Ρυθμοί μεταβολής και δυνάμεις σε σύστημα ράβδου-σφαιριδίου

Η ράβδος ΑΓ μάζας M = 2,4kg και μήκους L = 1m που μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος σε αυτή ηρεμεί στην κατακόρυφη θέση (1). Ένα σφαιρίδιο Σ μάζας m = 0,2 kg κινείται οριζόντια και καρφώνεται στο άκρο Γ με ταχύτητα μέτρου $υ_{σφ}$ = 5m/s. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι I_{cm} = (1/12) ML^2 και g = 10 m/s^2.

Α) Να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση.

Β) Ποιο είναι το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας του συστήματος εξ΄ αιτίας της κρούσης;

Γ) Θα καταφέρει το σύστημα να κάνει ανακύκλωση;

Δ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη ταχύτητα του σφαιριδίου πριν την κρούση ώστε στη θέση (3) να κάνει ανακύκλωση.

Ε) Αν η ταχύτητα του σφαιριδίου πριν την κρούση είναι αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα (Δ) βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου στην κατώτερη θέση (1) και στην οριζόντια θέση (2).

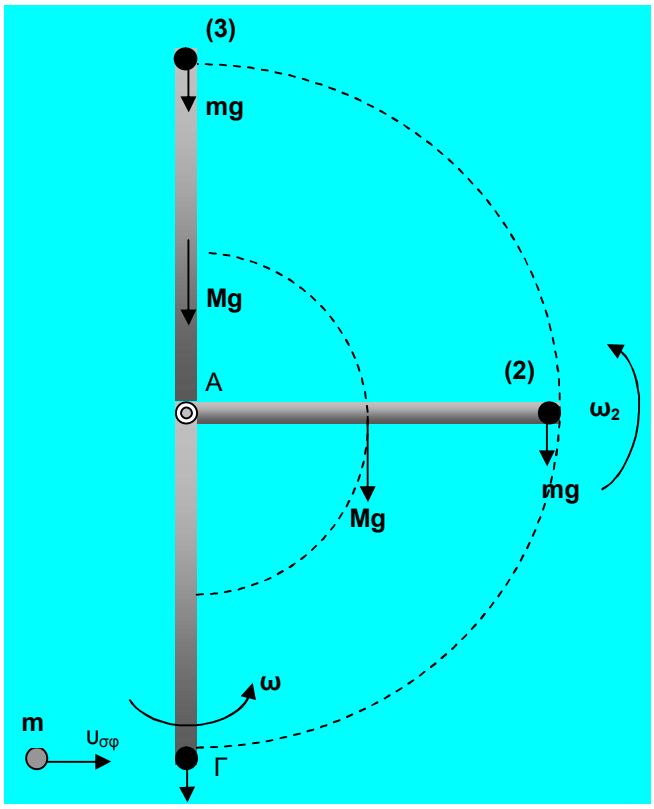
ΣΤ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου και του σφαιριδίου ξεχωριστά στις θέσεις (1) και (2)

Ζ) Αν η ταχύτητα του σφαιριδίου πριν την κρούση είναι αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα (Δ) ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σφαιρίδιο από τη ράβδο στη θέση (2);

Η) Υπολογίστε το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής στη θέση (2).

Θ) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του συστήματος και του σφαιριδίου στη θέση (2).

Λύση



Α) Μετά την κρούση
$I_A = I_{\rho,A} + I_{\Sigma,A} = I_{cm} + M(L/2)^2 + mL^2 = 1/3\ ML^2 + mL^2 = 0,8 + 0,2 = 1 kgm^2$
Α.Δ.Σ. $\Leftrightarrow \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\Pi\Rho\Iota\Nu} = \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\Mu\Epsilon\Tau\Alpha} \Leftrightarrow m\upsilon_{\sigma\varphi}L + 0 = I_A\,\omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 = 1$ rad/s

