

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ**  
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Άσκηση 1**

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για  $x \neq x_0$  έχουμε  $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$ , οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

## Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- $f$  συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ .

### Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Πράγματι

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad (1)$$

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε, λόγω της (1), είναι

$$f(x_1) = f(x_2).$$

- Αν  $x_1 > x_2$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

### Άσκηση 3

- i. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .
- ii. Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

#### Λύση

- i. Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Πράγματι, στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο,

ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Επειδή  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ , έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ,

οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- ii. Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

#### Άσκηση 4

- i. Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν
- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$
  - $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει

$$f(x) = g(x) + c$$

- ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

#### Λύση

- i. Η συνάρτηση  $f - g$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x \in \Delta$  ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση  $f - g$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ . Άρα υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) - g(x) = c$ , οπότε  $f(x) = g(x) + c$ .

- ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$ .

## Άσκηση 5

- i. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

- ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

### Λύση

- i. Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο.

Επειδή το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και η  $f$  παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$  και  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  **(1)**

Επειδή, επιπλέον, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

- αν  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , τότε λόγω της **(1)**, θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ ,

$$\text{οπότε θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \textbf{(2)}$$

- αν  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , τότε λόγω της **(1)**, θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ ,

$$\text{οπότε θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \textbf{(3)}$$

Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε  $f'(x_0) = 0$ .

Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

- ii. Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

### Άσκηση 6

- i. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  με  $f'(x) = -\eta\mu x$
- ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

### Λύση

- i. Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  και  $h \neq 0$  ισχύει:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h) - \sigma\upsilon\nu(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h} =$$
$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h} \right) =$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x.$$

$$\text{Δηλαδή } (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x.$$

- ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .

## Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^\nu, \nu \in \mathbf{N} - \{0,1\}$ .

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  και ότι ισχύει

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1}.$$

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$ , λέγεται κυρτή στο  $\Delta$ ;

### Λύση

i. Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbf{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} =$$

$$\frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

$$\text{δηλαδή } (x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}.$$

ii. Η συνάρτηση  $f$  λέγεται κυρτή στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .



### Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbf{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}^*$

και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

### Λύση

Αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ , ενώ αν  $x < 0$ , τότε  $\ln|x| = \ln(-x)$ , οπότε αν

θέσουμε  $y = \ln(-x)$  και  $u = -x$ , έχουμε  $y = \ln u$ . Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

### Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να δείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

#### Λύση

Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ,

η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ . Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ,

η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \quad (2)$$

Επομένως λόγω των (1) και (2), ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το  $f(x_0)$  είναι μέγιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$  και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

### Άσκηση 10

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$  με  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:  $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ .
- ii. Δίνεται συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την  $f$ .

### Λύση

- i. Πράγματι, αν  $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  και θέσουμε  $u = \alpha \ln x$ , τότε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

- ii. Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το  $f(x_0)$  τοπικό μέγιστο.

### Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = a^x, a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  και ισχύει:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a .$$

### Λύση

Πράγματι, αν  $y = a^x = e^{x \ln a}$  και θέσουμε  $u = x \ln a$ , τότε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a .$$

## Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε να δείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

### Λύση

Έχουμε ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta).$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$ . Επομένως, για  $x_1 < x_0 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Άρα το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$ . Θα δείξουμε τώρα, ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ . Πράγματι, έστω  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  με  $x_1 < x_2$ .

- αν  $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- Τέλος αν  $x_1 < x_0 < x_2$ , τότε όπως είδαμε  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

### Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι παραγωγίσιμη  $\mathbf{R}$  και ισχύει  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ .

#### Λύση

Για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  και  $h \neq 0$  ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} = \\ &= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

### Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε και η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

### Λύση

Για  $x \neq x_0$ , ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) + g'(x_0), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

### Άσκηση 15

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ,  $x \in \mathbf{R}_1 = \{x \in \mathbf{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}_1$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

### Λύση

- i. Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $(0, +\infty)$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

$$\text{δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- ii. Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathbf{R}_1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi x)' &= \left( \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \end{aligned}$$



## ΘΕΜΑ Β

### Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-2} + x - 3$ .

1. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και το σύνολο τιμών της  $f$ .

### Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ . Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

$$f'(x) = e^{x-2} + 1 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbf{R}$ .

- ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το  $x = 2$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-2} + x - 3) = -\infty,$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3) = -\infty$  και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-2} + x - 3) = +\infty,$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) = +\infty$ .

Και επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbf{R}$ , το σύνολο τιμών της  $f$  είναι όλο το  $\mathbf{R}$ .

## Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(0,1)$ .

### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = x^4 + (\lambda - 1)x^2 - \lambda x,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει  $F(0) = F(1) = 0$ ,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την  $f$ , αφού η  $f$ :

- είναι συνεχής στο  $[0,1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$

και  $F(0) = F(1)$ ,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε  $F'(\xi) = 0$ . Όμως  $f(\xi) = F'(\xi) = 0$ , οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

### Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x^2)$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της  $f$ .
- ii. Να βρείτε τα σημεία της  $C_f$  στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii. Να τη μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

#### Λύση

- i. Πρέπει  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ , άρα το πεδίο ορισμού είναι το  $\mathbf{R}^*$ . Είναι

$$f(x) = \ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2 \ln|x|$$

οπότε

$$f'(x) = (2 \ln|x|)' = 2 \frac{1}{x}.$$

- ii. Έστω  $A(x_0, 2 \ln|x_0|)$  το σημείο επαφής της εφαπτομένης της  $C_f$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 \ln|x_0| = \frac{2}{x_0}(x - x_0) \quad (1)$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του  $O(0,0)$  να επαληθεύουν την (1), οπότε η (1) γίνεται:

$$-2 \ln|x_0| = \frac{2}{x_0}(-x_0) \Leftrightarrow \ln|x_0| = 1 = \ln e \Leftrightarrow x_0 = \pm e, \text{ και } f(x_0) = 2 \ln e = 2$$

άρα τα σημεία της  $C_f$  είναι τα  $A(e, 2)$  και  $B(-e, 2)$

- iii. Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο  $\mathbf{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  και είναι συνεχής.

Επειδή  $f'(x) = 2 \frac{1}{x}$ , έχουμε ότι:

$f'(x) < 0$  για  $x \in (-\infty, 0)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$  και

$f'(x) > 0$  για  $x \in (0, +\infty)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Επίσης έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για  $x \in (-\infty, 0)$ , το σύνολο τιμών είναι το  $(-\infty, +\infty)$  και για  $x \in (0, +\infty)$ , το σύνολο τιμών είναι το  $(-\infty, +\infty)$ . Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

Επίσης η  $f$  δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοικτά διαστήματα.

- iv. Από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , έπεται ότι η  $C_f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία  $x = 0$ , δηλαδή τον άξονα  $y'y$ .

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0,$$

όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln x = +\infty.$$

Ομοίως και στο  $-\infty$ .

#### Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0$ .

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \neq 0$ .
- ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.
- iii. Αν A και B τα σημεία που η εφαπτομένη στο M τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του τμήματος AB.

#### Λύση

- i. Ισχύει:  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ , οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο

$$M(x_0, f(x_0)) \text{ είναι: } y - \frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0) \quad (1)$$

- ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

$$\text{για } x=0 \text{ η (1) γίνεται } y - \frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow y = \frac{8}{x_0}$$

$$\text{και για } y=0 \text{ η (1) γίνεται } -\frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow x = 2x_0.$$

Άρα η (1) τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A\left(0, \frac{8}{x_0}\right)$  και  $B(2x_0, 0)$ .

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου OAB ισούται με

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \left| \frac{8}{x_0} \right| |2x_0| = 8 \text{ τ.μ,}$$

άρα είναι σταθερό.

- iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει συντεταγμένες:

$$\left( \frac{2x_0 + 0}{2}, \frac{\frac{8}{x_0} + 0}{2} \right) \text{ δηλαδή } \left( x_0, \frac{4}{x_0} \right), \text{ άρα είναι το σημείο M.}$$

## Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

### Λύση

Η πρώτη παράγωγος στα ανοικτά διαστήματα είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + 5, & x > 0 \\ 5\sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο  $x=0$  με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 5x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 5) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\eta\mu x - 0}{x} = 5.$$

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=0$  και  $f'(0) = 5$ .

