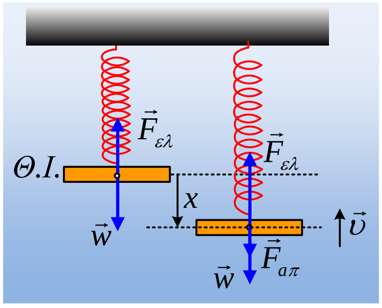
ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ή χορεύοντας στο σκοτάδι

Σώμα μάζας m ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $A_o=3mg/k$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και το αφήνουμε να ταλαντωθεί τη στιγμή $t_o=0$, θεωρώντας θετική φορά προς τα κάτω. Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας x=0, εξαιτίας της δράσης δύναμης απόσβεσης της μορφής $F_{απ}=-bυ$, όπου υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητάς του και b θετική σταθερά.



Α) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

Ι) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται για 1η φορά από την αρχική θέση ισορροπίας του x=0, έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά στη διάρκεια της 1ης περιόδου

ΙΙ) Τη στιγμή t_1 όπου το σώμα κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα $υ_1$, πλησιάζοντας για 1η φορά την αρχική θέση ισορροπίας του, έχοντας απομάκρυνση $x_1=-\frac{bυ_1}{k}$ απ' αυτή:

α) μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος

β) μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος που οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς

γ) ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας του σώματος είναι ίσος με $-bυ_1^2$

ΙΙΙ) Όσες φορές περνά από τη θέση με απομάκρυνση $x_2=\frac{mg}{k}$ έχει ταχύτητα ίσου μέτρου

Β) Τη χρονική στιγμή $t_α=4T$, όπου Τ η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης, η ενέργεια του ταλαντωτή είναι ίση με $\frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k}$ Να βρείτε την ενέργεια του ταλαντωτή όταν περάσει χρονικό διάστημα Δt=8T, μετά τη χρονική στιγμή $t_α$, καθώς και το έργο της δύναμης απόσβεσης στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_α$ =4T, μέχρι τη στιγμή $t_α$ + Δt

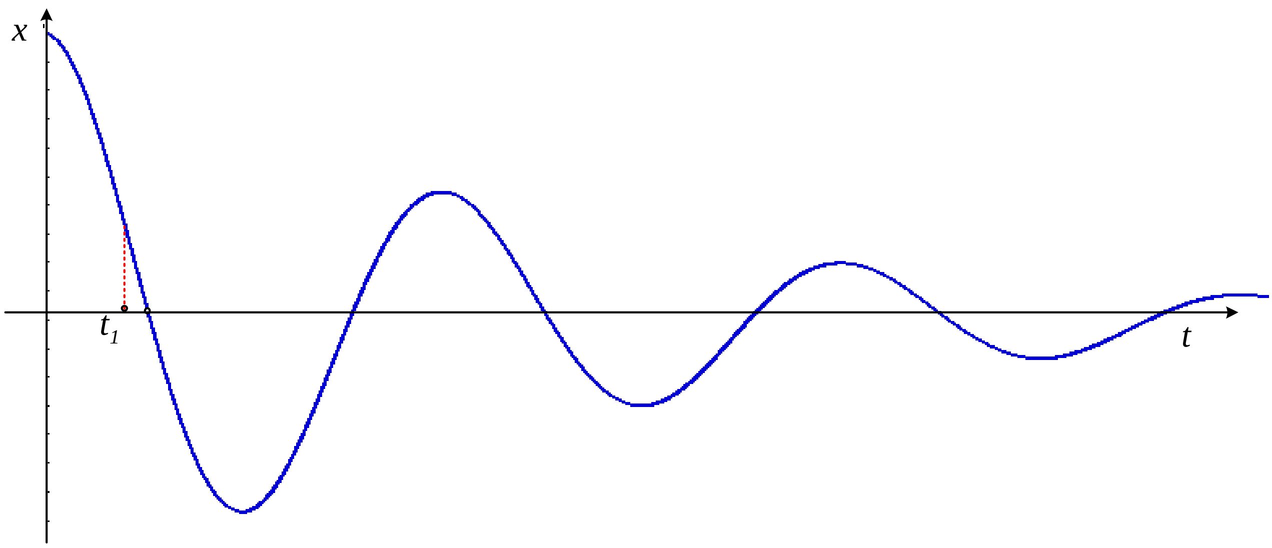
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{επαν}$=-kx και δύναμης απόσβεσης $F_{απ}$=-bυ. Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} + F_{\alpha\pi} \Leftrightarrow ma = -kx - b\upsilon \quad (1)$$

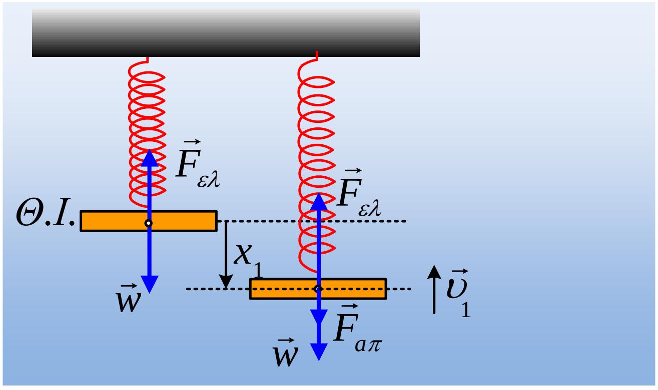
Ι) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται για 1η φορά από την αρχική θέση ισορροπίας του x=0, έχει επιτάχυνση: (1) $\Rightarrow ma = -b\upsilon \Rightarrow a = \frac{-b\upsilon}{m} \neq 0$

