Εξίσωση αρμονικού τρέχοντος κύματος και αρχική φάση

Ένα από τα βασικά ζητούμενα όταν διδάσκουμε το αρμονικό κύμα είναι, **το να μπορεί να γράφει ο μαθητής την εξίσωση που το περιγράφει από τις αρχικές συνθήκες που του δίνουμε,** δηλαδή το στιγμιότυπο τη στιγμή t=0 όπως και το **να μπορεί να σχεδιάζει το στιγμιότυπο μια ορισμένη χρονική στιγμή.**

Αν είναι σε θέση να κάνει αυτά τα δύο, τότε σίγουρα μπορεί και όλα τα υπόλοιπα, δηλαδή να βρίσκει στοιχεία της αρμονικής ταλάντωσης ορισμένου σημείου κάποια χρονική στιγμή.

Στόχος λοιπόν αυτής της παρουσίασης είναι να προταθεί μια μέθοδος η οποία θα καταστήσει σαφή και εύκολο τον τρόπο γραφής της εξίσωσης του τρέχοντος αρμονικού κύματος, με ή χωρίς αρχική φάση και η οποία μέθοδος δε θα συνδέεται με τη θέση της πηγής.

«Το σκεπτικό» το οποίο επιλέχθηκε κατά τη δημιουργία της εξίσωσης του τρέχοντος αρμονικού κύματος προϋποθέτει:

- Να γράψουμε την εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου (σημείο αναφοράς), <u>σύμφωνα με όσα έχουμε διδάξει στις ταλαντώσεις</u> και συνεπώς με προσδιορισμό αρχικής φάσης που να περιορίζεται σε ένα τριγωνομετρικό κύκλο.
- Να πούμε ότι τα υπόλοιπα σημεία του μέσου έκαναν ή θα κάνουν αυτό που έκανε το σημείο αναφοράς.

<u>Σημείο αναφοράς</u> είναι το σημείο του μέσου <u>στο οποίο φθάνει η διαταραχή τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου t=0</u>. Το σημείο αυτό θα <u>αρχίσει</u> να εκτελεί αρμονική ταλάντωση <u>από τη θέση ισορροπίας του</u> (y=0), είτε προς τα πάνω (θετική φορά του άξονα των εγκάρσιων απομακρύνσεων), είτε προς τα κάτω (αρνητική φορά). Συνεπώς η <u>εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου αναφοράς</u> θα είναι, είτε y=Αημ(ωt) όταν <u>αρχίζει να κινείται προς τα πάνω</u>, είτε y=Αημ(ωt+π) <u>όταν αρχίζει να κινείται προς τα κάτω</u>.

Επιβάλλεται λοιπόν, η εξίσωση του κύματος που θα γράψουμε, να εξασφαλίσει ότι η αρχική φάση όλων των σημείων του μέσου θα είναι ίδια με εκείνη του σημείου αναφοράς και κατά συνέπεια θα πρέπει να περιορίζεται σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο.

Σημειώνεται ξανά ότι, η κυρίαρχη διδακτική «λογική» που θα ακολουθηθεί σε όλη την πορεία, έχει ως προϋπόθεση ότι:

«Το σημείο αναφοράς κάνει κάτι. Δες τι κάνει το σημείο αναφοράς και αυτό πριν ή μετά από το σημείο αναφοράς θα κάνουν και τα άλλα σημεία.
Αφού το σημείο αναφοράς έχει αρχική φάση 0 ή π rad, τότε όλα τα σημεία του μέσου θα έχουν αρχική φάση 0 ή π rad »

Γράφοντας την εξίσωση του κύματος με τον τρόπο που θα περιγραφεί πιο κάτω, γράφουμε ουσιαστικά την εξίσωση ταλάντωσης του κάθε σημείου του μέσου, συνοδευόμενη όμως από τον περιορισμό, ότι η εξίσωση αυτή θα αρχίσει να ισχύει από τη στιγμή που το κύμα θα φτάσει ή έφτασε στο σημείο αυτό.

Πρέπει να τονιστεί ότι:

- Το κάθε σημείο του μέσου έχει τη δικιά του εξίσωση ταλάντωσης και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού**
- Η αρχική φάση κάποιου σημείου του μέσου θα προκύψει τη στιγμή που το κύμα έφτασε στο εν λόγω σημείο, έστω κι αν τότε δεν είχαμε αρχίσει ακόμη την παρατήρηση του κύματος.
- Δεν πρέπει να χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κύματος και φάσης για σημεία και για χρονικές στιγμές που είναι έξω από το πεδίο ορισμού τους.

Η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο αναφοράς (τελευταίο του κύματος) είναι προγενέστερη για όλα τα σημεία τα επόμενα του σημείου αναφοράς και άρα κανένα από αυτά τα σημεία δεν έχει ξεκινήσει την ταλάντωσή του. Άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε ούτε για φάση, ούτε για αρχική φάση για τα σημεία αυτά, αλλά να τονίζουμε ότι ακόμα είναι ακίνητα.

Η αρχική φάση, ενώ είναι έννοια που αφορά την εξίσωση μιας μεμονωμένης ταλάντωσης, επεκτείνεται και στην εξίσωση του αρμονικού κύματος που θα εξετάσουμε, γιατί ουσιαστικά είναι κοινή για τις εξισώσεις κίνησης όλων των σημείων του μέσου.

Μπορούμε δηλαδή να μιλάμε για φάση *(της απομάκρυνσης των σημείων στη χρησιμοποιούμενη εξίσωση)* κύματος, καθώς και για αρχική φάση *(της απομάκρυνσης στη χρησιμοποιούμενη εξίσωση)* κύματος με τον ίδιο τρόπο που μιλάμε και για πλάτος κύματος, συχνότητα κύματος κ.λ.π.

Όταν το κύμα φτάνει στο σημείο αναφοράς $x=x_1$ και αρχίζουμε την παρατήρησή του και άρα τη γραφή της εξίσωσης του κύματος, το ρολόι δείχνει $t_0= 0$.

Τη χρονική αυτή στιγμή, η φάση ενός τυχαίου σημείου με $x \leq x_1$ είναι ήδη

$$\phi = \omega(0 - \frac{x - x_1}{\upsilon}) \Rightarrow \phi = \omega(\frac{x_1 - x)}{\upsilon} \geq 0$$

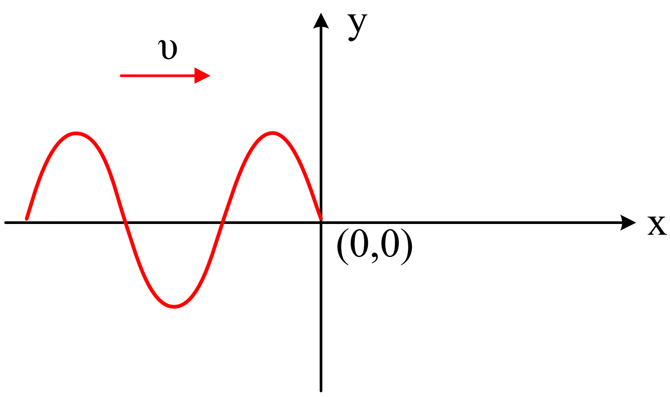
Αυτή δεν είναι η αρχική φάση των σημείων του μέσου με $x \leq x_1$. Είναι η φάση τους τη στιγμή που ξεκινά το σημείο αναφοράς $x=x_1$, τη στιγμή που αρχίζουμε να παρατηρούμε το κύμα.

