

Φάσεις σε ...διαφορετικές στιγμές

Αρμονικό κύμα με πλάτος $A = 0,4\text{m}$ και περίοδο $T = 0,4\text{s}$, διαδίδεται με ταχύτητα $u_\delta = 2\text{m/s}$ κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox . Το σημείο O στην αρχή του άξονα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $\psi = A\eta\mu\omega t$. Υλικό σημείο K του ελαστικού μέσου έχει τη χρονική στιγμή t_1 φάση ταλάντωσης $\varphi_K = \frac{10\pi}{4}\text{rad}$, ενώ ένα άλλο σημείο Λ του

ελαστικού μέσου έχει τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{5T}{8}$, φάση ταλάντωσης $\varphi_\Lambda = \frac{13\pi}{4}\text{rad}$

- Να διερευνήσετε ποιο από τα σημεία K και Λ βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή O του άξονα.
- Να βρείτε την απομάκρυνση και την επιτάχυνση των σημείων K και Λ τη χρονική στιγμή t_1 .
- Αν το σημείο Λ έχει τετμημένη $x_\Lambda = +0,8\text{m}$ να υπολογίσετε ποιες χρονικές στιγμές ξεκινάει η ταλάντωση των σημείων K και Λ και κατόπιν γράψτε τις εξισώσεις της ταλάντωσης των σημείων K και Λ σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των φάσεων των ταλαντώσεων των σημείων K και Λ σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 . Πόσα σημεία του ελαστικού μέσου βρίσκονται σε απομάκρυνση $+0,3\text{m}$ τη χρονική στιγμή t_1 ;

Απάντηση

α) Το μήκος κύματος είναι $\lambda = u_\delta T = 0,8\text{m}$.

Η εξίσωση της φάσης του σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\varphi_K = \frac{2\pi}{T} t_1 - 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{10\pi}{4} = 5\pi t_1 - 2\pi \frac{x_K}{0,8} \Leftrightarrow \frac{10\pi}{4} = 5\pi t_1 - 2,5\pi x_K \quad (1)$$

Η εξίσωση της φάσης του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\varphi_\Lambda = \frac{2\pi}{T} t_2 - 2\pi \frac{x_\Lambda}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{13\pi}{4} = 5\pi t_2 - 2\pi \frac{x_\Lambda}{0,8} \Leftrightarrow \frac{13\pi}{4} = 5\pi t_2 - 2,5\pi x_\Lambda \quad (2)$$

Αν αφαιρέσουμε τις (1) και (2) λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $t_2 - t_1 = \frac{5T}{8} = 0,25s$,

έχουμε:

$$\frac{3\pi}{4} = 5\pi(t_2 - t_1) - 2,5\pi(x_\Lambda - x_K) \Leftrightarrow 0,75 = 1,25 - 2,5(x_\Lambda - x_K) \Leftrightarrow \boxed{x_\Lambda - x_K = 0,2m}$$

δηλαδή $x_\Lambda > x_K$ (Το σημείο Κ είναι πιο κοντά στο Ο από το Λ).

Β' τρόπος: Θα βρούμε τις φάσεις της ταλάντωσης των σημείων Κ και Λ την ίδια χρονική στιγμή t_1 .

Για το σημείο Κ έχουμε $\boxed{\varphi_K(t_1) = \frac{10\pi}{4} \text{ rad}}$ (3)

Έστω $\varphi_\Lambda(t_1)$ η φάση του Λ τη χρονική στιγμή t_1 . Τη μεταγενέστερη χρονική

στιγμή t_2 , η φάση του Λ θα αυξηθεί κατά $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \Leftrightarrow \varphi_\Lambda(t_2) - \varphi_\Lambda(t_1) = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{5T}{8}$

$$\Leftrightarrow \varphi_\Lambda(t_1) = \varphi_\Lambda(t_2) - \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi_\Lambda(t_1) = \frac{13\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{\varphi_\Lambda(t_1) = 2\pi \text{ rad}}$$
 (4)

Από τις (3), (4) βλέπουμε ότι $\varphi_K(t_1) > \varphi_\Lambda(t_1)$. Όμως κατά τη φορά διάδοσης του κύματος οι φάσεις μειώνονται άρα $x_\Lambda > x_K$ (Το σημείο Κ είναι πιο κοντά στο Ο από το Λ).

