x}{2}$

β) $x(2-x) + 4x > -x^2 + 12$ και $1-2x-(6x-3) < -4$

25) Να βρεθούν οι ακέραιες κοινές λύσεις των:

$-3x > x+6$ και $-2(x+2) < 16$

26) Αν $\alpha > 3$ αποδείξτε ότι $5\alpha + 18 > 33$

27) Αν $\alpha < -2$ αποδείξτε ότι $-4\alpha + 6 > 14$

28) Αν $\alpha > 4$ αποδείξτε ότι $-\alpha - 14 < -18$

29) α) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ τι συμπεραίνουμε για τα πρόσημα των α, β ($\beta \neq 0$);

β) Λύστε την ανίσωση $\frac{3}{x} \geq 0$

- γ) Λύστε την ανίσωση $\frac{-2}{x} > 0$
- δ) Λύστε την ανίσωση $\frac{x+1}{x-1} > 0$
- ε) Λύστε την ανίσωση $\frac{-4}{x+2} < 0$
- στ) Λύστε την ανίσωση $\frac{2-x}{x+4} < 0$

30) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- α) Να βρείτε τους τρεις πρώτους φυσικούς που το τριπλάσιο τους αν αυξηθεί κατά 5 είναι μεγαλύτερο του αριθμού 201.
- β) Αν ένας φυσικός ελλατωθεί κατά 5 και στην συνέχεια πολ/με το αποτέλεσμα επί το 3 προκύπτει φυσικός μικρότερος του 48 και μεγαλύτερος του 21. Βρείτε το φυσικό αυτό αριθμό.
- γ) Η αντοχή μιας γέφυρας είναι 8 τόνοι. Φορτηγό βάρους 3 τόνων είναι φορτωμένο με σωλήνες που ο καθένας ζυγίζει 200 κιλά. Πόσους το πολύ σωλήνες μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό και να περάσει την γέφυρα με ασφάλεια;
- δ) Μία κυρία ύψους 1,70m έχει βάρος 88 κιλά και υποβάλεται σε δίαιτα κατά την οποία χάνει κάθε μέρα 120γραμμάρια. Σε πόσες μέρες δίαιτας τουλάχιστον το βάρος της θα έχει πέσει κάτω από 60 κιλά;

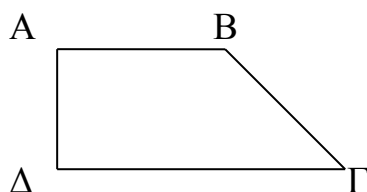
31) Να βρεθούν οι ακέραιοι που ικανοποιούν την σχέση:
 $-4 < 3x+2 < 18$

32) Ομοίως τη σχέση: $5 < |x| - 2 < 11$

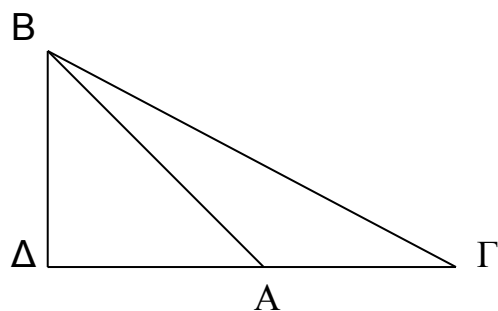


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ

- 1) Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ και κάθετες πλευρές ΑΓ, ΑΒ είναι $BΓ=15$ και $AΓ=9$. Βρείτε το μήκος της ΑΒ.
- 2) Τετράγωνο έχει περίμετρο 36 εκατοστά. Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου.
- 3) Ισοσκελές τρίγωνο έχει πλευρές $AB=AG=5\text{ cm}$ και $BΓ=6\text{ cm}$. Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ και το εμβαδόν του τριγώνου.
- 4) Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $AB=ΓΔ=8$ και $AΓ=BΔ=10$. Βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.
- 5) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ οι πλευρές έχουν μήκη $AB=BΓ=ΔΑ=5$ και $ΓΔ=11$. Να βρεθεί το ύψος του τραpezίου και το εμβαδόν του.
- 7) Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB=AD=3$ και $ΓΔ=7$. Βρείτε το μήκος της ΒΓ.



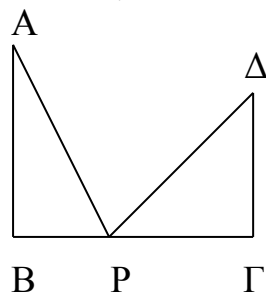
- 8) Σε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ είναι $AB=AG=\chi$ και $BΓ=\sqrt{72}$. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.
- 9) Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα τη $BΓ=\alpha$ και κάθετες πλευρές τις $AB=\gamma$ $AΓ=\beta$ ισχύει ότι $\alpha=2\gamma$ να αποδείξετε ότι $\beta^2=3\gamma^2$.
- 10) Στο παρακάτω σχήμα το ΒΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ > Αποδείξτε ότι: $BΓ^2 - AB^2 = ΔΓ^2 - ΔΑ^2$



11) Η διαγώνιος τετραγώνου είναι 4cm. Να βρείτε το εμβαδόν του.

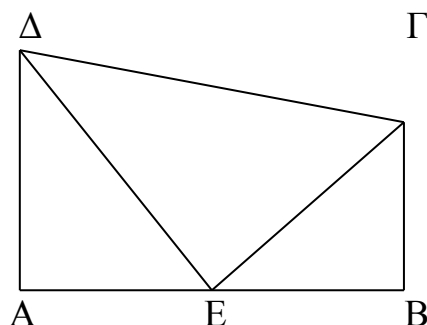
12) Ενός ορθογωνίου παρ/μου η διαγώνιος ΑΓ είναι 10cm και η πλευρά ΑΒ είναι 6cm. Ενώνουμε την κορυφή Α με το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ. Βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που φτιάχνουμε με πλευρά την ΑΕ.

13) Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB=9$ $BΓ=8$ $AP=\sqrt{85}$ $ΔΓ=7$. Υπολογίστε το ΡΔ.



14) Στο παρακάτω σχήμα είναι το Ε μέσο της ΑΒ. Αποδείξτε ότι:

$$\Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + \frac{AB^2}{2}$$



15) Στα παρακάτω τρίγωνα δίνονται τα μήκη των πλευρών τους. Ελέγξτε ποια από αυτά είναι ορθογώνια.

α) ΑΒΓ με $\alpha=6$ $\beta=8$ $\gamma=10$. β) ΚΛΜ με $\kappa=5$ $\lambda=13$ $\mu=12$.

γ) ΠΡΣ με $\pi=10$ $\rho=7$ $\sigma=5$ δ) ΑΒΓ με $\alpha=3\rho$ $\beta=4\rho$ $\gamma=5\rho$ όπου

ρ θετικός αριθμός. ε) ΔΕΖ με $\epsilon=9$ $\delta=8$ $\zeta=\sqrt{17}$

16) Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ που χωρίζει την ΒΓ στα τμήματα ΔΒ ΔΓ με μήκη $\Delta B=16$ $\Delta\Gamma=9$ ενώ το ύψος ΑΔ έχει μήκος 24. Αποδείξτε ότι το ΑΒΓ

είναι ορθογώνιο.

17) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{\frac{1}{16}} \quad \beta) \sqrt{\frac{81}{64}} \quad \gamma) \sqrt{\frac{4}{25}} \quad \delta) \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \quad \varepsilon) \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} \quad \sigma\tau) \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

18) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{6-2} + \sqrt{12-4} - \sqrt{15+1} \quad \beta) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$$

$$\gamma) (\sqrt{3})^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \quad \delta) \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$$

19) Αν $\sqrt{2} = 1,414$ υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{8} \quad \beta) \sqrt{50} \quad \gamma) \sqrt{200} \quad \delta) \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{49}}$$

20) Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\beta) 7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$$

$$\gamma) 2 - \sqrt{5} + 7 + 3\sqrt{5} + 9 + 8\sqrt{5} = 18 + 10\sqrt{5}$$

$$\delta) \sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{5} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 7\sqrt{2}$$

$$\varepsilon) \sqrt{7} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 5\sqrt{7} - 12\sqrt{2}$$

$$\sigma\tau) 2(\sqrt{2} - 1) + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - 2$$

$$\zeta) -3(\sqrt{2} - 1) + 5(3 - \sqrt{2}) + 8\sqrt{2} = 18$$

$$\eta) 4(-2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 1) + (5 - 2\sqrt{5}) - 3(7 + 2\sqrt{2}) = -14\sqrt{2} + 10\sqrt{5} - 12$$

21) Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) \sqrt{8} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$$

$$\beta) \sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3}$$

$$\gamma) (\sqrt{8} + \sqrt{2})(\sqrt{18} + \sqrt{50}) = 48$$

$$\delta) \frac{\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}} = 4$$

$$\varepsilon) \sqrt{32} - 5\sqrt{18} + 7\sqrt{8} - 2\sqrt{50} = -7\sqrt{2}$$

22) Αν $\chi=4$ και $\psi=-2$ βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{3\chi + 4} - \sqrt{-2\psi} + \sqrt{2\chi + 4\psi}$$

23) Αποδείξτε κάθε φορά ότι τα παρακάτω ζεύγη αριθμών είναι αντίστροφοι αριθμοί:

$$\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \sqrt{2} \quad \beta) \sqrt{2} + 1 \text{ και } \sqrt{2} - 1$$

24) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $2(\chi + \sqrt{2}) + 5\sqrt{2} - 3\chi = 4\chi + 7\sqrt{2}$

β) $-3(2\sqrt{5} + 2\chi) + 4(2\chi - 1) = 3\sqrt{5} - 2(5 + \chi - 3\sqrt{5})$

γ) $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + 2\chi - 3(\chi + 1) = 0$

δ) $\sqrt{2}(\chi - 3) + 5\chi - 3 - (2\sqrt{2}\chi + 6) = -2(\chi - 3\sqrt{2})$

ε) $\sqrt{x} + 4 + 3\sqrt{x} = 8$

στ) $\sqrt{7x + 2} = 3$

25) Δίνεται το σημείο M(3,4). Να βρείτε την απόσταση του σημείου M

α) από τον άξονα χ'χ. β) από τον άξονα ψ'ψ.

γ) από την αρχή των αξόνων.

26) Υπολογίστε τις ίδιες αποστάσεις που είναι στην άσκηση 25 για τα σημεία A(-6,8) και B(0,-4).

27) Να υπολογίσετε το μήκος AB στα παρακάτω ερωτήματα:

α) AB όπου A(1,5) και B(5,1)

β) AB όπου A(-2,4) και B(3,1)

γ) AB όπου A(-2,-5) και B(1,1)

28) Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ABΓ που έχει για κορυφές τα σημεία:

A(7,0) B(0,24) ΓΓ(-10,0)

29) Να βρείτε όλα τα σημεία του επιπέδου που έχουν:

α) τετμημένη 2

β) τετμημένη 0

γ) τεταγμένη 4

δ) τεταγμένη 0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ- ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ και $AB=8$ $AG=6$. Βρείτε τις εφαπτομένες των Β και Γ και αποδείξτε ότι $\epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma = 1$

2) Εστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ και $AB=\gamma$ $AG=\beta$.