Τα σημεία του μέσου που έχουν τεθεί σε κίνηση πριν το σημείο αναφοράς, έχουν φάση, που η διαφορά της από τη φάση του σημείου αναφοράς θα εκφράσει τις επιπλέον ταλαντώσεις που έχουν κάνει από τη στιγμή που αρχίσαμε να παρατηρούμε το σημείο αναφοράς και να καταστρώνουμε την εξίσωση του κύματος.

Όμως λόγοι εννοιολογικής συνέπειας επιβάλλουν όλα τα σημεία του μέσου να έχουν την ίδια αρχική φάση που λέγεται και αρχική φάση του κύματος .

Ας ξεκινήσουμε με τις δύο περιπτώσεις που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο.

i) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x΄x. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά τη θετική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους Α και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση x=0, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: y=Αημ(ωt)

Προφανώς η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση x=0. Δε γνωρίζουμε σε ποια θέση βρίσκεται, αλλά αυτό δεν έχει καμία σημασία για να γράψουμε την εξίσωση του κύματος y=f(x,t), τη συνάρτηση δηλαδή που θα μας δίνει την εγκάρσια απομάκρυνση y, τυχαίου σημείου στη θέση x τη χρονική στιγμή t.

Κάθε σημείο του μέσου εκτελεί αρμονική ταλάντωση με ίδιο πλάτος A, ίδια συχνότητα f και ίδια αρχική φάση με το «σημείο αναφοράς», που στη συγκεκριμένη περίπτωση βρίσκεται στη θέση x=0. Αυτό που διαφέρει από σημείο σε σημείο είναι ο χρόνος ταλάντωσης. Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου t=0 τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο x=0, ένα τυχαίο σημείο στη θέση x>0 θα αρχίζει να ταλαντώνεται με καθυστέρηση Δt=x/υ, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση x=0.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x έχει τη μορφή:

$$y=A\eta\mu\omega(t-x/\upsilon)=A\eta\mu 2\pi(t/T-x/\lambda) \quad (1)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο x εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής. Αν το σημείο βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα Ox , τότε x>0, ενώ αν βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Ox΄, τότε x<0.

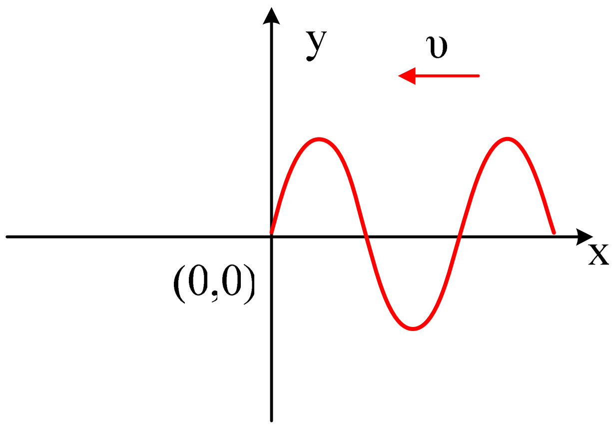
Η πιο πάνω σχέση (1) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y <u>εφόσον το σημείο στη θέση x, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται,</u> δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

$$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \omega(t-\frac{x}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t-\frac{x}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{x}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\omega(t-\frac{x}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) \quad \text{όπου } t \geq \frac{x}{\upsilon}$$

ii) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα χ΄χ. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά την αρνητική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους Α και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση χ=0, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: y=Αημ(ωt)

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση χ=0.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου t=0 τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο χ=0, ένα τυχαίο σημείο στη θέση χ>0 θα έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το σημείο στη θέση χ=0 κατά Δt=x/υ, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση χ=0.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση χ έχει τη μορφή:

y=Αημω(t+x/υ)=Αημ2π(t/T+x/λ)   (2)

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο χ εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (2) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση χ, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

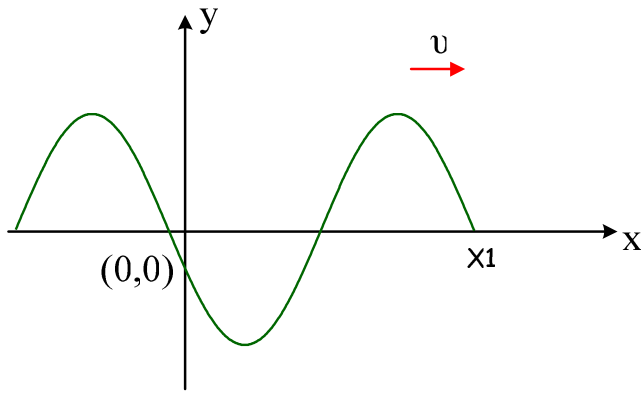
$$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \omega(t+\frac{x}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t+\frac{x}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{x}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\omega(t + \frac{x}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) \quad \text{όπου } t \geq -\frac{x}{\upsilon}$$

Αν όμως θεωρούσαμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου t=0, τη στιγμή που το κύμα φθάνει σε σημείο του μέσου στη θέση $x_1 \neq 0$, τότε ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική θα είχαμε:

iii) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x'x. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά τη θετική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους A και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση $x=x_1$, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: y=Aημ(ωt)

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση x=0.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου t=0 τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο $x=x_1$, ένα τυχαίο σημείο στη θέση $x>x_1$ θα αρχίζει να ταλαντώνεται με καθυστέρηση $\Delta t=(x-x_1)/\upsilon$, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση $x=x_1$.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση χ έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\omega(t - \frac{x - x_1}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x - x_1}{\lambda}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{x_1}{\lambda}) \quad (3)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο χ εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (3) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση $x>x_1$, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

$$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \omega(t - \frac{x - x_1}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t - \frac{x - x_1}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{x - x_1}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

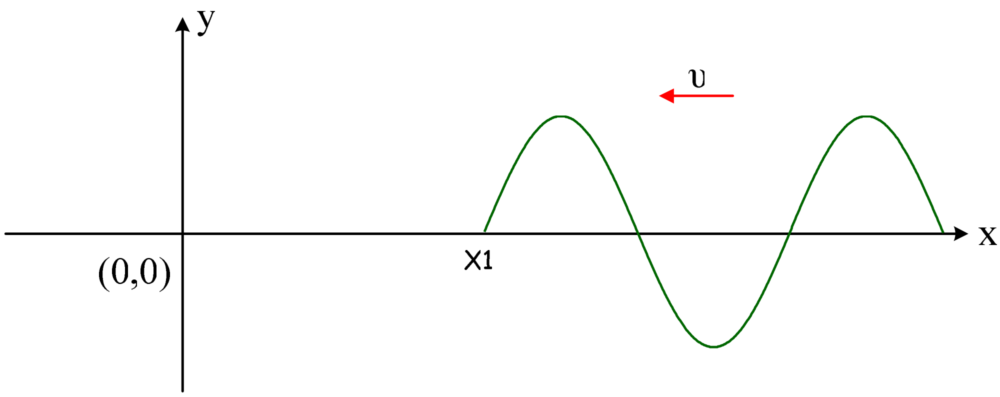
$$y = A\eta\mu\omega(t - \frac{x - x_1}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x - x_1}{\lambda}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{x_1}{\lambda}) \quad \text{όπου } t \geq \frac{x - x_1}{\upsilon}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί, πως αν η παραπάνω εξίσωση γραφεί στη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right]$$