$$\beta) \psi_K = 0,4 \cdot \eta \mu \varphi_K = 0,4 \cdot \eta \mu \frac{10\pi}{4} = 0,4 \cdot \eta \mu (2\pi + \pi/2) = 0,4m$$

$$\psi_\Lambda = 0,4 \cdot \eta \mu \varphi_\Lambda = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi = 0$$

$$\alpha_K = -\omega^2 \psi_K = -25\pi^2 \cdot 0,4 = -100 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_\Lambda = -\omega^2 \psi_\Lambda = 0$$

$$\gamma) x_\Lambda - x_K = 0,2m \Leftrightarrow x_K = 0,8 - 0,2 \Leftrightarrow x_K = 0,6m.$$

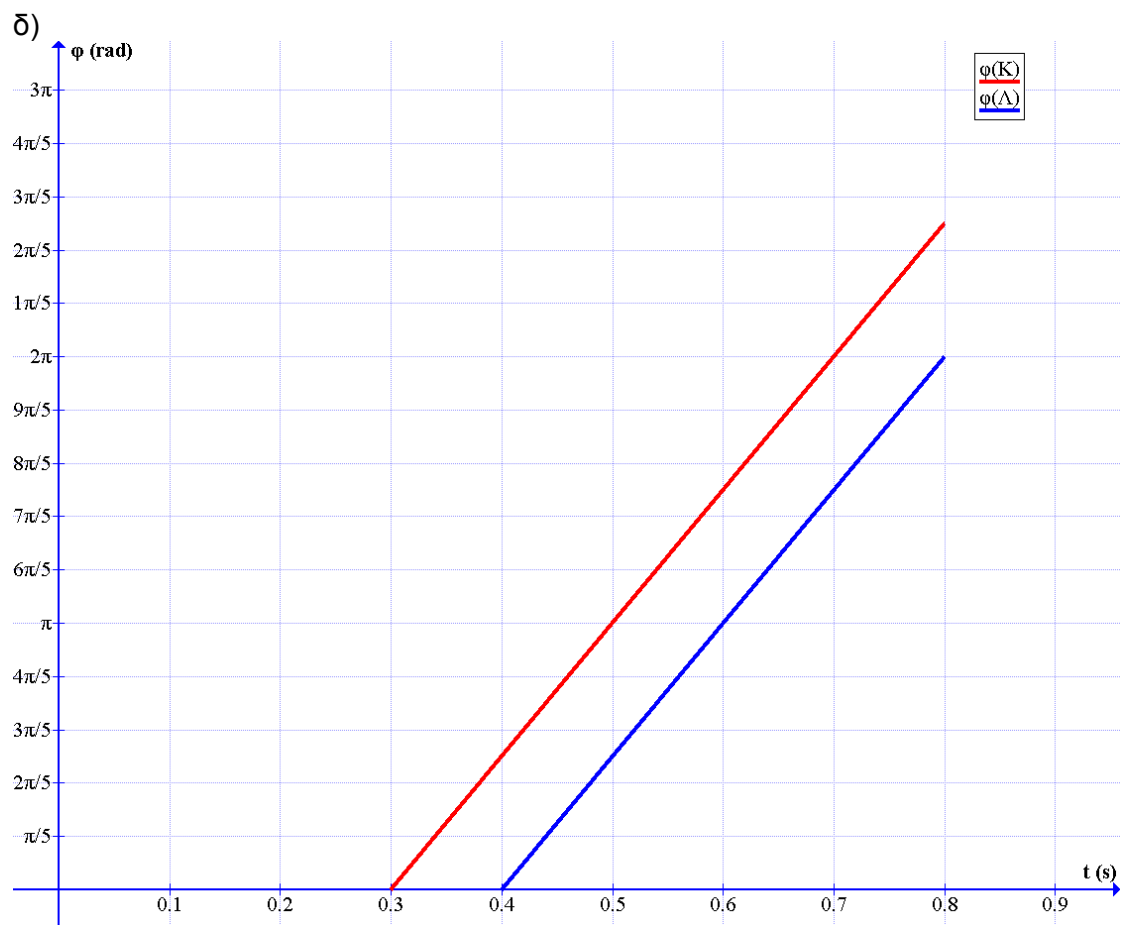
Το κύμα φτάνει στο σημείο Κ τη χρονική στιγμή $t_K = \frac{x_K}{u_\delta} = 0,3s$ και στο σημείο

$$\Lambda \text{ τη χρονική στιγμή } t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{u_\delta} = 0,4s.$$

Οι εξισώσεις της ταλάντωσης των σημείων Κ και Λ σε συνάρτηση με το χρόνο

$$\text{θα είναι } \psi_K = 0,4 \cdot \eta \mu (5\pi t - 2,5\pi \cdot 0,6) \Leftrightarrow \boxed{\psi_K = 0,4 \cdot \eta \mu (5\pi t - 1,5\pi) \text{ με } t \geq 0,3s}$$