Β) $\left.\begin{array}{l} K_{\Pi\Rho\Iota\Nu} = ½\, m\, \upsilon_{\sigma\varphi}^2 = 2,5\ J \\ K_{\Mu\Epsilon\Tau\Alpha} = ½\, I_A\, \omega_1^2 = 0,5\ J \end{array}\right\} \Leftrightarrow \pi = \dfrac{K_{\Pi\Rho\Iota\Nu} - K_{\Mu\Epsilon\Tau\Alpha}}{K_{\Pi\Rho\Iota\Nu}}.100 = \dfrac{2}{2,5}.100 = 80\ \%$

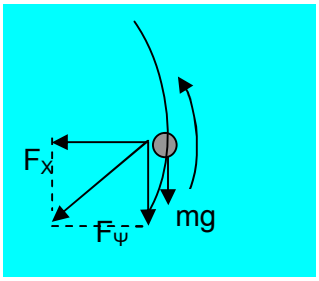
Γ) Θ.Μ.Κ.Ε. για το σύστημα (1) → (3) $\Leftrightarrow K_3 - K_1 = -MgL - mg2L \Leftrightarrow K_3 = 0,5 - 24 - 4 = -27,5\ J < 0$ άρα το σύστημα δεν κάνει ανακύκλωση.

Δ) Συνθήκη ανακύκλωσης στη θέση (3): $\omega_3 = 0$.
Αν πάρουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για το σύστημα (1) → (3) $\Leftrightarrow K_3 - K_1 = \Sigma W \Leftrightarrow$
$0 - ½\, I_A\, \omega_{\varepsilon\lambda}^2 = -MgL - mg2L \Leftrightarrow \omega_{\varepsilon\lambda} = 2\sqrt{14}$ m/s.
Εφαρμόζοντας πάλι την
ΑΔΣ $\Leftrightarrow \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\Pi\Rho\Iota\Nu} = \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\Mu\Epsilon\Tau\Alpha} \Leftrightarrow m\upsilon_{\varepsilon\lambda}L + 0 = I_A\,\omega_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow \upsilon_{\varepsilon\lambda} = 10\sqrt{14}\, m/s$

Ε) Οι ροπές των βαρών της ράβδου και του σφαιριδίου δεν διατηρούνται σταθερές και έτσι η κίνηση μετά την κρούση είναι επιβραδυνόμενη όχι ομαλά.
<u>Θέση (1)</u> $\Sigma\tau_A = I_A\,.\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 0$
<u>Θέση (2)</u> $\Sigma\tau_A = I_A\,.\alpha_{\gamma\omega\nu,2} \Leftrightarrow -MgL/2 - mgL = I_A\,.\alpha_{\gamma\omega\nu,2} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = -14 rad/s^2$
Οι ροπές των εσωτερικών δυνάμεων ράβδου – σφαίρας εξουδετερώνονται και η ροπή της δύναμης του άξονα είναι μηδέν.

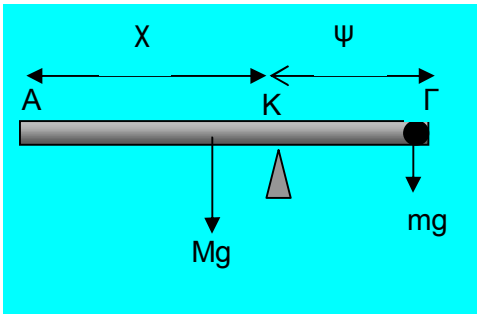
ΣΤ) Για το σύστημα
<u>Θέση (1)</u> $\dfrac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$
<u>Θέση (2)</u> $\dfrac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = -Mg\dfrac{L}{2} - mgL = -14\dfrac{kg.m^2}{s^2}$ Το ίδιο θα βρούμε αν γράψουμε
$\dfrac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = I_A.\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 1.(-14) = -14\dfrac{kg.m^2}{s^2}$
Για τη ράβδο
<u>Θέση (1)</u> $\dfrac{dL_\rho}{dt} = 0$
<u>Θέση (2)</u> $\dfrac{dL_\rho}{dt} = I_\rho.\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 0,8.(-14) = -11,2\dfrac{kg.m^2}{s^2}$
Για το σφαιρίδιο
<u>Θέση (1)</u> $\dfrac{dL_\Sigma}{dt} = 0$
<u>Θέση (2)</u> $\dfrac{dL_\Sigma}{dt} = I_\Sigma.\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 0,2.(-14) = -2,8\dfrac{kg.m^2}{s^2}$