Άρα το σώμα όταν διέρχεται από τη θέση x=0, δεν έχει μέγιστη ταχύτητα και κατά συνέπεια δεν έχει μέγιστη κινητική ενέργεια. Η πρόταση είναι **λανθασμένη**



ΙΙ) Τη στιγμή t_1 όπου το σώμα κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα $υ_1$, πλησιάζοντας για 1η φορά την αρχική θέση ισορροπίας του, έχοντας απομάκρυνση $x_1 = -\frac{b\upsilon_1}{k}$ απ' αυτή (*), ισχύει: (1) $\Rightarrow ma = -k(-\frac{b\upsilon_1}{k}) - b\upsilon_1 \Rightarrow ma = b\upsilon_1 - b\upsilon_1 = 0 \Rightarrow a = 0$

(*) Εφόσον το σώμα κινείται προς τα πάνω έχει ταχύτητα με αρνητική αλγεβρική τιμή $υ_1$ < 0, οπότε η απομάκρυνση x_1 έχει θετικό πρόσημο



α) **Σωστή** Έχοντας μηδενική επιτάχυνση μηδενίζεται στιγμιαία ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = ma \cdot \upsilon = 0$$

β) **Λανθασμένη** Στη φθίνουσα ταλάντωση δεν διατηρείται η ολική ενέργεια του ταλαντωτή, άρα **δεν** ισχύει: $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$. Ισχύει ότι:

$$\frac{dU}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -F_{\varepsilon\pi} \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -(-kx_1)\upsilon_1 = kx_1\upsilon_1 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = k(-\frac{b\upsilon_1}{k})\upsilon_1 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -b\upsilon_1^2$$

Η δυναμική ενέργεια του σώματος που οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς $U = \frac{1}{2}kx^2$ μειώνεται καθώς ο ταλαντωτής κινείται προς την αρχική θέση ισορροπίας του, όπου x=0

γ) **Σωστή** Στη θέση απομάκρυνσης $x_1 = -\frac{b\upsilon_1}{k}$ ισχύει: $\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -b\upsilon_1^2$

Γενικότερα, σε ***κάθε θέση*** της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\pi} \Leftrightarrow ma = -kx - b\upsilon \Rightarrow ma + kx = -b\upsilon \Rightarrow ma \cdot \upsilon + kx \cdot \upsilon = -b\upsilon^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -b\upsilon^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -b\upsilon^2$$

ΙΙΙ) Εφόσον στη φθίνουσα ταλάντωση η ολική ενέργεια του ταλαντωτή διαρκώς μειώνεται, κάθε φορά που θα περνά από τη θέση με απομάκρυνση $x_2 = \frac{mg}{k}$, θα έχει μικρότερη ολική ενέργεια: $E = U + K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$ απ' ότι είχε την προηγούμενη φορά που πέρασε από την ίδια θέση.

Όμως η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίδια $U = \frac{1}{2}kx_2^{\ 2}$, οπότε θα μειώνεται η κινητική και κατά συνέπεια το μέτρο της ταχύτητάς του. Η πρόταση είναι **λανθασμένη**

Β) Η ταλάντωση ξεκινά την t_o=0 από ***μέγιστη θετική απομάκρυνση*** $x=A_o=\frac{3mg}{k}$.

Χρονικές στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου, t=kT, k=0,1,2,3,..... θα βρίσκεται σε ***θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης***, η οποία θα υπολογίζεται από τη σχέση: $x = A_o e^{-\Lambda kT}$

Στις θέσεις αυτές η ταχύτητα στιγμιαία μηδενίζεται υ=0, οπότε η ενέργεια ταλάντωσης εμφανίζεται ως δυναμική λόγω της δύναμης επαναφοράς:

$$E = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}k(A_o e^{-\Lambda kT})^2 \Rightarrow E = (\frac{1}{2}kA_o^{\ 2})e^{-2\Lambda kT} \Rightarrow E = E_o e^{-2\Lambda kT}$$ όπου k=0,1,2,3,.....