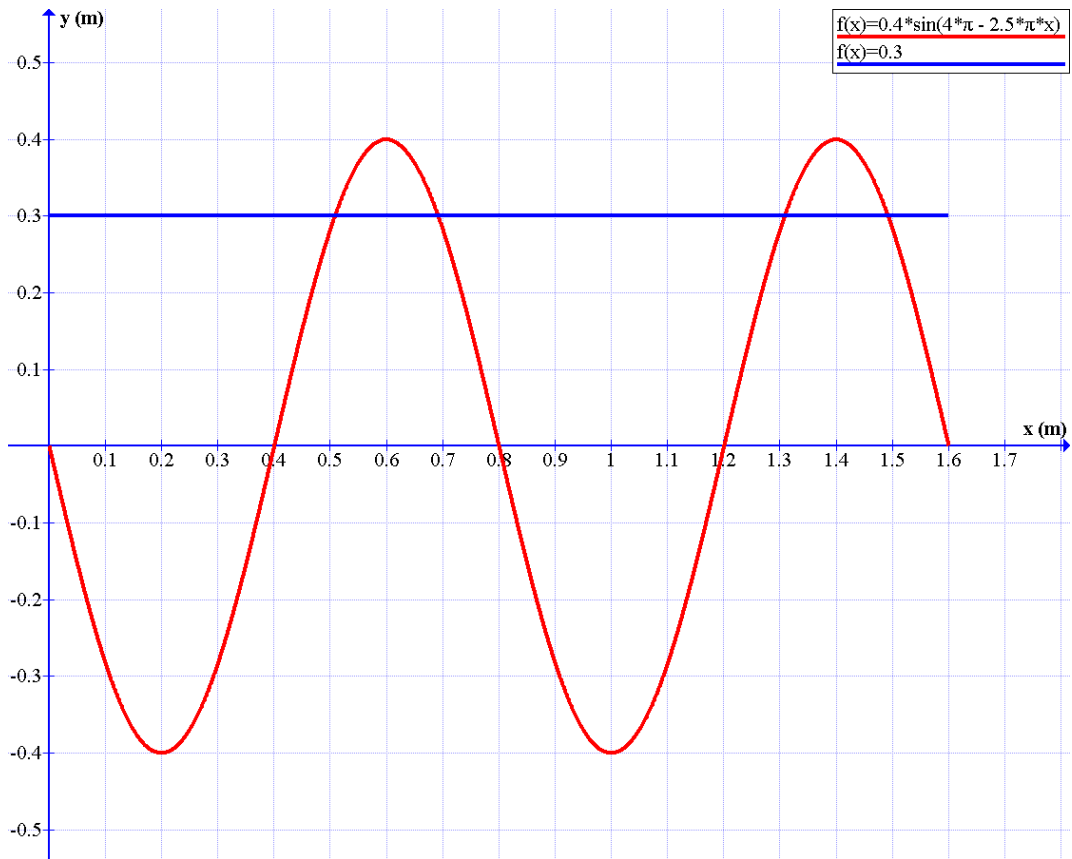
$$\text{και } \psi_\Lambda = 0,4 \cdot \eta \mu (5\pi t - 2,5\pi \cdot 0,8) \Leftrightarrow \boxed{\psi_\Lambda = 0,4 \cdot \eta \mu (5\pi t - 2\pi) \text{ με } t \geq 0,4s}$$



$$\varepsilon) (1) \Leftrightarrow \frac{10\pi}{4} = 5\pi t_1 - 2,5\pi \cdot 0,6 \Leftrightarrow 5t_1 = 2,5\pi + 1,5\pi \Leftrightarrow t_1 = 0,8s$$

- Η εξίσωση του κύματος είναι $\psi = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t - 2,5\pi x)$
η οποία για $t_1 = 0,8s$ δίνει την εξίσωση του στιγμιότυπου
 $\psi = 0,4 \cdot \eta\mu(4\pi - 2,5\pi x)$
- Την $t_1 = 0,8s$ το κύμα έχει φτάσει στη θέση $x_1 = u_{\delta} \cdot t_1 = 1,6m$ και επειδή $\lambda/4 = 0,2m$, $x_1 = 8\lambda/4$
- Για $x = 0 \Leftrightarrow \psi = \psi = 0,4 \cdot \eta\mu(4\pi) = 0$

Η παρακάτω είναι η εικόνα του μέσου την χρονική στιγμή t_1



Φέρνουμε την ευθεία $\psi = 0,3$ και παρατηρούμε ότι τέμνει το στιγμιότυπο σε 4 σημεία

Ανδρέας Φιζόπουλος