Αποδείξτε ότι

$$\epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma = 1$$

α)

$$\beta) \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \frac{\alpha^2}{\beta \cdot \gamma}.$$

$$\gamma) \frac{1 + (\epsilon\phi \Gamma)^2}{(\epsilon\phi \Gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}$$

$$\delta) \left(\frac{\beta}{\alpha} \epsilon\phi \Gamma\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} \epsilon\phi B\right)^2 = 1$$

3) Να κατασκευάσετε γωνία ω ώστε να χει α) $\epsilon\phi \omega = 1$ β) $\epsilon\phi \omega = 0,4$

4) Σε τρίγωνο ΚΛΜ με $K=90^\circ$ είναι $\epsilon\phi \Lambda = 0,5$ και $KL=10$. Υπολογίστε τις ΚΜ και ΛΜ.

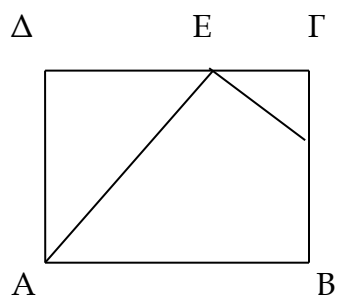
5) Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ στην ΑΓ ώστε να ισχύει $\epsilon\phi AB\Gamma = 2$ και $\epsilon\phi AB\Delta = 1,2$. Αν $A=90^\circ$ και $AB=10$ να βρείτε το μήκος ΔΓ.

6) Εστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ και $\epsilon\phi \Gamma = 1$. Αποδείξτε ότι:

α) $AB=AG$ β) $\epsilon\phi B = 1$.

7) Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 φέρτε το ύψος από μία κορυφή και υπολογίστε τις $\epsilon\phi 30^\circ$ και $\epsilon\phi 60^\circ$.

8) Στο παρακάτω τετράγωνο που έχει πλευρά $AB=10$ είναι $\epsilon\phi AE\Delta = 1,6$ και $\epsilon\phi GEZ = 1,5$. Υπολογίστε το εμβαδό του ΑΕΖΒ.



9) Στο ορθογώνιο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ παίρνουμε σημείο Μ στην ΑΓ έτσι ώστε $2 \epsilon\phi ABM = \epsilon\phi B$. Αποδείξτε ότι το Μ είναι μέσο της ΑΓ.

10) Στο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ ισχύει $\frac{AB}{AG} = \frac{3}{7}$. Βρείτε το λόγο $\frac{\epsilon\phi \Gamma}{\epsilon\phi B}$.

11) Τρίγωνο ΚΛΜ έχει πλευρές με μήκη $\kappa=37$ $\lambda=35$ και $\mu=12$.

α) Αποδείξτε ότι είναι ορθογώνιο. β) Βρείτε τους τριγωνομετρικούς

αριθμούς των οξείων γωνιών του τριγώνου.

12) Το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle A=90^\circ$ $AB=5$ και $\eta\mu\Gamma=1/2$.
Βρείτε τις άλλες πλευρές του τριγώνου.

13) Το $\triangle EZ$ είναι ορθογώνιο με $\angle \Delta=90^\circ$ $\Delta E=12$ και $\angle E=40^\circ$ μοίρες.
Βρείτε τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

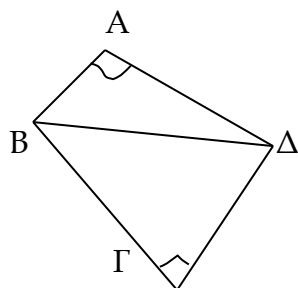
14) Κατασκευάστε γωνία ω που να 'χει:
α) $\eta\mu\omega=3/5$ β) $\sigma\upsilon\nu\omega=5/9$

15) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB, \Gamma\Delta$ είναι $AB=5$ $\Gamma\Delta=9$
και $\sigma\upsilon\nu\Delta=0,5$. Βρείτε το εμβαδό του τραπέζιου.

16) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς a . Ενώνουμε την κορυφή Γ με το μέσο E της πλευράς AD . Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $E\Gamma\Delta$.

17) Στο ορθογώνιο $AB\Gamma$ με $\angle A=90^\circ$ και πλευρές a, b, γ , αποδείξτε τις σχέσεις:
α) $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$ β) $\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$ γ) $\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} = \sigma\phi B$

18) Στο παρακάτω σχήμα είναι $\angle A = \angle \Gamma = 90^\circ$ μοίρες $\Gamma\Delta = 20$ cm και η γωνία $\Gamma B\Delta = 30^\circ$ μοίρες ενώ η γωνία $\angle A\Delta B = 40^\circ$ μοίρες. Να βρεθεί το μήκος της AD .

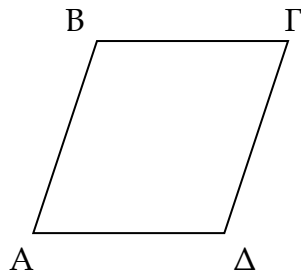


19) Ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετη στις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$. Αν $AB=15$ $A\Gamma=36$ και $A\Delta=85$ να βρείτε τα $\eta\mu A\Gamma B$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma\Delta A$

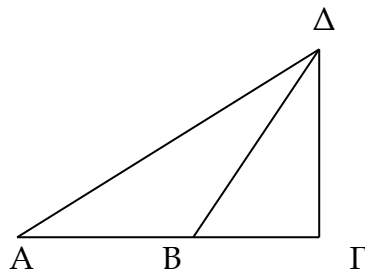
20) Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με μεγάλη βάση AB και μικρή βάση την $\Gamma\Delta$ είναι $AB=20$ $A\Delta=B\Gamma=5$ και $\angle A=30^\circ$ μοίρες. Να βρεθεί το ύψος του τραπέζιου και το μήκος της $\Delta\Gamma$.

21) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\angle A=30^\circ$ και $\angle \Gamma=45^\circ$ μοίρες. Φέρνουμε το ύψος $B\Delta$ του τριγώνου. Να βρείτε τις πλευρές $B\Gamma$ και AB αν είναι $B\Delta=10$ cm.

22) Στο παρακάτω σχήμα $\angle A=60^\circ$ μοίρες και $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta A=10$ cm. Να βρεθεί
α) Το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$. β) Το μήκος των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$.



23) Στο παρακάτω σχήμα είναι $A=30$ μοίρες $B=60$ μοίρες $\Gamma=90$ μοίρες και $AB=24$ μέτρα.. Να βρεθεί το μήκος του $\Gamma\Delta$.



24) Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη $B\Delta$ και $\Gamma\Lambda$. α) Δικαιολογήστε ότι $B\Delta = BA \cdot \eta\mu A$ και $\Gamma\Lambda = \Gamma A \cdot \eta\mu A$. β) Αποδείξτε ότι $\frac{B\Delta}{\Gamma\Lambda} = \frac{AB}{\Lambda\Gamma}$

25) Αν για τις οξείες γωνίες ω, ϕ, χ ξέρουμε ότι $\omega < \phi < \chi$ διατάξτε τα:
α) $\eta\mu\omega, \eta\mu\chi, \eta\mu\phi$ β) $\sigma\upsilon\nu\omega, \sigma\upsilon\nu\phi, \sigma\upsilon\nu\chi$ γ) $\epsilon\phi\omega, \epsilon\phi\phi, \epsilon\phi\chi$. (Θεωρία)

26) Βάλτε το κατάλληλο συμβολο διάταξης στα παρακάτω ζεύγη:
α) $\eta\mu 15 \eta\mu 46$ β) $\sigma\upsilon\nu 36 \sigma\upsilon\nu 47$ γ) $\epsilon\phi 45 \epsilon\phi 67$ δ) $\eta\mu 80 1$

27) Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\eta\mu 30 + \sigma\upsilon\nu 60 - \epsilon\phi 45$ β) $\sigma\upsilon\nu^2 30 + \eta\mu^2 60 - 2 \epsilon\phi^2 60$

γ) $\epsilon\phi^2 45 \eta\mu 60 \epsilon\phi 30 \epsilon\phi^2 60$ δ) $-2\epsilon\phi^2 30 + 5 \eta\mu 30 + \sigma\upsilon\nu 60 - 7 \epsilon\phi 45$

ε) $\frac{\eta\mu 45 - \eta\mu 30}{\sigma\upsilon\nu 45 + \sigma\upsilon\nu 60}$ στ) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 30 + \sigma\upsilon\nu^2 45 + \sigma\upsilon\nu^2 60}{\eta\mu^2 30 + \eta\mu^2 45 + \eta\mu^2 60}$

ζ) $\eta\mu 60 \cdot \sigma\upsilon\nu 30 - \sigma\upsilon\nu 60 \cdot \eta\mu 30 + \epsilon\phi 45 \cdot \epsilon\phi 30$

28) Έστω ω οξεία γωνία ορθογώνιου τριγώνου. Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi\omega = \eta\mu\omega$ β) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi\omega + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \frac{1}{\epsilon\phi\omega} = 1$

γ) $1 - \eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega$ δ) $(1 + \epsilon\phi^2\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

29) α) Το ημίτονο οξείας γωνίας ω ποιες αριθμητικές τιμές μπορεί να πάρει; β) Αν ω οξεία γωνία βρείτε τον αριθμό χ ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\eta\mu\omega = 2\chi + \frac{\chi + 1}{2} - 1$$

30) Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ισούται με $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B$.

31) Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Με τη βοήθεια του σχήματος αποδείξτε ότι: $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

32) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $A=90^\circ$ και $\frac{\eta\mu B}{3} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\sqrt{3}}$.

α) Αποδείξτε ότι $\beta = \sqrt{3} \cdot \gamma$. β) Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών B και Γ .

33) Στο $AB\Gamma$ είναι $A=120^\circ$ μοίρες και $AB=6$ $A\Gamma=8$. Φέρνοντας το ύψος $\Gamma\Delta$ υπολογίστε την πλευρά $B\Gamma$.

34) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{2} \cdot \eta\mu 45^\circ \chi + 3 \eta\mu 60^\circ = (\eta\mu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ) \chi - 4 \epsilon\phi 60^\circ$$

36) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=90^\circ$. Αποδείξτε ότι

α) Περίμετρος του $AB\Gamma = \alpha (1 + \eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B)$

β) Περίμετρος του $AB\Gamma < 3\alpha$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Να εκφράσετε το εμβαδό E ενός τετραγώνου ως συνάρτηση :

α) της πλευράς του χ β) της περιμέτρου του P .

2) Ένα ορθογώνιο παρ/μο έχει την μεγαλύτερή του πλευρά αυξημένη κατά 2 εκατοστά από την μικρότερη. Εκφράστε :

α) Το εμβαδό E ως συνάρτηση της μικρής πλευράς του χ .

β) την περίμετρο P ως συνάρτηση της μικρής πλευράς του χ .

3) Δύο αριθμοί ψ και χ με $\psi > \chi$ έχουν διαφορά 10. Εκφράστε το ψ ως συνάρτηση του χ .

4) Η απόσταση Πειραιάς Χανιά είναι 350 km. Ένα πλοίο ξεκινάει από το Πειραιά με ταχύτητα 25 km την ώρα. Εκφράστε την απόσταση του πλοίου Από τα Χανιά σε συνάρτηση του χρόνου που ταξιδεύει το πλοίο.

5) Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα μήκους 10cm και κάθετη πλευρά μήκους χ cm. Εκφράστε την τρίτη πλευρά ψ του τριγώνου ως συνάρτηση του χ . Επιπλέον εκφράστε το εμβαδό E και την περίμετρο P σαν συνάρτηση του χ .

6) Έστω η συνάρτηση $\psi = 2\chi + 3$. Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών.

χ	-5	12		
ψ			25	121

7) Έστω η συνάρτηση $\psi = 2^x + 2^{-x}$. Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών.

X	0	1	2	3
ψ				

8) Έστω η συνάρτηση $\psi = \alpha\chi + \beta$. Βρείτε τα α, β αν ισχύει ο εξής πίνακας τιμών:

X	0	2	7	12
ψ	3	13	38	63

9) Έστω η συνάρτηση $\psi = \alpha\chi^2$. Αν για $\chi = 2$ η αντίστοιχη τιμή είναι $\psi = 12$, τότε:

α) Βρείτε τον αριθμό α . β) Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

X	-3	-2	1	4
ψ				

10) Βρείτε σε ποια σημεία τέμνουν οι παρακάτω συναρτήσεις τους άξονες $\chi' \chi$ και

$\psi' \psi$: α) $\psi = 2\chi$ β) $\psi = \chi + 1$ γ) $\psi = 6 - 3\chi$ δ) $\psi = 4 + \frac{\chi}{2}$ ε) $\psi = \frac{\chi}{3} - \frac{1}{2}$

11) Έστω ο πίνακας αναλόγων ποσών

X	4	1	6	9
Ψ	60	15	90	135

- Α) Να βρεθεί η συνάρτηση που συνδέει τα παραπάνω ανάλογα ποσά.
 β) Να γίνει η γραφική παράσταση.

12) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\psi = \chi$ και $\psi = -\chi$
 α) Τα σημεία (1,1) και (-1, 1) είναι πάνω στις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων

β) Δικαιολογήστε ότι οι δυο παραπάνω ευθείες τέμνονται κάθετα.

13) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων $\psi = \chi + 1$ και $\psi = -\chi + 1$ και βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

14) Βρείτε τα κοινά σημεία των παρακάτω συναρτήσεων

α) $\psi = \chi$ και $\psi = 2\chi + 5$ β) $\psi = 3\chi + 5$ και $\psi = \chi + 7$ γ) $\psi = 2\chi + 6$ $\psi = 3\chi + 14$

15) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\frac{x+2}{3} = \frac{2x}{5}$ β) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{5}$ γ) $\frac{3}{x+1} = \frac{5}{2(x-1)}$

16) Να βρείτε το α ώστε οι ευθείες $\psi = 2\chi + 8$ και $\psi = \alpha\chi + 1$ να ναι παράλληλες.
 Ομοίως για τις ευθείες $\psi = 2\chi + 1$ και $\psi = (3\alpha + 4)\chi$

17) Για την εκδρομή της Β Γυμνασίου ρωτήσανε δύο ταξιδιωτικά γραφεία.
 Το πρώτο θέλει 100 ευρώ εγγύηση και 60 ευρώ για κάθε άτομο. Το δεύτερο θέλει 200 ευρώ εγγύηση και 55 ευρώ για κάθε άτομο. α) Να βρεθούν Τι λεφτά θα πληρωθούν για χ μαθητές σε κάθε πρακτορείο. β) Να βρεθεί σε πόσα άτομα συμφέρει το πρώτο πρακτορείο και σε πόσα συμφέρει το δεύτερο ενώ σε πόσα άτομα θα πληρώσουν τα ίδια λεφτά και στα δύο πρακτορεία.

18) Ένα έργο συμφωνήθηκε να τελειώσει σε 25 μέρες. Αν 6 εργάτες εκτελεσαν το μισό έργο σε 10 μέρες πόσοι εργάτες πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να τελειώσει το υπόλοιπο έργο στην προθεσμία των 25 ημερών

19) Ένας εργάτης όταν εργάζεται 8 ώρες την ημέρα τελειώνει ένα έργο σε 7 ημέρες. Σε πόσες μέρες θα τελειώσει το ίδιο έργο αν εργάζεται 12 ώρες την ημέρα.

20) Το Κοργιαλλένιο Ιδρυμα θα μοιράσει 1100 ευρώ στους 3 αριστεύσαντες της Β Γυμνασίου αναλογα με το βαθμό τους. Αν οι τρεις πρώτοι συγκέντρωσαν αντίστοιχα 20, 18, 17 να βρείτε τι λεφτά θα πάρει ο καθένας.

21) Χωρίστε τον αριθμό 256 σε τρεις θετικούς αριθμούς που να 'ναι ανάλογοι των αριθμών 4, 7, και 5.

22) Να βρείτε για ποιες τιμές του χ ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις

α) $\psi = 3\chi - 5$ β) $\psi = \frac{2}{x}$ γ) $\psi = \frac{-3}{x-5}$ δ) $\psi = \frac{1}{2x-8}$ ε) $\psi = \frac{3}{6+2x}$

23) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η συνάρτηση $\psi = \frac{\alpha-5}{x}$ έχει

την γραφική της παράσταση στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

24) Έστω οι συναρτήσεις: $\psi = (\beta + 1)x - 2$, $\psi = \frac{a - 1}{x}$

α) Βρείτε την τιμή του αριθμού a και β στις παραπάνω συναρτήσεις ώστε αυτές να διέρχονται από το σημείο $(2, 1)$ β) Κατόπιν κάντε την γραφική τους παράσταση και βρείτε, αν έχουν, και τις συντεταγμένες άλλων κοινών σημείων τους.