Τη χρονική στιγμή $t_α$ =4Τ, όπου Τ η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης, θα βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση $x = A_o e^{-\Lambda 4T}$ και θα έχει ενέργεια: $E = E_o e^{-2\Lambda 4T}$

Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με:

$$E_o = \frac{1}{2}kA_o^{\ 2} = \frac{1}{2}k(\frac{3mg}{k})^2 \Rightarrow E_o = \frac{1}{2}k\frac{9m^2g^2}{k^2} \Rightarrow E_o = \frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

Τη χρονική στιγμή $t_α$ =4Τ ισχύει: $E = \frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k}$ Άρα:

$$E = \frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k} \Rightarrow E_o e^{-2\Lambda 4T} = \frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k} \Rightarrow (\frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k})e^{-8\Lambda T} = \frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k} \Rightarrow e^{-8\Lambda T} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln e^{-8\Lambda T} = \ln\frac{1}{4} \Rightarrow -8\Lambda T = -\ln 4 = -2\ln 2 \Rightarrow \Lambda T = \frac{\ln 2}{4}$$

Όταν περάσει χρονικό διάστημα Δt=8T, μετά τη χρονική στιγμή $t_α$, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_b = 4T + 8T = 12T$, η ολική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι:

$$E=E_o e^{-2\Lambda 12T}\Rightarrow E=E_o e^{-24\Lambda T}=E_o e^{-24\frac{\ln 2}{4}}=E_o e^{-6\ln 2}\Rightarrow E=E_o e^{\ln 2^{-6}}\Rightarrow E=\frac{E_o}{2^6}=\frac{E_o}{64}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{64}\left(\frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k}\right)\Rightarrow E=\frac{9}{128}\frac{m^2g^2}{k}$$

Το ***έργο της δύναμης απόσβεσης*** στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή t_a =4T, μέχρι τη στιγμή t_b =12T είναι ***ίσο με τη μεταβολή της ολικής ενέργειας*** του ταλαντωτή:

$$W_{F_{\alpha\pi}}=\frac{9}{128}\frac{m^2g^2}{k}-\frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k}=\frac{9}{128}\frac{m^2g^2}{k}(1-16)\Rightarrow W_{F_{\alpha\pi}}=-\frac{135}{128}\frac{m^2g^2}{k}$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το έργο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$W_{F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}}=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k}-\frac{9}{128}\frac{m^2g^2}{k}=\frac{9}{8}\frac{m^2g^2}{k}\left(1-\frac{1}{16}\right)\Rightarrow W_{F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}}=\frac{135}{128}\frac{m^2g^2}{k}$$

Δηλαδή: $W_{F_{\alpha\pi}}=-W_{F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}}$, αναμενόμενο αφού: $W_{F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}}+W_{F_{\alpha\pi}}=W_{\Sigma F}=\Delta K=0$

μια και οι δύο χρονικές στιγμές αντιστοιχούν σε θέσεις μέγιστης θετικής απομάκρυνσης και μηδενικής ταχύτητας.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η δημιουργία άσκησης στις φθίνουσες ταλαντώσεις είναι κάτι ανάλογο με το να «χορεύεις στο σκοτάδι». Το λάθος ξεφεύγει εύκολα μια και η γνώση της συγκεκριμένης περιοχής απαιτεί «στριφνά» μαθηματικά. Αν όμως «βαδίσουμε» σε σίγουρα μονοπάτια, τότε και δε θα εκτεθούμε και θα εξετάσουμε ταυτόχρονα ουσιαστικές γνώσεις φυσικής.

Γι αυτό το λόγο ***αποφεύγουμε*** να χρησιμοποιούμε:

Α) Την εκθετική εξίσωση του πλάτους $A=A_o e^{-\Lambda t}$ για τιμές χρόνου που ***δεν*** είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης $t\neq kT$ με k=0,1,2,3,.....

Β) Την εκθετική εξίσωση της ενέργειας ταλάντωσης $E=(\frac{1}{2}kA_o^2)e^{-2\Lambda t}\Rightarrow E=E_o e^{-2\Lambda t}$ για τιμές χρόνου που ***δεν*** είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης $t\neq kT$ με k=0,1,2,3,.....

Γ) Την εξίσωση απομάκρυνσης $x=A_o e^{-\Lambda t}\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{2})$ όταν η φθίνουσα ταλάντωση ξεκινά από την ηρεμία και από θέση αρχικής απομάκρυνσης A_o από τη θέση ισορροπίας x=0.

Γενικότερα, δεν υπάρχει λόγος να «μπλέξουμε» με τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης-χρόνου x=f(t), αφού η σχέση αυτή δεν αναφέρεται στο σχολικό και απαιτεί μαθηματικές γνώσεις που μάλλον ξεφεύγουν από ό,τι χρησιμοποιούμε στη διδασκαλία μας

Δ) Το «πλάτος» της φθίνουσας ταλάντωσης σε τυχαία χρονική στιγμή που ***δεν*** είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης $t \neq kT$ με k=0,1,2,3,……

Μια τέτοια χρονική στιγμή ο ταλαντωτής έχει ενέργεια $E = U + K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$, όπου x η απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας του. Αν υποθέσουμε ότι τη στιγμή αυτή, καταργείται η δύναμη απόσβεσης και ο ταλαντωτής συνεχίζει να κινείται υπό την επίδραση μόνο της δύναμης επαναφοράς, εκτελώντας Απλή Αρμονική Ταλάντωση, τότε το πλάτος της ΑΑΤ θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E = U + K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

αλλά ***δε θα είναι*** το «πλάτος» της φθίνουσας πριν καταργήσουμε τη δύναμη απόσβεσης, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση $A = A_o e^{-\Lambda t}$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com