ο όρος $\frac{2\pi x_1}{\lambda}$ <u>δεν εκφράζει</u> την αρχική φάση του κύματος, <u>η οποία είναι ίση με την αρχική φάση της ταλάντωσης κάθε σημείου τη στιγμή που φθάνει το κύμα σε αυτό</u>, δηλαδή μηδέν για το συγκεκριμένο κύμα.

iv) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα χ'χ. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά την αρνητική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους Α και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση $x=x_1$, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: $y=A\eta\mu(\omega t)$

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση $x=0$.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου $t=0$ τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο $x=x_1$, ένα τυχαίο σημείο στη θέση $x>x_1$ θα έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το σημείο στη θέση $x=x_1$ κατά $\Delta t=(x-x_1)/\upsilon$, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση $x=x_1$.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x-x_1}{\lambda}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda}) \quad (4)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο x εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (4) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση $x<x_1$, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

$$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t+\frac{x-x_1}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{x-x_1}{\upsilon} \Leftrightarrow t \geq \frac{x_1-x}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\omega(t + \frac{x - x_1}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x - x_1}{\lambda}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{x_1}{\lambda}) \text{ όπου } t \geq \frac{x_1 - x}{\upsilon}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί, πως αν η παραπάνω εξίσωση γραφεί στη μορφή:

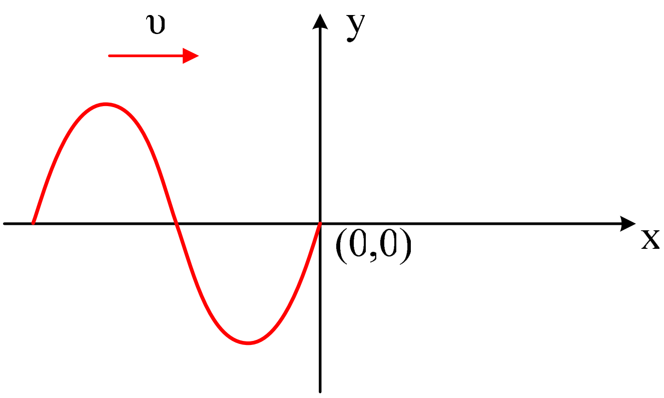
$$y = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right]$$

ο όρος $\frac{2\pi x_1}{\lambda}$ <u>δεν εκφράζει</u> την αρχική φάση του κύματος, <u>η οποία είναι ίση με την αρχική φάση της ταλάντωσης κάθε σημείου τη στιγμή που φθάνει το κύμα σε αυτό</u>, δηλαδή μηδέν για το συγκεκριμένο κύμα.

Συνεπώς σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, **η αρχική φάση στην εξίσωση ταλάντωσης όλων των σημείων του μέσου είναι 0**

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου τα σημεία του μέσου αρχίζουν την ταλάντωσή τους κινούμενα προς τα κάτω;

ν) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x'x. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά τη θετική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους A και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση x=0, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: $y=A\eta\mu(\omega t+\pi)$

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση x=0.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου t=0 τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο x=0, ένα τυχαίο σημείο στη θέση x>0 θα αρχίζει να ταλαντώνεται με καθυστέρηση

Δt=x/υ, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση x=0.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x έχει τη μορφή:

y=Αημ[ω(t-x/υ)+π]=Αημ[2π(t/T-x/λ)+π]   (5)

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο x εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (5) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση x, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

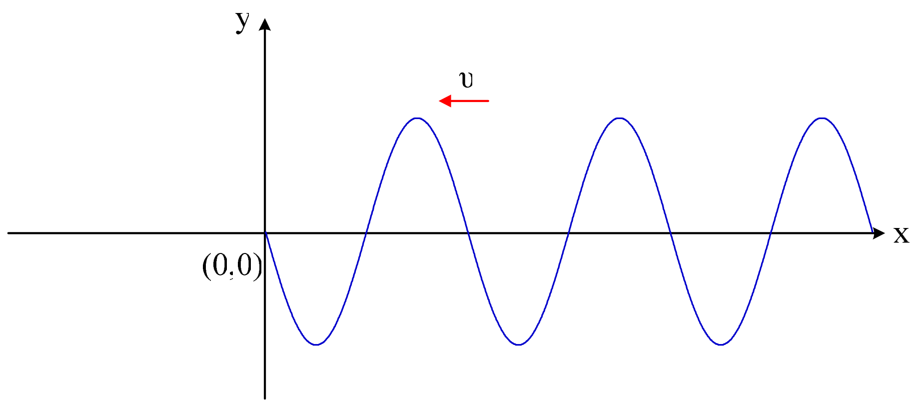
$$\varphi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t-\frac{x}{\upsilon})+\pi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t-\frac{x}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t-\frac{x}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{x}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi\right] \quad \text{όπου} \quad t \geq \frac{x}{\upsilon}$$

Προφανώς η εξίσωση απομάκρυνσης κάθε σημείου του μέσου έχει <u>αρχική φάση π rad</u>, η οποία είναι και η αρχική φάση του κύματος.

vi) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x'x. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά την αρνητική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους Α και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση $x=0$, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: $y=A\eta\mu(\omega t+\pi)$

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση $x=0$.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου $t=0$ τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο $x=0$, ένα τυχαίο σημείο στη θέση $x>0$ θα έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το σημείο στη θέση $x=0$ κατά $\Delta t=x/\upsilon$, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση $x=0$.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x έχει τη μορφή:

$$y=A\eta\mu[\omega(t+x/\upsilon)+\pi]=A\eta\mu[2\pi(t/T+x/\lambda)+\pi] \quad (6)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο x εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (6) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση x, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