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοικτά διαστήματα είναι:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x > 0 \\ -5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$

Στο  $x=0$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\sigma\upsilon\nu x - 5}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0.$$

Άρα  $f''(0) = 0$ , οπότε έχουμε:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \geq 0 \\ -5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$

### Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ . Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στα οποία η εφαπτομένη:

- i. να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x$ .
- ii. να σχηματίζει γωνία  $135^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ .
- iii. να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
- iv. να είναι κάθετη στην ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$ .

### Λύση

Ισχύει  $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$ .

- i. Η ευθεία  $y = x$  έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει  $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$  και  $f(2) = -1$ , άρα υπάρχει ένα σημείο, το  $A(2, -1)$  στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x$ .
- ii. Επειδή  $\varepsilon\phi 135^\circ = -1$ , πρέπει  $f'(x) = -1 \Leftrightarrow 2x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ . Επίσης  $f(1) = -1$ , άρα υπάρχει ένα σημείο, το  $B(1, -1)$  στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία  $135^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ .
- iii. Πρέπει  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  και  $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ , άρα υπάρχει ένα σημείο, το  $\Gamma\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$  στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
- iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι  $\frac{1}{2}$ , πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι  $-2$ , οπότε  $f'(x) = -2 \Leftrightarrow 2x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ , άρα υπάρχει ένα σημείο, το  $\Delta\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$ .

## Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i.  $x^{\eta\mu x}, x > 0$

ii.  $2^{x \cdot \ln x}, x > 0$

iii.  $\sqrt{5x^8 + 1}$

### Λύση

i.  $x^{\eta\mu x} = (e^{\ln x})^{\eta\mu x} = e^{\ln x \cdot \eta\mu x}$ , οπότε θέτοντας

$$u = \ln x \cdot \eta\mu x \text{ έχουμε}$$

$$(x^{\eta\mu x})' = (e^{\ln x \cdot \eta\mu x})' = (e^u)' =$$

$$e^u \cdot u' = e^{\ln x \cdot \eta\mu x} \cdot (\ln x \cdot \eta\mu x)' = x^{\eta\mu x} \cdot \left( \frac{\eta\mu x}{x} + \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x \right).$$

ii. Έστω  $u = x \cdot \ln x$ , οπότε

$$(2^{x \cdot \ln x})' = (2^u)' = 2^u \cdot \ln 2 \cdot u' = 2^{x \cdot \ln x} \cdot \ln 2 \cdot (x \cdot \ln x)' = 2^{x \cdot \ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x + 1).$$

iii. Έστω  $u = 5x^8 + 1$ , οπότε  $(\sqrt{5x^8 + 1})' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{(5x^8 + 1)'}{2\sqrt{5x^8 + 1}} = \frac{20x^7}{\sqrt{5x^8 + 1}}$



### Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:

$$-2x+1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

τότε

- i. να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x=0$
- ii. να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=0$  και ισχύει  $f'(0)=-2$ .

### Λύση

- i. Για  $x=0$  η (1) γίνεται  $1 \leq f(0) \leq 1$ , άρα  $f(0)=1$ . Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-2x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - 2x+1) = 1, \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Επομένως η  $f$  είναι συνεχής στο  $x=0$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ .

- ii. Η σχέση (1) γίνεται:

$$-2x+1-1 \leq f(x) - f(0) \leq x^4 - 2x+1-1 \Leftrightarrow -2x \leq f(x) - f(0) \leq x^4 - 2x, \text{ οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:}$$

- αν  $x > 0$ , τότε

$$\frac{-2x}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \leq \frac{x^4 - 2x}{x} \Leftrightarrow -2 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \leq x^3 - 2 \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 2) = -2, \text{ έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = -2.$$

- αν  $x < 0$ , τότε

$$\frac{-2x}{x} \geq \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \geq \frac{x^4 - 2x}{x} \Leftrightarrow -2 \geq \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \geq x^3 - 2 \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 2) = -2, \text{ έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = -2.$$

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=0$  και  $f'(0)=-2$ .

### Άσκηση 9

Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$  μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 > 0$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$$

### Λύση

Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , ισχύει  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Οπότε

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{f(x)})^2 - (\sqrt{f(x_0)})^2}{(x - x_0)(x + x_0)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x + x_0)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)})} = \frac{f'(x_0)}{4 \cdot x_0 \cdot \sqrt{f(x_0)}}. \end{aligned}$$

(Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $x_0$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x_0)}.)$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0)](\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ [f^2(x) + f(x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0)](\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \right] = \\ &= 6 \cdot f'(x_0) \cdot f^2(x_0) \cdot \sqrt{x_0}. \end{aligned}$$

(Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = f^2(x_0))$$

## Άσκηση 10

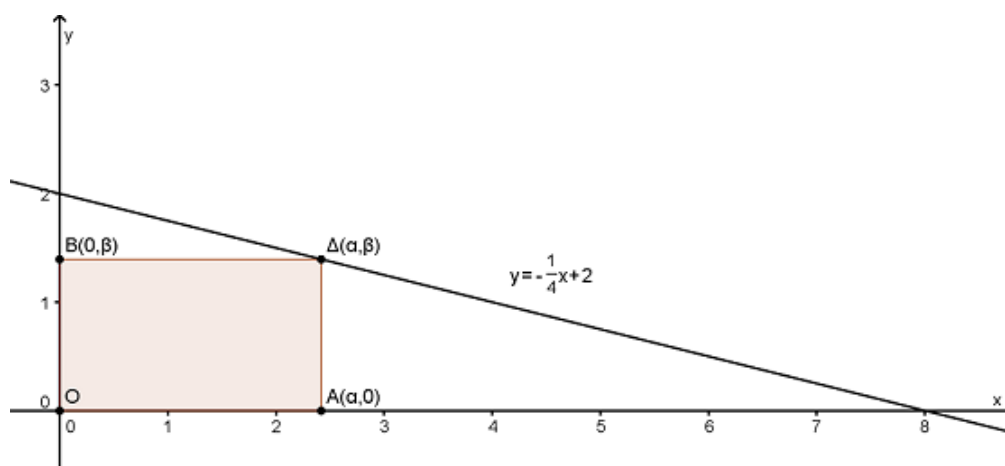
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο  $O(0,0)$ , δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2$ .

Να βρείτε τις διαστάσεις του  $\alpha, \beta$  ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

### Λύση

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με  $E = \alpha \cdot \beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η  $\Delta(\alpha, \beta)$ ,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση  $y = -\frac{1}{4}x + 2$ , οπότε ισχύει  $\beta = -\frac{1}{4}\alpha + 2$ .



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$$E(\alpha) = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{4}\alpha + 2\right) = -\frac{1}{4}\alpha^2 + 2\alpha \quad \text{με } \alpha \in (0, 8), \text{ αφού από την ανισότητα } \beta > 0$$

έχουμε

$$-\frac{1}{4}\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 8.$$

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$$E'(\alpha) = \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 + 2\alpha\right)' = -\frac{1}{2}\alpha + 2, \text{ οπότε } E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και}$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 4.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$\alpha$	0	4	8
$E'(\alpha)$	+	○	-
$E(\alpha)$			

Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 4]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[4, 8)$  και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για

$$\alpha = 4. \text{ Οπότε } \beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1.$$

### Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2.$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f'(0) = 2$ .

#### Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι  $f(0) = 5$ .

Θέτουμε  $g(x) = \frac{f(x) - 5}{x}$ , με  $x \neq 0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$ .

Λύνουμε επίσης ως προς  $f(x)$  και έχουμε:

$$f(x) = x \cdot g(x) + 5, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot g(x) + 5] = 0 \cdot 2 + 5 = 5.$$

Όμως η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  που σημαίνει  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$ .

Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2.$$

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f'(0) = 2$ .

## Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$ . Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x)$$

### Λύση

Έχουμε

$$f'(x) = (e^x \cdot \eta\mu x)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x,$$

$$f''(x) = (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ και}$$

$$f^{(3)}(x) = (2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \cdot \eta\mu x.$$

Οπότε

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \cdot \eta\mu x + 2(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x) =$$

$$4e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2f''(x).$$

Άρα

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x).$$

### Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$$2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Λύση

Επειδή

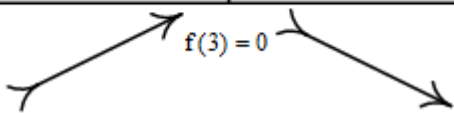
$$2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1) - x + 3 - \ln 4 \leq 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2\ln(x-1) - x + 3 - \ln 4$  με  $x > 1$ , έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} - 1 = \frac{3-x}{x-1},$$

επίσης  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$  και  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$ , οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	1	3	$+\infty$
f'(x)	+	○	-
f(x)			

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1,3]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[3,+\infty)$  και επειδή είναι συνεχής στο  $x=3$  παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το  $f(3)=0$ , άρα  $f(x) \leq 0$  για κάθε  $x > 1$ .

#### Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  στο σημείο της  $A(1,1)$  εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 2x^2 + 7x$ .

#### Λύση

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο  $\mathbf{R}$  ως πολυωνυμικές.

Έχουμε  $f'(x) = 3x^2$ , οπότε  $f'(1) = 3$ .

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(1,1)$  είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y = 3x - 2.$$

Για να εφάπτεται η  $\varepsilon$  και στη  $C_g$ , θα πρέπει να υπάρχει ένα  $x_0$  τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 3 \quad (1)$$

$$\text{και } g(x_0) = 3x_0 - 2. \quad (2)$$

Η (1) μας δίνει:

$$g'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 4x_0 + 7 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

και  $g(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 7(-1) = -5$ , οπότε η (2) γίνεται

$$-5 = 3(-1) - 2 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Άρα η ευθεία  $\varepsilon: y = 3x - 2$  εφάπτεται στη  $C_f$  στο  $A(1,1)$  και στη  $C_g$  στο  $B(-1, -5)$ .



### Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$  έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^4 + 24x^2 + 4x - 40, x \in \mathbf{R}$ .

Υποθέτουμε ότι η  $f$  έχει τρεις ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbf{R}$  με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως πολυωνυμική και επιπλέον  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ , εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα  $[\rho_1, \rho_2]$  και  $[\rho_2, \rho_3]$ .

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) = 0$  και επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_2) = 0$ .

Όμως  $f'(x) = 4x^3 + 48x + 4$ , η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως πολυωνυμική και επιπλέον  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ , οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την  $f'$  στο διάστημα  $[\xi_1, \xi_2]$ , που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\gamma \in (\xi_1, \xi_2)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\gamma) = 0$ , το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x) = 12x^2 + 48 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$ , οπότε και η εξίσωση  $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$  έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

### Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 7$ .
- ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της  $C_f$  που διέρχονται από το  $O(0,0)$ .
- iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο  $A(2,0)$ ;

### Λύση

Έχουμε  $f'(x) = 2x - 4$ .

- i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon$  είναι  $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$ , οπότε αν  $\lambda$  ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει  $\lambda \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2$ .

Αν  $B(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της  $C_f$  με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 3 \text{ και } f(3) = 0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που είναι κάθετη στην ευθεία

$\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 7$  είναι η παρακάτω:

$$y - 0 = 2(x - 3) \text{ ή}$$

$$y = 2x - 6.$$

- ii. Έστω  $\Gamma(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της  $C_f$  με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο  $O(0,0)$ , θα ισχύει:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 3 = -2x_0^2 + 4x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{και } f(\sqrt{3}) = 6 - 4\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}) = 6 + 4\sqrt{3}.$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα  $\Gamma(\sqrt{3}, 6 - 4\sqrt{3})$  και  $\Delta(-\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3})$ .

- iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  που διέρχεται από σημείο  $A(2, 0)$  και  $E(x_1, f(x_1))$  το σημείο επαφής της  $C_f$  με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο  $A(2, 0)$ , θα ισχύει:

$$-f(x_1) = f'(x_1)(2 - x_1) \Leftrightarrow -x_1^2 + 4x_1 - 3 = -2x_1^2 + 8x_1 - 8 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 - 4x_1 + 5 = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ( $\Delta = -4 < 0$ ), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  που να διέρχεται από σημείο  $A(2, 0)$ .

### Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$ , όπου  $k \in \mathbf{R}$ .

- i. Αν η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$  είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y = 3x + 5$ , να βρείτε την τιμή του  $k$ .
- ii. Αν  $k = 2$  να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x - 1$ .

### Λύση

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

- i. Έχουμε  $f'(x) = e^x + k$ .

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση  $y = 3x + 5$ , είναι  $\lambda = 3$ .

Για να είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$  παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y = 3x + 5$ , θα πρέπει

$$f'(0) = \lambda = 3 \Leftrightarrow e^0 + k = 3 \Leftrightarrow k = 2.$$

- ii. Για  $k = 2$  έχουμε  $f(x) = e^x + 2x - 1$ .

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x - 1$  ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0.$$

Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x + 2x - 1 - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Άρα η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x - 1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

### Άσκηση 18

- i. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του  $\alpha$ , ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο  $\mathbf{R}$
- ii. Για ποια τιμή του  $\alpha \in \mathbf{R}$  η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το  $A(1, f(1))$

#### Λύση

1. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 48x + 5,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 48 = 12(x^2 + \alpha x + 4).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι  $\Delta = \alpha^2 - 16$ .

Όταν  $\Delta < 0$  τότε  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbf{R}$ .

Όταν  $\Delta = 0$  τότε  $f''(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η  $f$  είναι πάλι κυρτή στο  $\mathbf{R}$ .

Άρα πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 16 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \alpha \leq 4.$$

2. Πρέπει

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12 + 12\alpha + 48 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5.$$

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του  $x = 1$ .

Για  $\alpha = -5$ ,  $f''(x) = 12(x^2 - 5x + 4)$  και

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 4)$ . Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

<b>X</b>	$-\infty$	1	4	$+\infty$
<b>f''(x)</b>	+	○	○	+

Άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 1]$  και κοίλη στο  $[1, 4]$ . Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(1, f(1))$ , συνεπώς το  $A(1, f(1))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

Άρα για  $\alpha = -5$  το  $A(1, f(1))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

### Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i.  $e^{x-1} \geq x$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

ii.  $e^{x^2} \geq 1-x$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

2. Να δείξετε ότι  $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

### Λύση

1. i. Έχουμε

$$e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} - x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Ισχύει

$$f'(x) = e^{x-1} - 1,$$

$$\text{οπότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1,$$

οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

<b>x</b>	$-\infty$	1	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	-	○	+
<b>f(x)</b>	↘ $f(1) = 0$ ↗		

Έτσι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  και συνεχής στο  $x = 1$ , άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $f(1) = 0$ .

Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1-x \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = e^{x^2} - 1 + x$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$ .

Ισχύει

$$f'(x) = (e^{x^2} - 1 + x)' = 2x \cdot e^{x^2} + 1,$$

οπότε  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1-x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$ .

Ισχύει:

$$f'(x) = \left( e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \right)' = e^x + 1 - x$$

και

$$f''(x) = (e^x + 1 - x)' = e^x - 1.$$



Επίσης

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow f''(x) > 0,$$

άρα η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Οπότε για  $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 2 > 0$ , άρα και η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ . Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο  $x = 0$ , το  $f(0) = 0$ .

Ισχύει λοιπόν:

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty), \text{ άρα}$$

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

## ΘΕΜΑ Γ

### Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{2x} + 5x$ .

1. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
2. Να λύσετε την εξίσωση:  $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$ .

### Λύση

- i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbf{R}$ . Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'(x) = 2e^{2x} + 5 > 0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$ , συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

- ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5 \Leftrightarrow e^{2x^2} + 5x^2 = e^{2(2x-1)} + 5(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = f(2x-1)$$

και επειδή η  $f$  είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

## Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση  $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x=0$  με  $f'(0)=1$  και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

- i. Να υπολογίσετε το  $f(0)$  και το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .
- ii. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της με  $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$ .

### Λύση

- i. Για  $x=y=0$  η σχέση

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x \quad (1)$$

γίνεται:

$$f(0) = f(0) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$ , όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

- ii. Από τη σχέση (1) παίρνουμε  $f(x_0+h) = f(x_0)e^h + f(h)e^{x_0}$  οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x_0) \cdot \frac{e^h - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} \cdot e^{x_0} \right] =$$

$$f(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \cdot e^{x_0} = f(x_0) \cdot e^0 + 1 \cdot e^{x_0} = f(x_0) + e^{x_0},$$

αφού το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = g'(0) = e^0$  με  $g(x) = e^x$ .

