

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΓΙΟ - ΓΙΟ

Γιο – γιο αποτελείται από δίσκο μάζας $M = 0,3 \text{ kg}$, ακτίνας $R = 0,1\text{m}$, με μικρό αυλάκι στην περιφέρεια στο οποίο έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα.

Δίνεται το $g = 10\text{m/s}^2$ και $I_{cm} = 0,5 MR^2$.

Να υπολογίσετε:

i) την επιτάχυνση a_{cm} , τη γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu}$, την επιτρόχιο a_ϵ και την ολική επιτάχυνση a_A του σημείου A επαφής του νήματος

ii) την τάση του νήματος

iii) το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται και τη μετατόπιση του κέντρου μάζας σε χρόνο $t = 3\text{s}$.

iv) την κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 3\text{s}$

στις περιπτώσεις που:

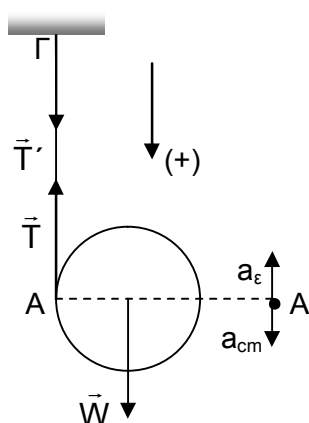
A) Το άκρο Γ του νήματος είναι σταθερό

B) Το άκρο του νήματος είναι ελεύθερο και δέχεται δύναμη μέτρου $F = Mg$

Γ) Το άκρο Γ του νήματος είναι ελεύθερο και δέχεται δύναμη μέτρου $F = 2Mg$

Δ) Το άκρο Γ του νήματος είναι ελεύθερο και δέχεται δύναμη μέτρου $F = Mg/2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$$\begin{aligned} \text{A) i) } a_A = a_\Gamma = 0 &\Leftrightarrow a_{cm} - a_\epsilon = 0 \Leftrightarrow a_{cm} = a_\epsilon = a_{\gamma\omega\nu} R \\ Mg - T = Ma_{cm} \\ TR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{A) i) } a_A = a_\Gamma = 0 \\ Mg - T = Ma_{cm} \\ TR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \end{aligned}} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{cm} = \frac{2g}{3} \Leftrightarrow a_{cm} = 20/3 \text{ m/s}^2, a_{\gamma\omega\nu} = a_{cm}/R = 200/3 \text{ rad/s}^2$$

$$a_\epsilon = a_{\gamma\omega\nu} R = 20/3 \text{ m/s}^2, a_\Gamma = a_{cm} - a_\epsilon = 0$$

$$\text{ii) } T = M(g - 2g/3) \Leftrightarrow T = Mg/3 \Leftrightarrow T = 1\text{N}$$

iii) Το νήμα ξετυλίγεται μέσω της στροφικής κίνησης:

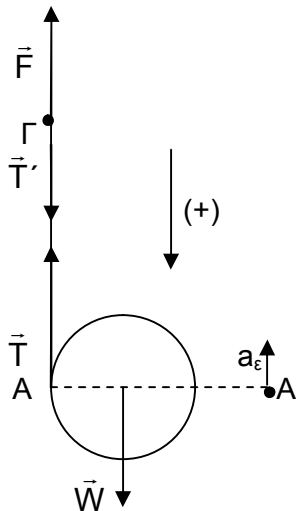
$$L = \Delta s = R \cdot \Delta\theta = R \cdot \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = 30\text{m}.$$

Το κέντρο μάζας κατέρχεται κατά $y_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = 30\text{m} = L$

$$\text{iv) Η Α.Δ.Μ.Ε. } \Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} + 0 = 0 + Mgy_{cm} \Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 90\text{J}$$

β' τρόπος: $u_{cm} = a_{cm} t = 20 \text{ m/s}$ και $\omega = a_{\gamma\omega\nu} t = 200 \text{ rad/s}$

$$K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} MR^2) \omega^2 = 90\text{J}$$



B) $T = T' = F = Mg$

$Mg - T = Ma_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = 0$

Αν αρχικά $u_{cm,0} = 0$ το κέντρο μάζας παραμένει ακίνητο.

$TR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow MgR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g}{R} \Leftrightarrow$

$a_{\gamma\omega\nu} = 200 \text{ rad/s}^2$

$a_\epsilon = a_{\gamma\omega\nu} R = 20 \text{ m/s}^2$

ii) $T = Mg \Leftrightarrow T = 3\text{N}$

iii) Το νήμα ξετυλίγεται μέσω της στροφικής κίνησης:

$L = \Delta s = R \cdot \Delta\theta = R \cdot \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = 90\text{m}$.