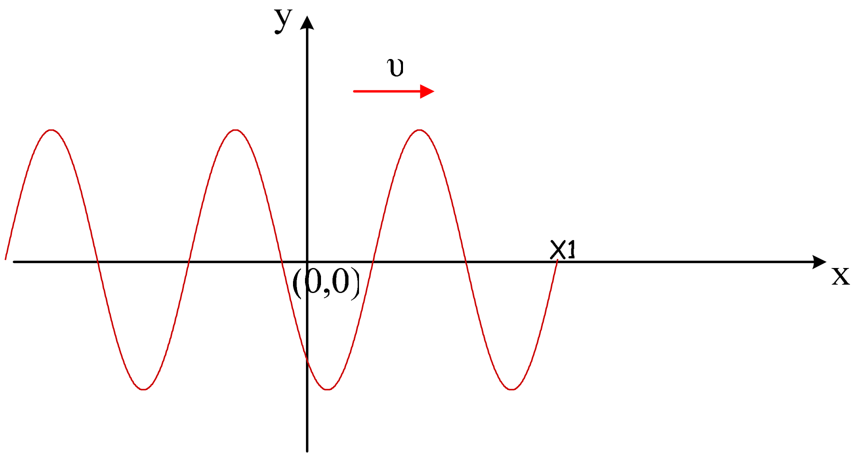
$$\varphi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t+\frac{x}{\upsilon})+\pi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t+\frac{x}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t+\frac{x}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{x}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το κάθε σημείο του μέσου έχει τη δικιά του εξίσωση ταλάντωσης και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y=A\eta\mu\left[\omega(t+\frac{x}{\upsilon})+\pi\right]=A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\pi\right] \quad \text{όπου} \quad t \geq \frac{x}{\upsilon}$$

Προφανώς η εξίσωση απομάκρυνσης κάθε σημείου του μέσου έχει αρχική φάση π rad, η οποία είναι και η αρχική φάση του κύματος.

vii) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x'x. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά τη θετική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους Α και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή $t=0$, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση $x=x_1$, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: $y=A\eta\mu(\omega t+\pi)$

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση $x=0$.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου $t=0$ τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο $x=x_1$, ένα τυχαίο σημείο στη θέση $x>x_1$ θα αρχίζει να ταλαντώνεται με καθυστέρηση $\Delta t=(x-x_1)/\upsilon$, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση $x=x_1$.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x-x_1}{\lambda})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{x_1}{\lambda})+\pi\right] \quad (7)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο x εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (7) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση x, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

$$\varphi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t-\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t-\frac{x-x_1}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t-\frac{x-x_1}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{x-x_1}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x-x_1}{\lambda})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{x_1}{\lambda})+\pi\right]$$

όπου $t \geq \frac{x-x_1}{\upsilon}$

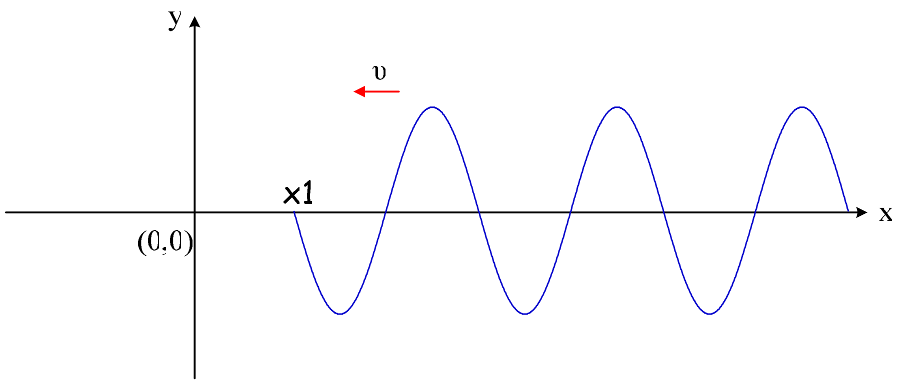
Προφανώς η εξίσωση απομάκρυνσης κάθε σημείου του μέσου έχει <u>αρχική φάση π rad</u>, η οποία είναι και η αρχική φάση του κύματος.

Προσοχή, αν κάποιος επιλέξει να γράψει την παραπάνω εξίσωση στη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\frac{2\pi x_1}{\lambda}+\pi\right]$$

δε σημαίνει ότι ο όρος $\frac{2\pi x_1}{\lambda}+\pi$ είναι η αρχική φάση του κύματος.

viii) Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο (χορδή) το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα χ΄χ. Κατά μήκος του μέσου διαδίδεται κατά την αρνητική φορά με ταχύτητα υ, εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους Α και συχνότητας f. Τη χρονική στιγμή t=0, η μορφή του μέσου είναι η ακόλουθη:



Το σημείο αναφοράς στη θέση $x=x_1$, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση: $y=A\eta\mu(\omega t+\pi)$

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κύματος δε βρίσκεται στη θέση χ=0.

Εφόσον θεωρούμε ως αρχή του χρόνου t=0 τη στιγμή που το κύμα φθάνει στο σημείο $x=x_1$, ένα τυχαίο σημείο στη θέση $x>x_1$ θα έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το σημείο στη θέση $x=x_1$ κατά $\Delta t=(x-x_1)/\upsilon$, ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα, όπως ακριβώς και το σημείο στη θέση $x=x_1$.

Έτσι η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x-x_1}{\lambda})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda})+\pi\right] \quad (8)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο x εκφράζει την τετμημένη θέσης του σημείου της χορδής.

Η πιο πάνω σχέση (8) εκφράζει την εγκάρσια απομάκρυνση y εφόσον το σημείο στη θέση $x<x_1$, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται, δηλαδή η φάση της ταλάντωσής του έχει τιμή:

$$\varphi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi \geq \pi \Leftrightarrow \omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon}) \geq 0 \Leftrightarrow t+\frac{x-x_1}{\upsilon} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \geq -\frac{x-x_1}{\upsilon} \Leftrightarrow t \geq \frac{x_1-x}{\upsilon}$$

Με δεδομένο ό,τι το <u>κάθε σημείο</u> του μέσου έχει τη <u>δικιά του εξίσωση ταλάντωσης</u> και τη δικιά του χρονική συνάρτηση φάσης, **με τα δικά τους πεδία ορισμού,** η εξίσωση του παραπάνω κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x-x_1}{\lambda})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda})+\pi\right]$$

όπου $t \geq \frac{x_1-x}{\upsilon}$

Προφανώς η εξίσωση απομάκρυνσης κάθε σημείου του μέσου έχει <u>αρχική φάση π rad</u>, η οποία είναι και η αρχική φάση του κύματος.

Προσοχή, αν κάποιος επιλέξει να γράψει την παραπάνω εξίσωση στη μορφή:

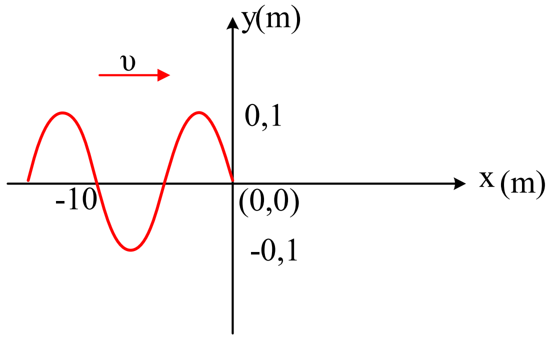
$$y = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})-\frac{2\pi x_1}{\lambda}+\pi\right]$$

δε σημαίνει ότι ο όρος $-\frac{2\pi x_1}{\lambda}+\pi$ είναι η αρχική φάση του κύματος.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, **η αρχική φάση στην εξίσωση ταλάντωσης όλων των σημείων του μέσου είναι π rad**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