Άρα  $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$ .

### Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι  $\alpha \cdot \beta = e^5$ .

#### Λύση

Έχουμε  $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$  και θέτοντας

$$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \text{ παίρνουμε: } f(x) \geq 0 = f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της  $f$  στο 0 και επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του  $\mathbf{R}$ ) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι  $f'(0) = 0$ .

Όμως  $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha + \beta^x \cdot \ln \beta - 5e^x$ , οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5.$$

#### Άσκηση 4

Έστω  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[0,1]$  και παραγωγίσιμες στο  $(0,1)$  με

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

- i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση  $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$  στο διάστημα  $[0,1]$ .
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

#### Λύση

- i. Οι συναρτήσεις  $f^2(x), e^{g(x)}$  είναι συνεχείς στο  $[0,1]$  ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Ομοίως οι συναρτήσεις  $f^2(x), e^{g(x)}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $(0,1)$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης  $h(0) = h(1) = 0$ , άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση  $h$  στο διάστημα  $[0,1]$ .

- ii. Είναι  $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \cdot e^{g(x)} + f^2(x) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$  και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot e^{g(\xi)} + f^2(\xi) \cdot e^{g(\xi)} \cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) \cdot e^{g(\xi)} [2f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)] = 0 \Leftrightarrow 2f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

### Άσκηση 5

Αν η ευθεία  $y = 3x - 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , τότε

- i. να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$   
ii. να βρείτε το  $\lambda \in \mathbf{R}$  ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

### Λύση

Αφού η ευθεία  $y = 3x - 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$

στο  $+\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 3x] = -1$ . Οπότε έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left[ (f(x) - 3x) - \lambda^2 + \frac{2}{x} \right]}{x \cdot \left[ \frac{f(x)}{x} + \lambda + \frac{1}{x} \right]} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1 - \lambda^2}{3 + \lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1).$$

### Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[0,1]$  με  $f(0) < 0, f(1) > 2$  και  $f'(x) \neq 2$  για κάθε  $x \in (0,1)$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε να ισχύει  $f(\xi) = 2\xi$ .

### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2x$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως

άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει  $g(0)g(1) = f(0) \underbrace{[f(1) - 2]}_{-} < 0$ ,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα  $\xi \in (0,1)$  ώστε  $g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 2\xi$ .

Επιπλέον ισχύει ότι  $g'(x) = f'(x) - 2 \neq 0$  στο  $(0,1)$ .

Έστω ότι η  $g$  έχει δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  στο  $(0,1)$  με  $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$ . Τότε για τη  $g$  θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[\rho_1, \rho_2]$
- η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\rho_1, \rho_2)$ .
- $g(\rho_1) = g(\rho_2)$ ,

άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$  τέτοιο, ώστε,  $g'(x_0) = 0$  το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η  $g$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

## Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  για την οποία ισχύουν:  
 $f(0) = f'(0) = 0$  και  $f''(0) = 2011$ .

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$$

### Λύση

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η  $f'$  υπάρχει και είναι συνεχής στο  $\mathbf{R}$ .

Ομοίως και η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{R}$ .

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x \cdot \eta\mu x - x) = 0,$$

οπότε για να βρούμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$  εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(e^x \cdot \eta\mu x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1) = 0,$$

άρα το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$  είναι πάλι της μορφής  $\left(\frac{0}{0}\right)$ ,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η  $f''(x)$  για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της  $f''(0)$ .

$$\text{Είναι } f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 2011, \text{ οπότε}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = \frac{2011}{1+1} = \frac{2011}{2},$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$  και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \eta\mu x}{1} = 1. \text{ (κανόνας De L'}$$

Hospital)

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x} = \frac{2011}{2}.$$

### Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2$  που διέρχονται από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ .

#### Λύση

Έστω  $B(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη  $C_f$ .

Η παράγωγος της  $f$  ισούται με  $f'(x) = 2x$ , οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \quad (1)$$

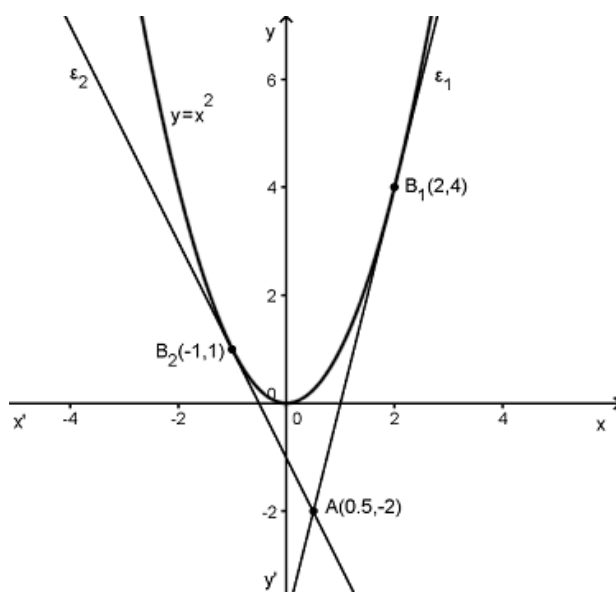
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$  οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την (1) οπότε:

$$-2 - x_0^2 = 2x_0\left(\frac{1}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 = 2 \text{ ή } x_0 = -1),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1) παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : y = 4x - 4 \text{ και σημείο επαφής το } B_1(2, 4) \text{ και}$$

$$\varepsilon_2 : y = -2x - 1 \text{ και σημείο επαφής το } B_2(-1, 1).$$



Σχήμα 1

### Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο  $[0,3]$ . Να δείξετε ότι

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$

#### Λύση

Αφού η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0,3]$ , έπεται ότι η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,3)$ .

Επίσης

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3) \Leftrightarrow \frac{f(1) - f(0)}{1-0} > \frac{f(3) - f(2)}{3-2}, \quad (1)$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση  $f$  στα διαστήματα  $[0,1]$  και  $[2,3]$  υπάρχουν  $\xi_1 \in (0,1)$  και  $\xi_2 \in (2,3)$  τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η (1) γίνεται  $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ , το οποίο ισχύει, αφού  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,3)$  και  $\xi_1 < \xi_2$ .

### Άσκηση 10

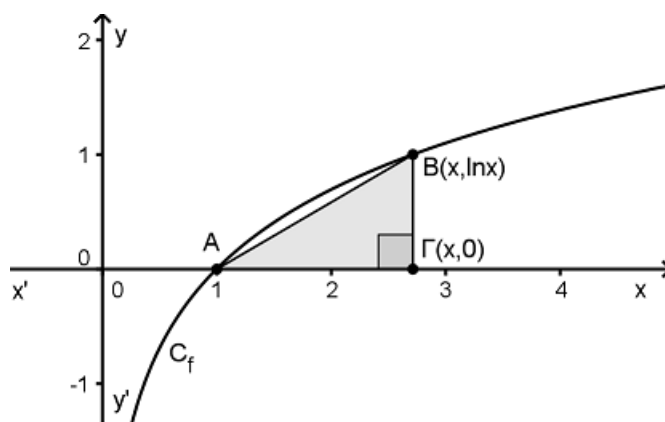
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(x, \ln x)$  και

$\Gamma(x,0)$ ,  $x > 1$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το  $x = 2\text{cm}$ .

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του  $x$  είναι σταθερός και ίσος με  $0,5\text{cm/sec}$ .

### Λύση

Έστω  $f(x) = \ln x$ .



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(x, \ln x)$  και

$\Gamma(x,0)$ ,  $x > 1$ , ισούται με  $E = \frac{1}{2}(A\Gamma)(B\Gamma) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$  (βλέπε Σχήμα 1) και

επειδή η τετμημένη  $x$  είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ , έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$  με  $E(t) = \frac{1}{2}[x(t)-1]\ln x(t)$ . Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή  $t_0$  :

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)\ln x(t_0) + \frac{1}{2}[x(t_0)-1]\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου  $(\ln x(t))' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{x'(t)}{x(t)}$ , με  $u = x(t)$  )

και αντικαθιστώντας το  $x(t_0) = 2\text{cm}$  και  $x'(t_0) = 0,5\text{cm/sec}$  βρίσκουμε

$$E'(t_0) = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}[2-1]\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)\text{cm}^2/\text{sec}$$

### Άσκηση 11

- i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $(x-\rho)^2$  αν και μόνο αν  $P(\rho) = P'(\rho) = 0$ .
- ii. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$  να έχει παράγοντα το  $(x-1)^2$ .