25) 50 κατασκηνωτές έχουν τροφές για 30 μέρες. Μετά από 10 μέρες έρχονται άλλοι 30 κατασκηνωτές χωρίς τρόφιμα. α) Αν συνεχίσουν να τρώνε όλοι την ίδια ποσότητα φαγητού για πόσες μέρες φτάνουν τα τρόφιμα; β) Αν συμφωνήσουν να τρώνε όλοι τη μισή μερίδα από αυτή που τρώγανε τις 10 πρώτες μέρες βρείτε πόσες μέρες θα τους φτάσουν τα τρόφιμα.

26) 18 μέτρα ύφασμα στοιχίζουν 45 ευρώ. Αν αγοράσουμε 52 μέτρα ύφασμα τι θα πληρώσουμε;

27) α) Σχεδιάστε τις ευθείες $\psi = \chi$ και $\psi = 3\psi - 6$. β) Βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου. γ) Βρείτε το εμβαδό των τριγώνων που έχουν σχηματιστεί.

28) Βρείτε την εξίσωση των ευθειών που:

α) περνάει από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία 30 μοίρες με τον άξονα $O\chi$.

β) είναι παράλληλη στην παραπάνω ευθεία και τέμνει τον $\psi' \psi$ στο σημείο $(0, -3)$

γ) έχει τύπο $\psi = 2\chi + \kappa$ και η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $(3, 14)$

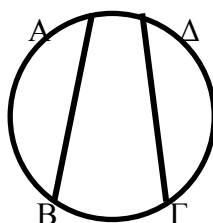
29) Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\chi}{\psi}$ αποδείξτε ότι:

α) $\frac{\alpha + 2\gamma + 3\chi}{\beta + 2\delta + 3\psi} = \frac{\alpha}{\beta}$ β) $\frac{4\alpha - 7\gamma}{4\beta - 7\delta} = \frac{\chi}{\psi}$

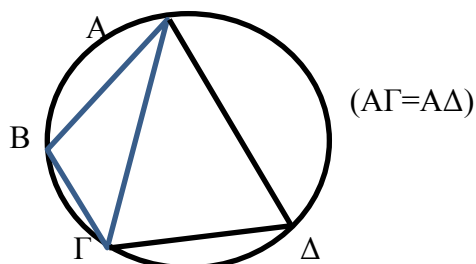
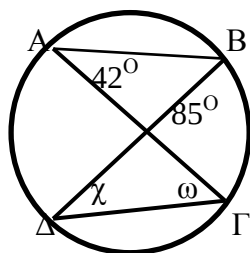
γ) $\frac{\alpha + \gamma - \chi}{\beta + \delta - \psi} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \gamma\chi}{\beta^2 + \delta\psi}}$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

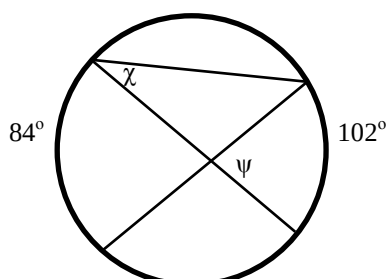
- 1) Σε κύκλο με κέντρο O πάρτε διάμετρο $ΑΓ$ και σημείο B έτσι ώστε το τόξο $BΓ=35^\circ$. Βρείτε τα τόξα AB και $ΑΓB$.
- 2) Σε κύκλο (O, ρ) παίρνουμε διαδοχικά 4 σημεία A, B, Γ, Δ ώστε $AB=95^\circ$, $BO\Gamma=42^\circ$ και $\Gamma O\Delta=60^\circ$. α) Υπολογίστε τη γωνία $ΑΟ\Delta$.
β) Αν M, N τα μέσα των τόξων AB και $\Gamma\Delta$ βρείτε ποσες μοίρες είναι το τόξο MN .
- 3) Σε κύκλο πάρτε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ, Δ ώστε τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ να ναι ίσα. Δικαιολογήστε ότι $ΑΓ=B\Delta$.
- 4) Σε κύκλο παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ ώστε τα τόξα $AB, B\Gamma, \Gamma A$ να ναι ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5. Βρείτε πόσες μοίρες είναι το κάθε τόξο.
- 5) Σε κύκλο (O, ρ) παίρνουμε 3 σημεία A, B, Γ ώστε οι χορδές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ να ναι ίσες. Υπολογίστε τα τόξα $AB, B\Gamma, \Gamma A$ και $ΑΓB$.
- 6) Σε κύκλο (O, ρ) παίρνουμε 3 σημεία A, B, Γ ώστε $AB=\chi$, $B\Gamma=2\chi$, $\Gamma A=3\chi-40$. Βρείτε το χ . Βρείτε πόσες μοίρες είναι τα παραπάνω τόξα.
- 7) Σε κύκλο (O, ρ) παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ ώστε $AB=2\chi$, $B\Gamma=3\chi+10$ και $\Gamma A=\chi+50$. Αποδείξτε ότι οι χορδές AB και ΓA είναι ίσες.
- 8) Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB=\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda=60^\circ$, $B\Gamma=40^\circ$. α) Υπολογίστε τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$. β) Αν M, N , μέσα των τόξων AB και $\Gamma\Delta$ υπολογίστε τη γωνία MON .



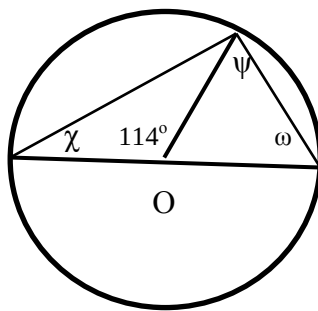
- 9) Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες που σημειώνονται.