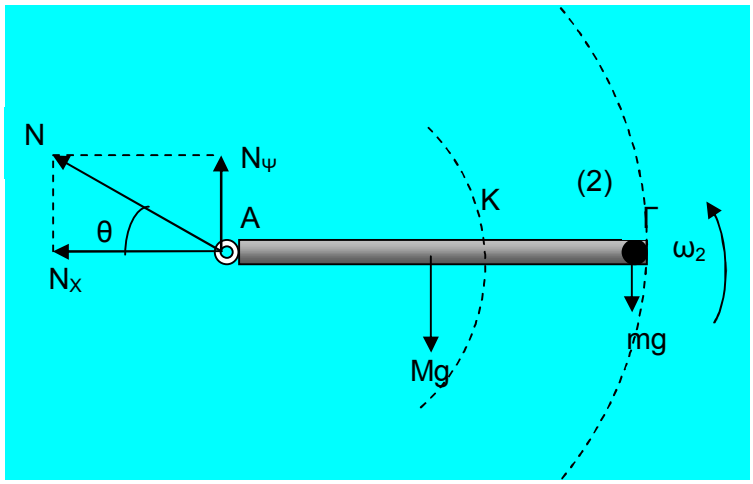
Ζ)



Το σφαιρίδιο εκτελεί κυκλική επιβραδυνόμενη κίνηση με $\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu,2}\,.L = -14 m/s^2$
$F_\psi - mg = m\alpha_\varepsilon \Leftrightarrow F_\psi = 2 + 0,2.(-14) = -0,8N$. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η F_ψ έχει φορά προς τα κάτω.
Αν πάρουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για το σύστημα (1) → (2) $\Leftrightarrow K_2 - K_1 = \Sigma W \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2} I_A\, \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_A\, \omega_{\varepsilon\lambda}^2 = -MgL/2 - mgL \Leftrightarrow \omega_2 = 2\sqrt{7}$ rad/s.
$\Sigma F_R = F_K \Leftrightarrow F_X = m\omega_2^2.L \Leftrightarrow F_X = 5,6N$
$F = \sqrt{F_X^2 + F_\psi^2} = 4\sqrt{2}\,N$

Η) Το κέντρο μάζας Κ βρίσκεται στη θέση που θα ισορροπούσε η ράβδος αν τη στηρίζαμε οριζόντια και εφαρμόζαμε τη συνθήκη $\Sigma\tau_{cm} = 0 \Leftrightarrow$
$Mg(\chi - L/2) - mg\,\psi$ και $\chi + \psi = 1$ απ' όπου έχουμε $\chi = 7/13$ m = 0,54 m.





Θεωρούμε όλες τις δυνάμεις στο κέντρο μάζας οπότε
$\Sigma F_\psi = (M+m)\,.\,\alpha_\varepsilon \Leftrightarrow N_\psi - (M+m)g = (M+m)\,\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\,.\chi \Leftrightarrow N_\psi = 9,5N$
$\Sigma F_x = (M+m)\,.\,\alpha_\kappa \Leftrightarrow N_X = (M+m).\omega_2^2.\chi \Leftrightarrow N_X = 33,1N$
$N = \sqrt{N_X^2 + N_\psi^2} = 34,4N$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{N_\psi}{N_X} = 0,28 \Leftrightarrow \theta = 16^0$

Θ) $\frac{dK_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = P_{\Sigma\tau\varepsilon\xi} = \left(-Mg\frac{L}{2} - mgL\right).\omega_2 = -14.\ 2\sqrt{7} = -28\sqrt{7}J/s$

$\frac{dK_{\sigma\varphi}}{dt} = P_{\Sigma\tau} = -(|F_\psi| + mg).L.\omega_2 = -5,6\sqrt{7}J/s$.