### Λύση

- i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $(x-\rho)^2$ . Τότε υπάρχει πολυώνυμο  $\Pi(x)$  τέτοιο, ώστε  $P(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x)$ , οπότε  $P(\rho) = (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi(\rho) = 0$ . Επίσης  $P'(x) = 2(x-\rho) \cdot \Pi(x) + (x-\rho)^2 \cdot \Pi'(x)$ , οπότε

$$P'(\rho) = 2(\rho-\rho) \cdot \Pi(\rho) + (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi'(\rho) = 0.$$

Αντιστρόφως έστω  $P(\rho) = P'(\rho) = 0$ . Αφού  $P(\rho) = 0$ , υπάρχει πολυώνυμο  $Q(x)$  τέτοιο, ώστε

$$P(x) = (x-\rho) \cdot Q(x) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε  $P'(x) = Q(x) + (x-\rho) \cdot Q'(x)$ , οπότε

$$P'(\rho) = Q(\rho) + (\rho-\rho) \cdot Q'(\rho) = 0 \text{ άρα } Q(\rho) = 0, \text{ άρα υπάρχει πολυώνυμο}$$

$\Pi(x)$  τέτοιο, ώστε  $Q(x) = (x-\rho) \cdot \Pi(x)$ . Αντικαθιστώντας το  $Q(x)$  στην (1) παίρνουμε  $P(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x)$ , άρα το  $(x-\rho)^2$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x)$ .

- ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει  $P(1) = P'(1) = 0$ .

Είναι  $P(1) = \alpha + \beta - 3 - 1 = 0$ , άρα  $\alpha + \beta = 4$ . Επίσης  $P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 3$ , οπότε  $P'(1) = 3\alpha + 2\beta - 3 = 0$ . Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ 3\alpha + 2\beta = 3 \end{cases} \text{ και βρίσκουμε } \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 9 \end{cases}$$

## Άσκηση 12

Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, 2)$ .

### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - e^{x-1} - \ln x - x^2$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x) \geq 0 = g(1) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η  $g$  έχει ελάχιστο το 0 για  $x = 1$ , οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα

ισχύει  $g'(1) = 0$ . Όμως  $g'(x) = f'(x) - e^{x-1} - \frac{1}{x} - 2x$ , άρα

$$g'(1) = f'(1) - e^0 - \frac{1}{1} - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 4.$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, 2)$  θα είναι

$$y - 2 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 2$$

### Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-3,3)$  η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in (-3,3) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμπής.

#### Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση (1), η οποία γίνεται

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 4f'(x) + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$2[f'(x)]^2 + 2f(x) \cdot f''(x) + 4f''(x) + 2 = 0 \quad (2)$$

Έστω ότι το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ , τότε επειδή η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-3,3)$ , θα ισχύει  $f''(x_0) = 0$  και αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε

$$2[f'(x_0)]^2 + 2f(x_0) \cdot f''(x_0) + 4f''(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2[f'(x_0)]^2 + 2 = 0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμπής.

### Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- i. Να δείξετε ότι  $f'(0) = 2$ .
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(0, f(0))$  είναι η  $y = 2x + 2$ .
- iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $2\text{cm/sec}$  να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

### Λύση

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση  $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x$  και παίρνουμε

$$\begin{aligned} f'(e^x \cdot \eta\mu x) \cdot (e^x \cdot \eta\mu x)' &= (2 \cdot e^x)' \Leftrightarrow \\ f'(e^x \cdot \eta\mu x) \cdot (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x) &= 2 \cdot e^x \end{aligned} \quad (4)$$

Για  $x = 0$  η σχέση (4) μας δίνει  $f'(0) = 2$ .

2. Για  $x = 0$  η σχέση  $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x$  μας δίνει  $f(0) = 2$ . Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη  $x$  του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$  και  $x'(t) = 2\text{cm/sec}$ , οπότε και η τεταγμένη του  $y$  του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$  και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4\text{cm/sec}.$$



### Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ . Να δείξετε ότι:
  - i. αν η  $f$  είναι άρτια, τότε η  $f'$  είναι περιττή.
  - ii. αν η  $f$  είναι περιττή, τότε η  $f'$  είναι άρτια.
2. Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x^5 + \sin x) \cdot e^{f(x)} + \eta \mu x + x.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ .
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή  $g'(0)$ .

### Λύση

1. i. Έστω ότι η  $f$  είναι άρτια, τότε ισχύει:

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$(f(-x))' = f'(x) \quad (1)$$

Θέτοντας  $y = f(-x)$  και  $u = -x$ , έχουμε  $y = f(u)$ . Επομένως,

$$y' = (f(u))' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η (1) γίνεται  $f'(-x) = -f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

Συνεπώς η  $f'$  είναι περιττή.

- ii. Έστω ότι η  $f$  είναι περιττή, τότε ισχύει:

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$(f(-x))' = -f'(x) \quad (2)$$

Θέτοντας  $y = f(-x)$  και  $u = -x$ , έχουμε  $y = f(u)$ . Επομένως,

$$y' = (f(u))' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η (2) γίνεται  $f'(-x) = f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

Συνεπώς η  $f'$  είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση  $e^{f(x)}$  είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι  $x^5 + \sigma\nu\nu x$  και  $\eta\mu x + x$  είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

ii. Έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^5 + \sigma\nu\nu x)' \cdot e^{f(x)} + (x^5 + \sigma\nu\nu x) \cdot (e^{f(x)})' + (\eta\mu x + x)' = \\ &= (5x^4 - \eta\mu x) \cdot e^{f(x)} + (x^5 + \sigma\nu\nu x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\nu\nu x + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } g'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) + \sigma\nu\nu 0 + 1 = 2.$$

Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποίησαμε  $f'(0) = 0$ .

Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση  $f'$  είναι περιττή, οπότε για  $x = 0$  έχουμε  $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$ .

### Άσκηση 16

$$\text{Δίνεται συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- i. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .
- ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$ , έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ .

### Λύση

- i. Για  $x \neq 0$  έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}.$$

Επίσης  $\left|x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2$  και επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0,$$

άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ .

- ii. Η συνάρτηση  $\eta\mu \frac{1}{x}$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$  ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ , ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση  $\eta\mu \frac{1}{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Επίσης } f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{8\pi^3} \cdot \eta\mu(2\pi) = 0 \text{ και } f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^3} \cdot \eta\mu(\pi) = 0.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ .

iii. Από το ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

Έτσι

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{\xi} + \xi^3 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\xi \cdot \eta\mu \frac{1}{\xi} = \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \sigma\varphi \frac{1}{\xi} = 3\xi$$

Άρα η εξίσωση  $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$ , έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right).$$

## Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

### Λύση

i. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} \stackrel{u=x \cdot \ln x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \stackrel{u=x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1, \text{ αφού}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

### Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση  $f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = 2 \text{ και}$$

$$x \cdot f'(x) = -3 \cdot f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = x^3 \cdot f(x)$  είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ .
- ii. Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

### Λύση

- i. Έχουμε

$$g'(x) = (x^3 \cdot f(x))' = 3x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot f'(x) = 3x^2 \cdot f(x) + x^2 \cdot (-3f(x)) = 0$$

άρα  $g'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ , δηλαδή υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$  τέτοιες, ώστε

$$g(x) = \begin{cases} c_1, & x > 0 \\ c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή η  $f$  είναι άρτια έχουμε  $f(1) = 2 \Leftrightarrow f(-1) = 2$  οπότε

$$g(1) = 1^3 \cdot 2 = 2 = c_1 \text{ και } g(-1) = (-1)^3 \cdot 2 = -2 = c_2.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

- ii. Για  $x > 0$ ,  $g(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 \cdot f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{x^3}$ .

$$\text{Για } x < 0, \quad g(x) = -2 \Leftrightarrow x^3 \cdot f(x) = -2 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x > 0 \\ -\frac{2}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$$

iii. Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ , έπεται ότι η ευθεία  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Επίσης ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , άρα η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της  $C_f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ , έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

### Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \lambda$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbf{R}$ .
- iv. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

### Λύση

Το πεδίο ορισμού της  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

i.  $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$  και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 4)$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$		↗ 11 ↘	-16 ↗		