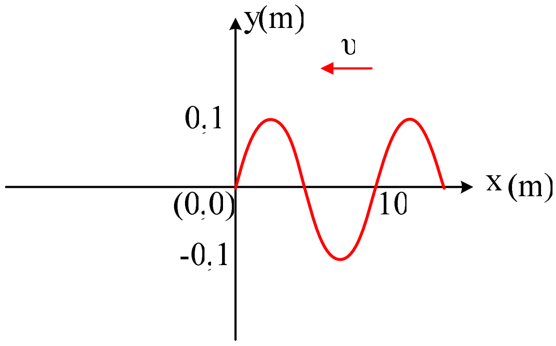
Εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας f=2Hz και πλάτους A=0,1m διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου x'x με ταχύτητα υ=20m/s. Να γραφούν οι εξισώσεις που περιγράφουν τα αρμονικά κύματα, τα οποία τη χρονική στιγμή **t=0,** έδωσαν τα παρακάτω στιγμιότυπα:



(α)

$$y = A\eta\mu\omega(t-\frac{x}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) \Leftrightarrow y = 0,1\eta\mu 4\pi(t-\frac{x}{20}) = 0,1\eta\mu 2\pi(2t-\frac{x}{10})(S.I)$$

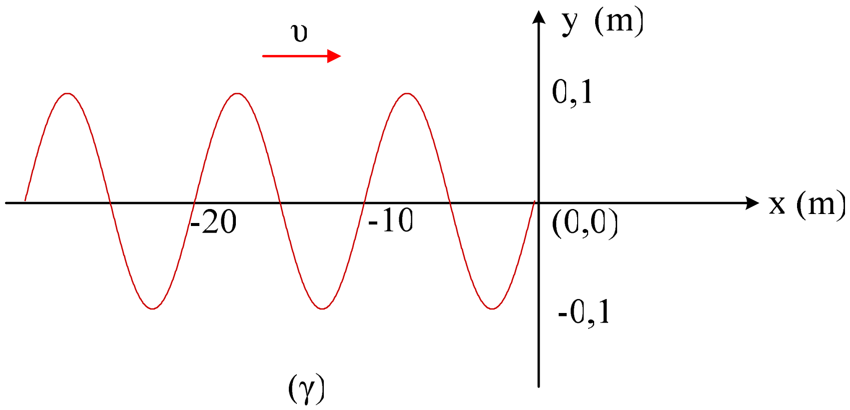
όπου $t \geq \frac{x}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση μηδέν.



(β)

$$y = A\eta\mu\omega(t+\frac{x}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}) \Leftrightarrow y = 0{,}1\eta\mu 4\pi(t+\frac{x}{20}) = 0{,}1\eta\mu 2\pi(2t+\frac{x}{10})(S.I)$$

όπου $t \geq -\frac{x}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση μηδέν.

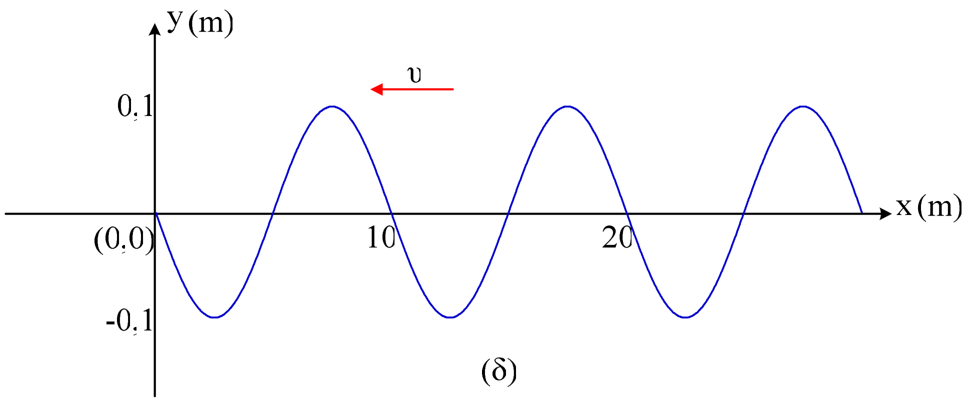


(γ)

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi\right] \Leftrightarrow y = 0{,}1\eta\mu\left[4\pi(t-\frac{x}{20})+\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$y = 0{,}1\eta\mu\left[2\pi(2t-\frac{x}{10})+\pi\right](S.I)$$

όπου $t \geq \frac{x}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση π rad.

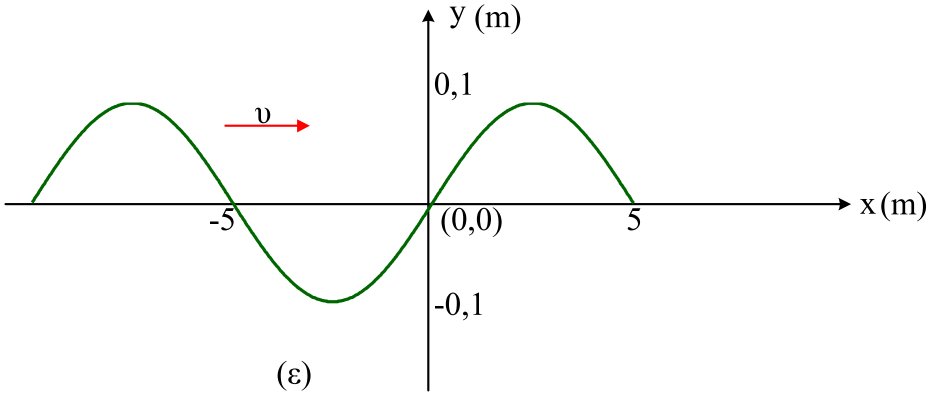


(δ)

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t+\frac{x}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\pi\right] \Leftrightarrow y = 0{,}1\eta\mu\left[4\pi(t+\frac{x}{20})+\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$y = 0{,}1\eta\mu\left[2\pi(2t+\frac{x}{10})+\pi\right](S.I)$$

όπου $t \geq -\frac{x}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση π rad.

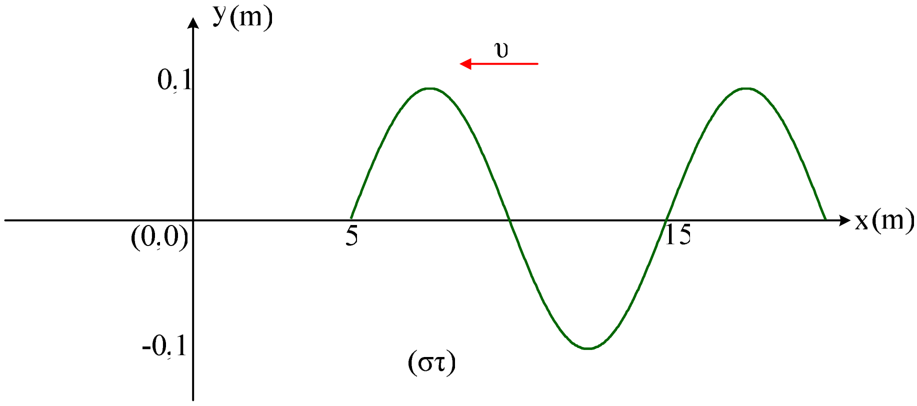


(ε)

$$y = A\eta\mu\omega(t-\frac{x-x_1}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x-x_1}{\lambda}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{x_1}{\lambda}) \Leftrightarrow$$

$$y = 0{,}1\eta\mu 4\pi(t-\frac{x-5}{20}) = 0{,}1\eta\mu 2\pi(2t-\frac{x}{10}+\frac{1}{2})(S.I)$$

όπου $t \geq \frac{x-5}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση μηδέν.