- 10) Στο σχήμα βρείτε τις γωνίες χ και ψ .



- 11) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τα χ και ψ και ω . Το O είναι το κέντρο του κύκλου

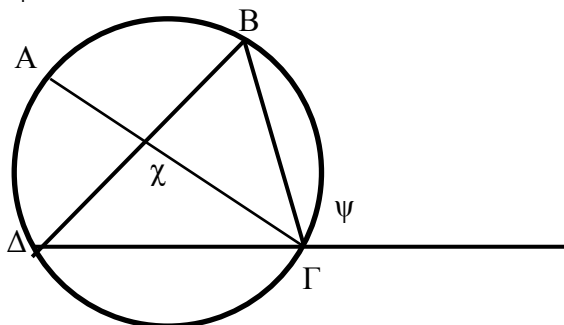


12) Σε κύκλο (O, ρ) πάρτε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ, Δ . Αν $\Delta \Gamma B = 150^\circ$ και $AB \Gamma = 120^\circ$ βρείτε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB \Gamma \Delta$.

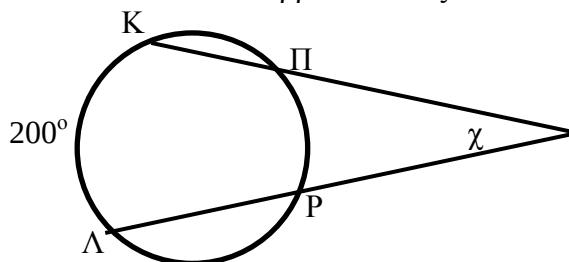
13) Σε κύκλο (O, ρ) φέρτε διάμετρο AB και στο ένα ημικύκλιο πάρτε σημείο Γ ώστε $\Gamma B A = 30^\circ$. Α) Φέρτε την ακτίνα $O \Gamma$ και δικαιολογήστε ότι $\Gamma A = \rho$.

β) Δείξτε ότι $\Gamma B = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho$

14) Στο σχήμα τα τόξα $AB, B \Gamma$ είναι $AB = 70^\circ$ και $B \Gamma = 120^\circ$ και η γωνία $\Delta B \Gamma$ είναι $\Delta B \Gamma = 40^\circ$. Βρείτε τις γωνίες χ και ψ .



15) Στο σχήμα είναι $\chi = 40^\circ$ και $\angle K \Lambda = 200^\circ$. Να βρείτε το τόξο ΠP .



16) Εστω το τετράπλευρο $AB \Gamma \Delta$ με κορυφές σημεία κύκλου. Αν $\Gamma A B = 45^\circ$ $\Delta B \Gamma = 40^\circ$ $B \Gamma A = 30^\circ$ βρείτε τις γωνίες του $AB \Gamma \Delta$.

17) Η AB είναι διάμετρος ενός κύκλου και τα σημεία Γ, Δ, E είναι σημεία του ίδιου ημικυκλίου AB . Να αποδείξετε ότι $\angle A \Gamma \Delta + \angle \Delta E B = 270^\circ$.

18) Οι κορυφές ενός τετραγώνου $AB \Gamma \Delta$ είναι σημεία ενός κύκλου. Αν E είναι τυχαίο σημείο του μικρού τόξου AB να αποδείξετε ότι $\angle A E B = 3 \angle B E \Gamma$.

19) Σε κύκλο κέντρου O παίρνουμε 2 παράλληλες και ίσες χορδές AB και $\Gamma \Delta$. Δικαιολογήστε ότι οι χορδές $A \Delta$ και $B \Gamma$ είναι διάμετροι του κύκλου.

20) Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $\rho = 7$ και $R = 9$ cm. Να βρείτε το εμβαδόν

της επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ των δύο ομόκεντρων κύκλων.

21) Το μήκος ενός κύκλου είναι $\Gamma = 37,68 \text{ cm}$. Βρείτε την ακτίνα και τη διαμετρό του.

22) Πόσες φορές μεγαλώνει α) το μήκος β) το εμβαδόν ενός κύκλου αν διπλασιάσουμε την ακτίνα του;

23) Το παρακάτω σχήμα είναι κάτοψη γηπέδου που αποτελείται από ένα παραλληλόγραμμο και δύο ημικύκλια. Να βρείτε την περίμετρό του και το εμβαδό του. Δίνεται ότι $AB = 100 \text{ μ.}$ και $B\Gamma = 40 \text{ μ.}$



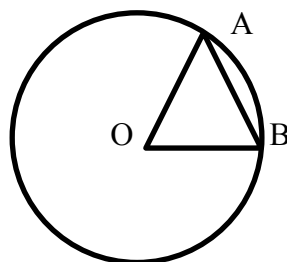
24) Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς 12 cm . Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

25) Με διαμέτρους τις πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου κατασκευάζουμε ημικύκλια εξωτερικά του τριγώνου. Αν η πλευρά του τριγώνου είναι 8 cm βρείτε το εμβαδό και την περίμετρο του σχήματος που προκύπτει.

26) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

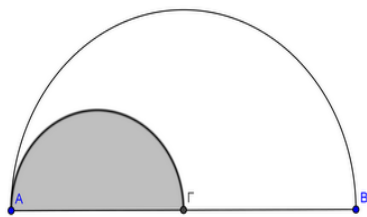
Ακτίνα κύκλου	Τόξο AB σε μοίρες	Τόξο AB σε ακτίνια	Μήκος του Τόξου AB	Εμβαδό του κ.τομέα OAB
10 cm	90°			
8 cm		$\frac{2\pi}{3}$		
	60°		18π	

27) Βρείτε το εμβαδό του τμήματος που βρίσκεται μεταξύ της χορδής AB και του τόξου AB αν η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι $O = 60^\circ$ και η ακτίνα του κύκλου είναι 12 cm .