Η  $f$  είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, 1]$  και  $[4, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, 4]$ . Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση  $x = 1$  τοπικό μέγιστο το  $f(1) = 11$  και στη θέση  $x = 4$  τοπικό ελάχιστο το  $f(4) = -16$ .

ii. Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbf{R} \text{ τότε}$$

το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$$f((-\infty, 1]) = (-\infty, 11],$$



$$f([1,4]) = [-16,11] \text{ και}$$

$$f([4,+\infty)) = [-16,+\infty) \text{ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι}$$

- Αν  $\lambda < -16$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει μια μοναδική λύση στο  $(-\infty,1)$ .
- Αν  $\lambda = -16$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει δυο ακριβώς λύσεις, την  $x = 4$  και μια δεύτερη στο  $(-\infty,1)$ .
- Αν  $-16 < \lambda < 11$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(-\infty,1)$ ,  $(1,4)$  και  $(4,+\infty)$ .
- Αν  $\lambda = 11$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει δυο ακριβώς λύσεις, την  $x = 1$  και μια δεύτερη στο  $(4,+\infty)$ .
- Αν  $\lambda > 11$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει μια μοναδική λύση στο  $(4,+\infty)$ .

iv.  $f''(x) = 12x - 30$  και  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$ . Οπότε έχουμε

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+

Άρα η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$  και κυρτή στο  $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

Επειδή η  $f''$  μηδενίζεται στο σημείο  $x_0 = \frac{5}{2}$  και εκατέρωθεν αλλάζει

πρόσημο το σημείο  $A\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

## Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση  $P$  για την οποία ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$ .

### Λύση

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου  $P$ .

Έστω ότι ο βαθμός του  $P(x)$  είναι  $\nu$ , τότε ο βαθμός του  $P'(x)$  είναι  $\nu - 1$  και του  $[P'(x)]^2$  είναι  $2(\nu - 1)$ . Λόγω της ισότητας  $[P'(x)]^2 = P(x)$ , πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2.$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta,$$

οπότε

$$[P'(x)]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \text{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \text{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \text{(3)} \end{cases}$$

Η (1) μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση  $P'(1) = 2$  παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2}.$$

Τέλος αντικαθιστούμε το  $\beta = \frac{3}{2}$  στη σχέση (3) και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση (2) ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

$$\text{Έτσι } P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

### Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  ισχύει  $f(\alpha) < f(\beta) > f(\gamma)$ , να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\alpha, \gamma)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

#### Λύση

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την  $f$  στα διαστήματα  $[\alpha, \beta]$  και  $[\beta, \gamma]$ .

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Όμως  $f(\alpha) < f(\beta)$  άρα

$$f'(\xi_1) > 0 \quad (1)$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

Όμως  $f(\beta) > f(\gamma)$  άρα

$$f'(\xi_2) < 0 \quad (2)$$

Η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $[\xi_1, \xi_2]$  και από τις (1) και (2) έχουμε

$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \gamma)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

## Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

### Λύση

i.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$

γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(e^u)'}{(u)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty.$$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0,$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

### Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [1, 6] \rightarrow \mathbf{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $[1, 6]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, 6)$  με  $f(1) = f(6)$ .

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (1, 6)$  τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  να έχει στο σημείο

$A(x_0, f(x_0))$  οριζόντια εφαπτομένη.

- ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$  με  $\xi_1 \neq \xi_2$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$ .

### Λύση

- i. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 6]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, 6)$  και επίσης  $f(1) = f(6)$ , ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (1, 6)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

Επομένως στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  η  $C_f$  έχει οριζόντια εφαπτομένη.

- ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση  $f$  στα διαστήματα  $[1, 2]$  και  $[2, 6]$ .

Σχόλιο: Η επιλογή των διαστημάτων  $[1, 2]$  και  $[2, 6]$  έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης  $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$ , δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1). \quad (1)$$

ομοίως η  $f$  είναι συνεχής στο  $[2, 6]$  και παραγωγίσιμη στο  $(2, 6)$ ,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (2, 6)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{f(6) - f(2)}{4}. \quad (2)$$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = f(2) - f(1) + 4 \cdot \frac{f(6) - f(2)}{4} = f(6) - f(1) = 0.$$

Άρα αποδείχτηκε.

## Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \eta\mu x$ .

- i. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbf{R}$ .
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .
- iii. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

### Λύση

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

- i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x) = 2 + \eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 2-1 \leq 2+\eta\mu x \leq 2+1 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq 2+\eta\mu x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq f''(x) \leq 3,$$

άρα  $f''(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , το οποίο συνεπάγεται ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbf{R}$ .

- ii. Έχουμε

$$f'(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = \pi > 0$$

και επειδή η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , έπεται από το

θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = 0.$$



Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα,  $f''(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$ , που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

iii. Η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$  και υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ , οπότε:

για  $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$  και

για  $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, x_0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, +\infty)$ .

## Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , για την οποία ισχύουν:  
 $f(2) = 5$ ,  $f(1) = 3$  και  $f(x) \leq 2x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = 0$ .

### Λύση

Αφού η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ , σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ .

Έχουμε  $f(x) \leq 2x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 2x - 1 \leq 0$ , οπότε αν θέσουμε

$g(x) = f(x) - 2x - 1$ , τότε η συνάρτηση  $g$  είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbf{R}$ , ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  και επειδή  $g(2) = f(2) - 4 - 1 = 0$  και  $g(1) = f(1) - 2 - 1 = 0$ , έπεται ότι η  $g$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία  $x = 1$  και  $x = 2$ .

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$g'(1) = f'(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 2 \text{ και}$$

$$g'(2) = f'(2) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 2.$$

Τέλος επειδή η  $f'$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$  και  $f'(1) = f'(2)$ , εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την  $f'$  στο  $[1, 2]$  και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = 0$ .

## ΘΕΜΑ Δ

### Άσκηση 1

Έστω  $f$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbf{R}$  για την οποία ισχύει:  $f'(x) < x^2$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ . Να δείξετε ότι:

1. η  $g(x) = 3f(x) - x^3$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbf{R}$
2.  $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) < 3$ .

### Λύση

1. Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο  $\mathbf{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της  $g'$ . Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3[f'(x) - x^2] < 0$$

άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbf{R}$ .

2. Η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbf{R}$ , οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο  $[1, 2]$ , αφού

- i. η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$
- ii. η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$ ,

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) < 3.$$

## Άσκηση 2

- i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g(x) = x - \ln x$ .
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$ .
- iii. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

### Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το  $(0, +\infty)$  και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ . Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την  $g'$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

το οποίο σημαίνει ότι η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ ,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x=1$ , το οποίο είναι το  $g(1)=1$ , άρα  $g(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty,$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το  $[1, +\infty)$ .

Σχόλιο: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $(0, +\infty)$ .

Θεωρούμε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x) = -\infty$ , αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty.$$

Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία  $x = 0$ .

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1,$$

$$\text{όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

iii. Η παράγωγος της  $f$  ισούται με:

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \ln x + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (x - \ln x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} g(x)$$

και από το ερώτημα i) έπεται ότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Στο ii) βρήκαμε επίσης ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x = +\infty$ ,

άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

### Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

2. Να δείξετε ότι η  $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .
3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f(x) = e^x \cdot \ln x$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $f$  του προηγούμενου ερωτήματος.

### Λύση

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, x > 0$ . Έχουμε

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ , οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	○	+

Συνεπώς η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ , άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για  $x=1$ , δηλαδή ισχύει:

$$h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0 \text{ άρα αποδείχτηκε ότι}$$

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

2. Η  $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} + 2e - e^2 = -1 + 2e - e^2 = -(1-e)^2 < 0,$
- $g(1) = 1 > 0.$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα  $x_0$  της  $g$  στο  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ . Επίσης  $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} > 0$ , αφού  $x > 0$  και  $x^2 - 2x + 2 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  επειδή έχει διακρίνουσα  $\Delta = -4 < 0$ .