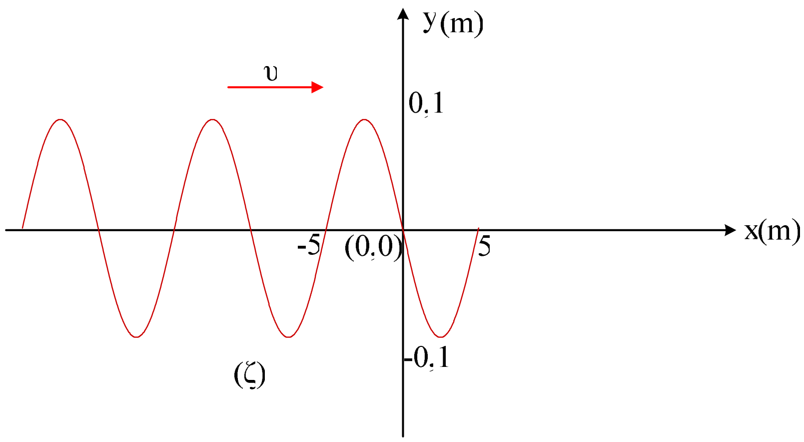


(στ)

$$y = A\eta\mu\omega(t+\frac{x-x_1}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x-x_1}{\lambda}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda}) \Leftrightarrow$$

$$y = 0,1\eta\mu 4\pi(t+\frac{x-5}{20}) = 0,1\eta\mu 2\pi(2t+\frac{x}{10}-\frac{1}{2})(S.I)$$

όπου $t \geq -\frac{x-5}{20} \Leftrightarrow t \geq \frac{5-x}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση μηδέν.

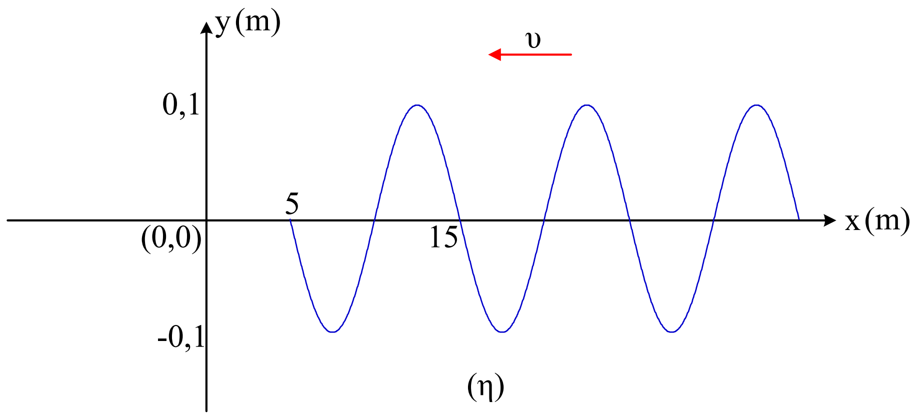


(ζ)

$$y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x-x_1}{\upsilon})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x-x_1}{\lambda})+\pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{x_1}{\lambda})+\pi\right] \Leftrightarrow$$

$$y = 0,1\eta\mu\left[4\pi(t-\frac{x-5}{20})+\pi\right] = 0,1\eta\mu\left[2\pi(2t-\frac{x}{10}+\frac{1}{2})+\pi\right](S.I)$$

όπου $t \geq \frac{x-5}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση π rad.

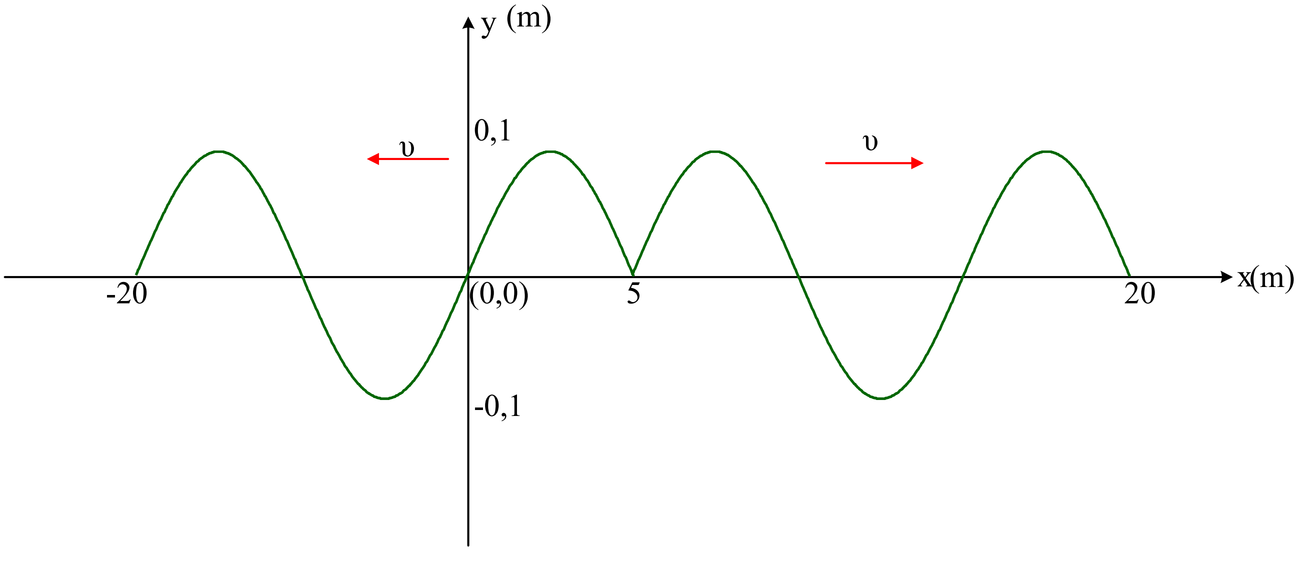


$$y = A\eta\mu\left[\omega(t + \frac{x - x_1}{\upsilon}) + \pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x - x_1}{\lambda}) + \pi\right] = A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{x_1}{\lambda}) + \pi\right] \Leftrightarrow$$

$$y = 0{,}1\eta\mu\left[4\pi(t + \frac{x - 5}{20}) + \pi\right] = 0{,}1\eta\mu\left[2\pi(2t + \frac{x}{10} - \frac{1}{2}) + \pi\right](S.I)$$

όπου $t \geq -\frac{x-5}{20} \Leftrightarrow t \geq \frac{5-x}{20}(SI)$ Το κύμα έχει αρχική φάση π rad.