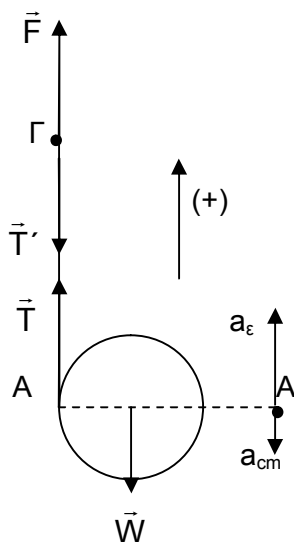
Το κέντρο μάζας δεν μετατοπίζεται.

iv) Το Θ.Μ.Κ.Ε. $\Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_W + W_T + W_{T'} \Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} - 0 = F \cdot L + 0 + 0$

$\Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 270\text{J}$

β' τρόπος: $u_{cm} = 0\text{m/s}$ και $\omega = a_{\gamma\omega\nu} t = 600 \text{ rad/s}$

$K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} MR^2) \omega^2 = 270\text{J}$



Γ) i) $T = T' = F = 2Mg$

$T - Mg = Ma_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = g = 10 \text{ m/s}^2$

$TR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow 2MgR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{4g}{R} \Leftrightarrow$

$a_{\gamma\omega\nu} = 400 \text{ rad/s}^2$

$a_\epsilon = a_{\gamma\omega\nu} R = 40 \text{ m/s}^2$

$a_A = a_\Gamma \Leftrightarrow a_\epsilon - a_{cm} = a_\Gamma \Leftrightarrow a_\Gamma = 30 \text{ m/s}^2$

ii) $T = 2Mg \Leftrightarrow T = 6\text{N}$

iii) Το νήμα ξετυλίγεται μέσω της στροφικής κίνησης:

$L = \Delta s = R \cdot \Delta\theta = R \cdot \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = 180\text{m}$.

Το κέντρο μάζας ανέρχεται κατά $y_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = 45\text{m}$.

$$\text{iv) Το } \Theta.\text{M.K.E.} \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_W + \underbrace{W_T + W_{T'}}_0 \Leftrightarrow$$

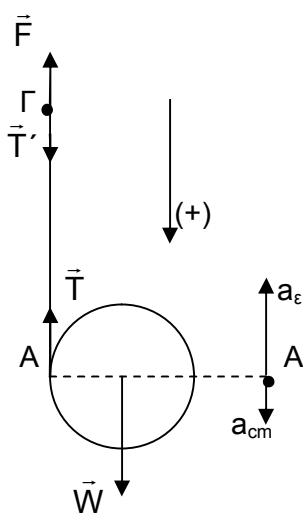
$$K_{\text{τελ}} - 0 = F \cdot (L + y_{\text{cm}}) - Mgy_{\text{cm}} + 0$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{τελ}} = 1215\text{J}$$

διότι το άκρο Γ ανέρχεται κατά L από το ξητύλιγμα και κατά y_{cm} λόγω της ανόδου του κέντρου μάζας.

β' τρόπος: $u_{\text{cm}} = a_{\text{cm}} t = 30 \text{ m/s}$ και $\omega = a_{\gamma\omega\nu} t = 1200 \text{ rad/s}$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} M u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \omega^2 = 1215\text{J}$$



$$\Delta) \text{ i) } T = T' = F = Mg/2$$

$$Mg - T = Ma_{\text{cm}} \Leftrightarrow a_{\text{cm}} = g/2 = 5 \text{ m/s}^2$$

$$TR = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow (Mg/2)R = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{g}{R}$$

$$\Leftrightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 100 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{\epsilon} = a_{\gamma\omega\nu} R = 10 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = a_{\Gamma} \Leftrightarrow a_{\epsilon} - a_{\text{cm}} = a_{\Gamma} \Leftrightarrow a_{\Gamma} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\text{ii) } T = Mg/2 \Leftrightarrow T = 1,5\text{N}$$

iii) Το νήμα ξετυλίγεται μέσω της στροφικής κίνησης:

$$L = \Delta s = R \cdot \Delta\theta = R \cdot \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = 45\text{m.}$$

Το κέντρο μάζας κατέρχεται κατά $y_{\text{cm}} = \frac{1}{2} a_{\text{cm}} t^2 = 22,5\text{m.}$

$$\text{iv) Το } \Theta.\text{M.K.E.} \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_W + \underbrace{W_T + W_{T'}}_0 \Leftrightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} - 0 = F \cdot (L - y_{\text{cm}}) + Mgy_{\text{cm}} + 0$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{τελ}} = 101,25\text{J}$$

διότι το άκρο Γ ανέρχεται κατά L από το ξητύλιγμα και κατά y_{cm} λόγω της ανόδου του κέντρου μάζας.

β' τρόπος: $u_{\text{cm}} = a_{\text{cm}} t = 15 \text{ m/s}$ και $\omega = a_{\gamma\omega\nu} t = 300 \text{ rad/s}$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} M u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \omega^2 = 101,25\text{J}$$