Επομένως η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = (e^x \cdot \ln x)' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι  $f'(x) > 0$ , συνεπώς η συνεχής συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ανοικτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \cdot \ln x) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \cdot \ln x) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Οπότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της  $f$ :

$$f''(x) = \left( e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \right)' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \cdot \frac{1}{x^2} = e^x \cdot \left( \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x \cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η  $g$  έχει μια ρίζα  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  και είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , οπότε:

για  $x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) = 0$  και για  $x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$  και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

$x$	$0$	$x_0$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$

Από τα προηγούμενα η  $f$  είναι κοίλη στο  $(0, x_0]$  και κυρτή στο  $[x_0, +\infty)$  και το σημείο  $(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η  $f$  είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$ .



#### Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν:

$f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $f(0) = 2$  και

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

τότε να βρείτε τον τύπο της.

#### Λύση

Ισχύει

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - f(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + f(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε

$$f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = c \cdot e^x.$$

Επίσης  $f(0) = 2$ , οπότε έχουμε:  $f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = c \cdot e^0 \Leftrightarrow c = 2$ .

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{2 \cdot e^x}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

### Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}$ ,  $x > -1$  και  $\lambda > 0$ .

- i. Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ένα ελάχιστο.
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

### Λύση

- i. Θα μελετήσουμε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

$$f'(x) = \left( \frac{e^{\lambda x}}{x+1} \right)' = \frac{e^{\lambda x}(\lambda x + \lambda - 1)}{(x+1)^2} \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\lambda}{\lambda} > -1, \text{ οπότε}$$

σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

$x$	$-1$	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left(-1, \frac{1-\lambda}{\lambda}\right]$  και γνησίως

αύξουσα στο διάστημα  $\left[\frac{1-\lambda}{\lambda}, +\infty\right)$ , επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

στο  $x_0 = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ , το οποίο είναι το  $f\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \lambda \cdot e^{1-\lambda}$ .

- ii. Έστω  $g(\lambda) = \lambda \cdot e^{1-\lambda}$  με  $\lambda > 0$ . Θα μελετήσουμε τη  $g$  ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda) = (\lambda \cdot e^{1-\lambda})' = e^{1-\lambda} - \lambda \cdot e^{1-\lambda} = e^{1-\lambda} \cdot (1-\lambda)$  η οποία έχει ρίζα το  $\lambda = 1$  και για το πρόσημό της ισχύει

$\lambda$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(\lambda)$	+	○	-

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ , επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $\lambda = 1$ .

### Άσκηση 6

A. Να αποδείξετε ότι:  $e^x \leq 1 + xe^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

B. Να λυθεί η εξίσωση  $e^x = 1 + xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης  $h(x) = 2|1 + xe^x|$

### Λύση

i. Θέτουμε  $f(x) = 1 + xe^x - e^x$  η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$f'(x) = (1 + xe^x - e^x)' = xe^x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	○	+

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ ,  
οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο  $x = 0$ , δηλαδή  $f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \geq 0$ .

ii. Η εξίσωση  $f(x) = 0$  ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για  $x = 0$ .

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση,  $g(x) = 1 + xe^x$  η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της:  $g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$  και έχουμε

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'(x)	-	○	+

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, -1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[-1, +\infty)$ ,

οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο  $x = -1$ , δηλαδή  $g(x) \geq g(-1) = \frac{e-1}{e} > 0$ .

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1$ ,

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + xe^x) = +\infty$ , άρα το σύνολο τιμών της  $g$  είναι το  $[\frac{e-1}{e}, +\infty)$ .

Επομένως το σύνολο τιμών της  $h$  είναι το  $[2\frac{e-1}{e}, +\infty)$ .

## Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση  $3^x + 2^x = 5^x$ .
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με  $f'(x) = -2f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .
  - i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$  είναι σταθερή στο  $\mathbf{R}$ .
  - ii. Να βρείτε τον τύπο της  $f$  αν  $f(0) = 1$ .
  - iii. Αν  $h, \varphi$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbf{R}$ , με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

και  $h(0) = \varphi(0)$ , τότε να δείξετε ότι  $h = \varphi$ .

## Λύση

1. Έχουμε  $3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0$  (1).

Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η  $x = 1$ . Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$ , η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ .

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{5} < 0,$$

$$\text{αφού } \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{5} < \ln 1 = 0 \text{ και } \frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{2}{5} < \ln 1 = 0.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbf{R}$ , οπότε η  $x = 1$  είναι μοναδική ρίζα της  $f$ , άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

i. Η  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{R}$  ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε

$$g'(x) = (e^{2x} \cdot f(x))' = 2e^{2x} \cdot f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) = 2e^{2x} \cdot f(x) - 2e^{2x} \cdot f(x) = 0 \text{ για } \text{κάθε } x \in \mathbf{R}$$

Άρα η  $g$  είναι σταθερή στο  $\mathbf{R}$ .

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει  $c \in \mathbf{R}$  τέτοιο, ώστε  $g(x) = c$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , άρα

$$e^{2x} \cdot f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^{-2x}.$$

Για  $x = 0$  παίρνουμε:

$$f(0) = c \cdot e^0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα  $f(x) = e^{-2x}$ .

iii. Ισχύει:

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \Leftrightarrow (h(x) - \varphi(x))' = -2(h(x) - \varphi(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

οπότε από το i) ερώτημα έπεται ότι:

$$h(x) - \varphi(x) = c \cdot e^{-2x}, \text{ και για } x = 0 \text{ παίρνουμε}$$

$$h(0) - \varphi(0) = c \cdot e^0 \stackrel{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Άρα  $h = \varphi$ .

## Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.
- ii. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ , αν υπάρχουν.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .
- v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3 \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

### Λύση

Η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbf{R}$ .

- i. Παραγωγίζουμε την  $f$ ,

$$f'(x) = (2x + 4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x = (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x.$$

Έχουμε  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{2}$ , επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 3 \left( \frac{+\infty}{+\infty} \right)}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4 \left( \frac{-\infty}{-\infty} \right)}{-e^{-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 4)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

X	$-\infty$	$-3-\sqrt{2}$	$-3+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	0	T.M.		T.E.	$+\infty$

Έτσι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -3-\sqrt{2}]$  και  $[-3+\sqrt{2}, +\infty)$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}]$  και συνεχής στο  $\mathbf{R}$ , οπότε στο  $-3-\sqrt{2}$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο  $-3+\sqrt{2}$  τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$$f((-\infty, -3-\sqrt{2}]) = (0, f(-3-\sqrt{2})],$$

$$f([-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}]) = [f(-3+\sqrt{2}), f(-3-\sqrt{2})] \text{ και}$$

$$f([-3+\sqrt{2}, +\infty)) = [f(-3+\sqrt{2}), +\infty).$$

Το  $f(-3+\sqrt{2})$  είναι ολικό ελάχιστο γιατί  $f(-3+\sqrt{2}) < 0$ .

Πράγματι το τριώνυμο  $g(x) = x^2 + 4x + 3$  έχει ρίζες τους αριθμούς

$-3$  και  $-1$  και  $-3 < -3+\sqrt{2} < -1$ , άρα  $g(-3+\sqrt{2}) < 0$  γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και  $f(-3+\sqrt{2}) < 0$ .

Επειδή το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το σύνολο  $[f(-3+\sqrt{2}), +\infty)$  είναι φανερό ότι η  $f$  δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii.  $f''(x) = (2x+6) \cdot e^x + (x^2+6x+7) \cdot e^x = (x^2+8x+13) \cdot e^x$  και

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+8x+13) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{3}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

X	$-\infty$	$-4-\sqrt{3}$	$-4+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	○	-	○	+



Άρα η  $f$  είναι κυρτή στα διαστήματα  $(-\infty, -4 - \sqrt{3}]$  και  $[-4 + \sqrt{3}, +\infty)$  και κοίλη στο διάστημα  $[-4 - \sqrt{3}, -4 + \sqrt{3}]$ .

Επειδή επίσης η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbf{R}$ , που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η  $C_f$  έχει δυο σημεία καμπής τα  $A(-4 - \sqrt{3}, f(-4 - \sqrt{3}))$  και  $B(-4 + \sqrt{3}, f(-4 + \sqrt{3}))$ .

- iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , άρα η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  την ευθεία  $y = 0$ .

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((x^2 + 4x + 3) \cdot e^x)'}{(x)'} =$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x = +\infty$ , άρα η  $f$  δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbf{R}$  δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- iv.  $f'(x) = (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x \Rightarrow f'(0) = 7$  και  $f(0) = 3$ .