Τέλος, η μορφή του μέσου:



προκύπτει <u>αν θεωρήσουμε την πηγή του κύματος στο σημείο με τετμημένη θέσης</u> x_1 =5m.

Το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά, έχει εξίσωση:

$y_1 = 0,1\eta\mu 4\pi(t - \frac{x-5}{20}) = 0,1\eta\mu 2\pi(2t - \frac{x}{10} + \frac{1}{2})(S.I)$ όπου $t \geq \frac{x-5}{20}(SI)$ και $x \geq 5m$

ενώ το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά , έχει εξίσωση:

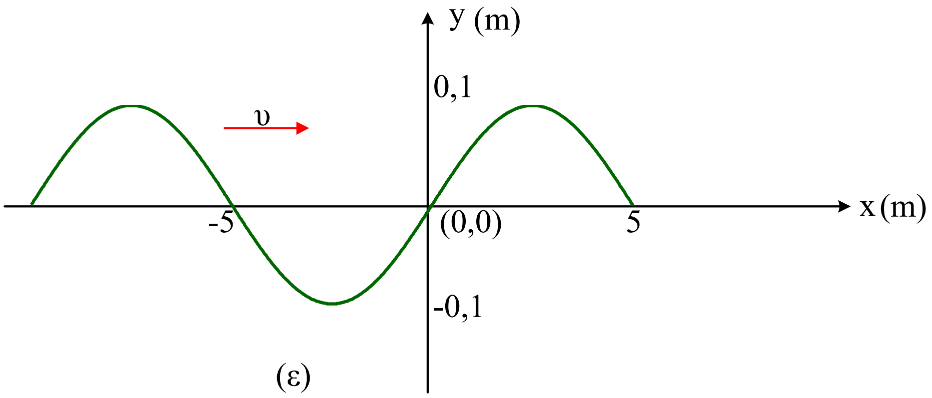
$y_2 = 0,1\eta\mu 4\pi(t - \frac{5-x}{20}) = 0,1\eta\mu 2\pi(2t + \frac{x}{10} - \frac{1}{2})(S.I)$ όπου $t \geq \frac{5-x}{20}(SI)$ και $x \leq 5m$

Το στιγμιότυπο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t=0,75s όπου το κύμα έχει διαδοθεί κατά Δx=υΔt=15m εκατέρωθεν της πηγής.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

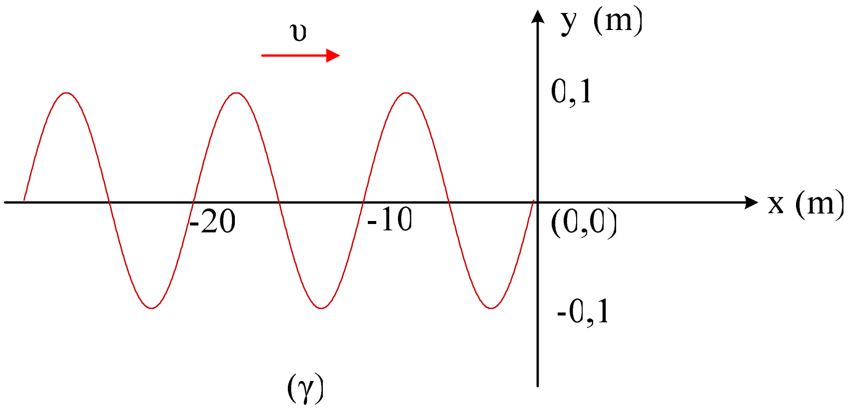
Η εξίσωση κύματος: $y = 0,1\eta\mu 4\pi(t - \frac{x-5}{20}) = 0,1\eta\mu 2\pi(2t - \frac{x}{10} + \frac{1}{2})(S.I)$

που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο (ε), δηλαδή σε κύμα το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x΄x και <u>τη στιγμή</u> **t=0**, <u>φθάνει στο σημείο με τετμημένη θέσης</u> **x_1 =5m**, το οποίο αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση <u>προς τη θετική φορά</u> του άξονα των εγκάρσιων απομακρύνσεων, δηλαδή προς τα πάνω,



(ε)

<u>δεν πρέπει να μετασχηματιστεί στη μορφή:</u> $y = 0,1\eta\mu\left[2\pi(2t - \frac{x}{10}) + \pi\right](S.I)$, διότι <u>αυτή παραπέμπει σε κύμα όπου το σημείο αναφοράς x=0 αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση προς την αρνητική φορά</u> του άξονα των εγκάρσιων απομακρύνσεων, δηλαδή προς τα κάτω, όπως στο στιγμιότυπο (γ).



(γ)

Γενικότερα <u>με την ίδια εξίσωση μπορεί να περιγράφονται δύο διαφορετικά κύματα.</u> Γι αυτό θα πρέπει **η εξίσωση του κύματος να γράφεται με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνει τη μέγιστη δυνατή πληροφορία για το κύμα που περιγράφει.**

Υπάρχει κάτι που θα μπορούσε να μας «προφυλάξει» απ' αυτή την αντίφαση, εκτός της πληροφορίας για τη φορά κίνησης του σημείου αναφοράς τη στιγμή που φθάνει σε αυτό το κύμα, δηλαδή τις αρχικές συνθήκες στη μελέτη του κύματος;

Ναι υπάρχει και αυτό δεν είναι άλλο από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Αν δοθεί η συνάρτηση $y = 0{,}1\eta\mu\left[2\pi(2t - \frac{x}{10}) + \pi\right](S.I)$ (α) με πεδίο ορισμού $t \geq \frac{x}{20}(SI)$ και η ίδια συνάρτηση $y = 0{,}1\eta\mu\left[2\pi(2t - \frac{x}{10}) + \pi\right](S.I)$ (β) με πεδίο ορισμού $t \geq \frac{x-5}{20}(SI)$, είναι προφανές ότι αναφέρονται σε κύματα με άλλες αρχικές συνθήκες.

Θέτοντας $t = \frac{x}{20}$ στη συνάρτηση φάσης της πρώτης (α) , θα προκύψει αρχική φάση:

$$\varphi = 2\pi(2\frac{x}{20} - \frac{x}{10}) + \pi = \pi$$

δηλαδή το σημείο στη θέση x, αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς την αρνητική φορά του άξονα των εγκάρσιων απομακρύνσεων.

Θέτοντας $t = \frac{x-5}{20}$ στη συνάρτηση φάσης της δεύτερης (β) , θα προκύψει αρχική φάση:

$$\varphi = 2\pi(2\frac{x-5}{20} - \frac{x}{10}) + \pi = 2\pi(\frac{x-5-x}{10}) + \pi = -\pi + \pi = 0$$

δηλαδή το σημείο στη θέση x-5, αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς τη θετική φορά του άξονα των εγκάρσιων απομακρύνσεων.

Επίσης αν π.χ ζητηθεί η απομάκρυνση του σημείου στη θέση x=8m τη στιγμή t=3/20 sec, η συνάρτηση (α) με πεδίο ορισμού $t \geq \frac{x}{20}(SI)$ δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί, μια και η στιγμή t=3/20 sec δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της, αφού για x=8m θα πρέπει $t \geq \frac{8}{20}s$.