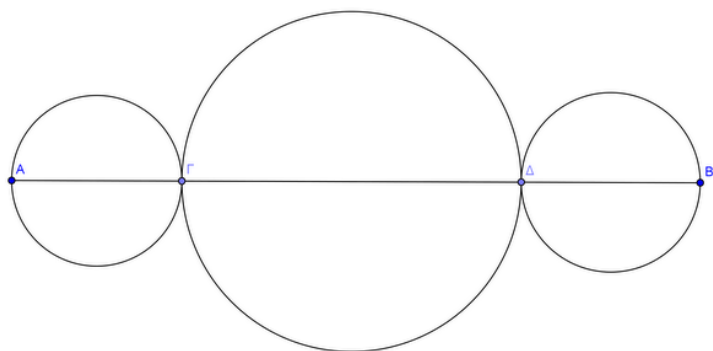


28) Εστω ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 20 \text{ cm}$ κέντρου Γ . Με διάμετρο τη $A\Gamma$

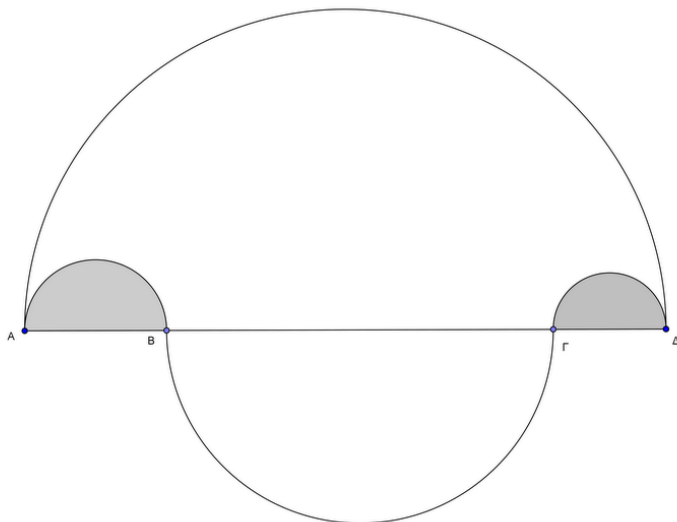
γράφουμε ημικύκλιο όπως στο σχήμα. Βρείτε το εμβαδό και την περίμετρο του <<λευκού>> μέρους του σχήματος.



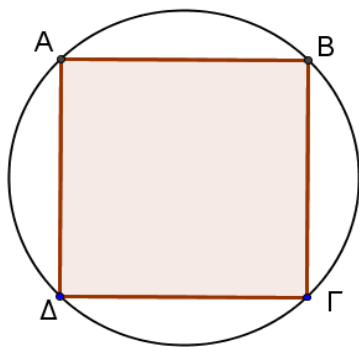
29) Στο παρακάτω σχήμα $AB=40$ cm και οι κύκλοι δεν έχουν ίσες διαμέτρους. Βρείτε τη συνολική περίμετρο των κύκλων του σχήματος.



30) Στο σχήμα είναι σχεδιασμένα ημικύκλια. Να βρείτε το εμβαδό και τη περίμετρο του λευκού μέρους του σχήματος. Δίνεται ότι $AB=10$ εκ, $ΓΔ=8$ εκ, και $BΓ=20$ εκ.



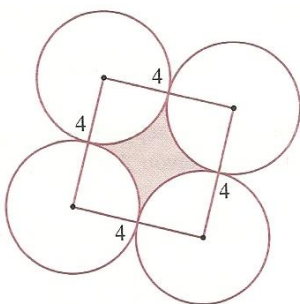
31) Το $ABΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο σε κύκλο κέντρου O . Αν η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος $4\sqrt{2}$ cm να βρείτε: α) την ακτίνα του κύκλου β) το εμβαδό του λευκού μέρους του σχήματος.



32) Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους στα παρακάτω σχήματα.

α)

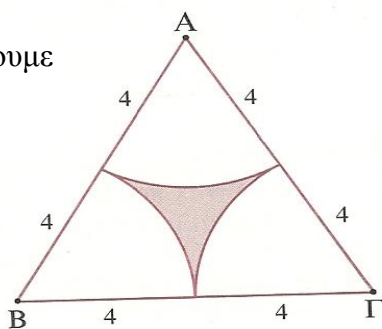
των



Στο σχήμα εμφανίζονται 4 εφαπτόμενοι κύκλοι κι ένα τετράγωνο πλευράς 8 που οι κορυφές του είναι τα κέντρα κύκλων

β)

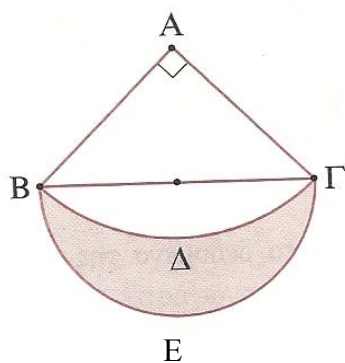
έχουμε



Το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και με κορυφές τα A, B, Γ

τόξα κύκλων ακτίνας 4 εκ.

γ)



Το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($\angle A = 90^\circ$). Διαγράφουμε τα τόξα $B\Delta\Gamma$ που έχει κέντρο το A και $BE\Gamma$ που έχει κέντρο το μέσο του $B\Gamma$. Αν $B\Gamma = 10\sqrt{2}$ εκ βρείτε το γραμμοσκιασμένο εμβαδό.