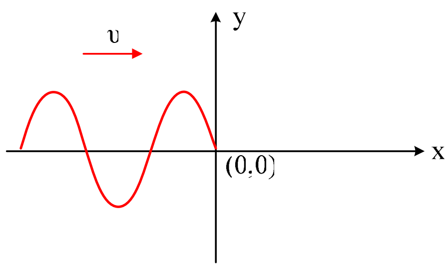
Αντίθετα η συνάρτηση (β) με πεδίο ορισμού $t \geq \frac{x-5}{20}(SI)$, για x=8m απαιτεί $t \geq \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}s$.

Άρα για το σημείο x=8m η στιγμή t=3/20 sec, βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της και δίνει y=0.

Τελειώνοντας θα ήθελα να τονίσω πως αν ο μαθητής κατανοήσει τον τρόπο γραφής της εξίσωσης του αρμονικού κύματος από τις αρχικές συνθήκες, θα μπορέσει να κατανοήσει καλύτερα φαινόμενα που σχετίζονται με την αρχή της επαλληλίας στη διάδοση των κυμάτων καθώς και το αποτέλεσμα της συμβολής αυτών.

Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στην επόμενη εφαρμογή, δημιουργία του φίλου **Διονύση Μάργαρη**:

Α) Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς τη θετική κατεύθυνση), διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο φτάνει τη στιγμή t_0 =0, στο σημείο Ο, στη θέση x=0. Το σημείο Ο αρχίζει την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του τη στιγμή t_1=0,5s, ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί κατά 0,25m, δεξιότερα του Ο. Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων ταλάντωσης του Ο είναι 0,4m.



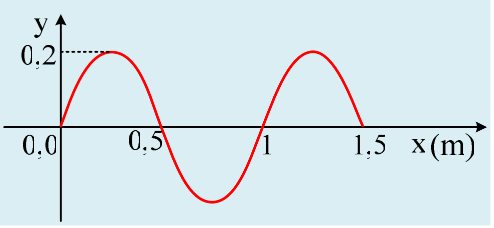
Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος και να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2=3s, για τα σημεία του θετικού ημιάξονα.

Απάντηση:

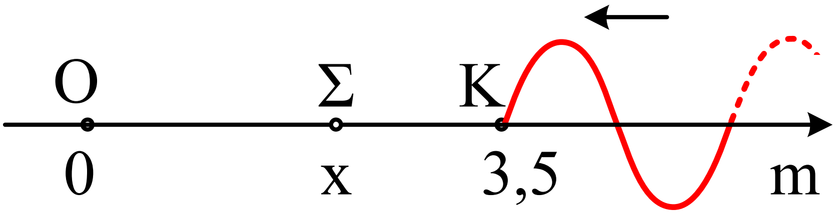
Το σημείο στη θέση x=0 ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, συνεπώς ισχύει η εξίσωση $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$, άρα:

$$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-x\right) \quad t\geq 0 \text{ και } x\leq ½\, t \text{ μονάδες στο S.I.} \quad (1)$$

Θέτοντας στην (1) t=3s παίρνουμε $y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{2}-x\right)$=0,2ημ2πx μονάδες στο S.I.



Β) Κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο κύμα, <u>από δεξιά προς τα αριστερά, με την ίδια συχνότητα και πλάτος, το οποίο τη στιγμή t_0=0 φτάνει σε ένα σημείο Κ, στη θέση x_K=3,5m, το οποίο επίσης αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση.</u>



Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αυτού.

Απάντηση:

Το σημείο Κ ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση y=Αημ$\frac{2\pi t}{T}$=0,2ημπt.

Ένα τυχαίο σημείο Σ, στη θέση x, θα καθυστερήσει να ταλαντωθεί κατά χρονικό διάστημα $t' = \frac{d}{\upsilon} = \frac{3,5-x}{0,2}s$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσής του είναι:

$$y_2=0,2\eta\mu\pi(t-t') = 0,2\eta\mu\pi\left(t-\frac{3,5-x}{0,2}\right)=0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x-3,5\right),\ t\geq 0 \text{ και } x\geq\frac{7-t}{2} \quad (2)$$

Γ) Τα δύο κύματα συμβάλλουν και έτσι προκύπτει ένα στάσιμο κύμα. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών στην περιοχή $0 \leq x \leq 3,5m$

Να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στην παραπάνω περιοχή τη χρονική στιγμή t_3=9s.

Απάντηση:

Με βάση την αρχή της επαλληλίας, για τη συμβολή των δύο κυμάτων έχουμε:

$$y=y_1+y_2=0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-x\right)+0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x-3,5\right) \quad \text{ή}$$

$$y=0,4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t-2\pi x-\pi t-2\pi x+7\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi t-2\pi x+\pi t+2\pi x-7\pi}{2}=0,4\sigma\upsilon\nu(2\pi x-3,5\pi)\cdot\eta\mu(\pi t-3,5\pi)$$

$$y=0,4\cdot\eta\mu 2\pi x\cdot\sigma\upsilon\nu\pi t \quad (3)$$

Δεσμοί είναι τα σημεία όπου:

$A=|0,4\cdot\eta\mu 2\pi x|=0$ ή $2\pi x=k\pi$ ή $x= \frac{1}{2} k$, ενώ και $x\leq 3,5m$.

Έτσι οι θέσεις των δεσμών είναι: x=0,0,5m,1m,1,5m,2m, 2,5m,3m,3,5m.

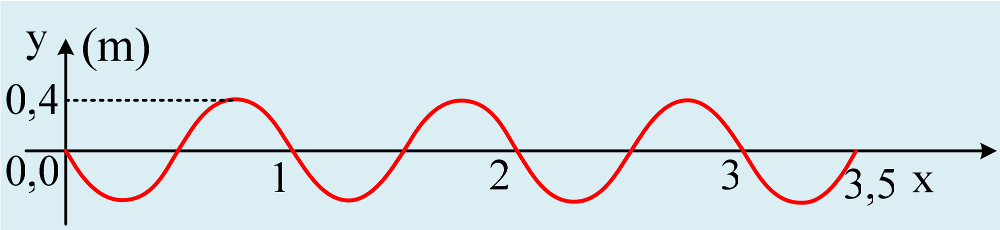
Το χρονικό διάστημα για να φτάσει το πρώτο κύμα στο σημείο Κ, στη θέση x=3,5m είναι $t_4=\frac{d}{\upsilon}=\frac{x}{\upsilon}=7s$, συνεπώς τη στιγμή t_3=9s έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα σε όλη την περιοχή:

$$0 \leq x \leq 3,5m$$

Αντικαθιστώντας t=9s στην (3) παίρνουμε:

$$y=0,4\cdot\eta\mu 2\pi x\cdot\sigma\upsilon\nu\pi t= 0,4\cdot\eta\mu 2\pi x\cdot\sigma\upsilon\nu 9\pi= -0,4\cdot\eta\mu 20\pi x \quad \text{μονάδες στο S.I.}$$

οπότε το ζητούμενο στιγμιότυπο, είναι αυτό του παρακάτω διαγράμματος:



Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com