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  είναι:

$$y - 3 = 7 \cdot (x - 0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y = 7x + 3.$$

- v. Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $[-4 + \sqrt{3}, +\infty)$  και  $0 \in [-4 + \sqrt{3}, +\infty)$ , οπότε στο διάστημα αυτό η  $C_f$  είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο  $A(0, f(0))$ , άρα

$$(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3 \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

### Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- iv. Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  με  $2\alpha + \beta > 0$  και  $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ , ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους  $\alpha, \beta$ .

### Λύση

Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το διάστημα  $(-1, +\infty)$ .

- i. Έχουμε

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ και}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Επειδή  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x > -1$ , έπεται ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-1, +\infty)$ .

Επίσης  $f'(0) = 0$ , άρα

$$\text{για } -1 < x < 0 \quad \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x > 0 \quad \stackrel{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0.$$

Επιπλέον  $f(0) = 0$  και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f(x)			

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x = 0$  το  $f(0) = 0$ .

ii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - \ln(x+1) - 1] = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - 1] = \frac{1}{e} - 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[0, +\infty)$ .

iii. Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει στο πεδίο ορισμού της  $(-1, +\infty)$ , μοναδική λύση την  $x = 0$ , αφού

$$\text{για } x < 0 \stackrel{f \text{ γν. φθί.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x > 0 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0.$$

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha + \beta - 1) + 1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha + 2\beta - 2) + 1) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha + \beta - 1) + f(\alpha + 2\beta - 2) \leq 0 \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha + \beta - 1) = f(\alpha + 2\beta - 2) = 0, \quad (2)$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ.  $f(2\alpha + \beta - 1) \neq 0$  τότε, επειδή  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x > -1$ , θα πρέπει  $f(2\alpha + \beta - 1) > 0$  και η (1) μας δίνει

$f(\alpha + 2\beta - 2) \leq -f(2\alpha + \beta - 1) < 0$  δηλαδή  $f(\alpha + 2\beta - 2) < 0$ , το οποίο

είναι άτοπο. Επομένως  $f(2\alpha + \beta - 1) = 0$  οπότε από την **(1)** και  $f(\alpha + 2\beta - 2) = 0$ .

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

### Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}, x > 0$

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$$

### Λύση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}, x > 0$ .

- i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της  $f$ .

Αν  $y = x^{\frac{1}{2x}} = (e^{\ln x})^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\ln x}{2x}}$  και θέσουμε  $u = \frac{\ln x}{2x}$ , τότε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\frac{\ln x}{2x}} \cdot \left( \frac{\ln x}{2x} \right)' = x^{\frac{1}{2x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{2x^2}.$$

Έχουμε  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ ,

και  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ .

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	e	$+\infty$
f'(x)	+	○	-
f(x)			

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, e]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$  και επειδή είναι συνεχής στο  $e$ ,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το  $f(e)$

- ii. Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[e, +\infty)$ , οπότε ισχύει:

$$e < 3 < 5 < 6 \Leftrightarrow f(3) > f(5) > f(6) \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}} > 5^{\frac{1}{10}} > 6^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$$

### Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x$ ,  $x > 0$ .

- i. Να δείξετε ότι  $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ .
- ii. Να μελετήσετε την  $f$  ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  να είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

### Λύση

i. Έχουμε  $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 \cdot \ln x + 1 > 0$ ,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = 2x^2 \cdot \ln x + 1$ ,  $x > 0$ .

Η  $g$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και

$$g'(x) = 4x \cdot \ln x + 2x = 2x(2 \ln x + 1)$$

και έχουμε

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ και}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$  και γνησίως

αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ , και επειδή είναι συνεχής στο  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$  παρουσιάζει

στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0.$$

Επομένως  $g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$  για κάθε  $x > 0$ , άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Έχουμε  $f'(x) = \left[ (x^2 + 1) \cdot \ln x \right]' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left( 2x \ln x + \frac{1}{x} \right) > 0$ , αφού

$$x > 0 \text{ και } 2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ από το προηγούμενο ερώτημα.}$$

Άρα η συνεχής συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Επίσης το  $x = 1$  είναι προφανής λύση της εξίσωσης  $f(x) = 0$ , η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε  $f''(x) = \left( 2x \ln x + x + \frac{1}{x} \right)' = 2 \ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$  και

$$f^{(3)}(x) = \left( 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αφού  $f^{(3)}(x) > 0$  στο  $(0, +\infty)$ , έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση  $f''$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Επίσης  $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$  και  $f''(1) = 2 > 0$  και επειδή η  $f''$  είναι συνεχής

στο  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ , υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον

$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε  $f''(x_0) = 0$ , το οποίο λόγω της μονοτονίας της  $f''$  είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$$0 < x < x_0 \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$x > x_0 \stackrel{f'' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0.$$

Επειδή η  $f''$  μηδενίζεται στο σημείο  $x_0$  και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{x} \right) \cdot \ln x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα η  $C_f$  δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) \cdot \ln x = -\infty,$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Άρα η  $C_f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την  $x = 0$ .



## Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$ .

- i. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$ .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση:  $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$ .
- iii. Να λύσετε την ανίσωση:  $x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$ .

### Λύση

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

- i. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}.$$

Επειδή  $f'(x) > 0$  στο  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $-1$ , έπεται ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$ .

- ii. Ισχύει

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2 + 1) = 4 + \ln(4^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(4)$$

και η  $f$  είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4.$$

- iii. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4 + 1) - \ln(x^6 + 1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln((x^3)^2 + 1) > x^2 + \ln((x^2)^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x^2) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

### Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

### Λύση

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbf{R}$ .

- i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x,$$

$$f''(x) = 2e^x + 2x \cdot e^x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της  $f''$  :

<b>X</b>	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
<b>f''(x)</b>	+	○	-	○	+

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η  $f$  είναι κυρτή στα  $(-\infty, -2 - \sqrt{2}]$  και  $[-2 + \sqrt{2}, +\infty)$  και κοίλη στο  $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$ .

- ii. Επειδή  $-2 + \sqrt{2} < 0$ , έπεται ότι για  $x > 0$  ισχύει  $[x, x+1] \subseteq [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$  και αφού  $f''(x) > 0$  στο  $(-2 + \sqrt{2}, +\infty)$  έπεται ότι η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα  $[-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ , άρα και στο  $[x, x+1]$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$ , οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την  $f$  στο  $[x, x+1]$  οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow f'(x+1) > f'(\xi) \stackrel{f' \text{ γν. αβξ.}}{\Leftrightarrow} x+1 > \xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

#### Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$  και παραγωγίσιμη στο  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$  με  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$  και  $f(3) = 12$ .

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y = 4x + 2$ .
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $B(\gamma, f(\gamma))$  να διέρχεται από το  $O(0, 0)$ .

#### Λύση

- i. Η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$  και παραγωγίσιμη στο  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ , οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{12 - 2}{\frac{5}{2}} = 4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = f'(\xi) = 4$ , άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y = 4x + 2$ .

- ii. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $B(\gamma, f(\gamma))$  έχει εξίσωση:

$$y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο  $O(0, 0)$ , πρέπει

$$-f(\gamma) = f'(\gamma)(-\gamma) \Leftrightarrow f(\gamma) = \gamma \cdot f'(\gamma). \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ .

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ , ως ηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ , ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \text{ και}$$

$$g(3) = \frac{12}{3} = 4,$$

άρα  $g\left(\frac{1}{2}\right) = g(3)$ , που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη  $g$  στο  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ . Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\gamma)\gamma - f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2} = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = \gamma f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η (1), συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $(\gamma, f(\gamma))$  να διέρχεται από το  $O(0,0)$ .

### Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$ ,  $x > -1$ .

i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

ii. Αν  $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$  να δείξετε ότι:

$$\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \ln^2(\sqrt{\alpha \cdot \beta})}{\ln(\sqrt{\alpha \cdot \beta}) + 1}$$

### Λύση

1. Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα  $\Delta$ , άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

- Αν  $\alpha = \beta$ , τότε η σχέση

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

γίνεται

$$2 \cdot f(\alpha) \geq 2 \cdot f(\alpha)$$

το οποίο ισχύει.

- Έστω τώρα ότι  $\alpha < \beta$ . Τότε έχουμε

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha) \quad (1)$$

Επίσης  $\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha = \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$ , οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την  $f$  στα διαστήματα

$\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$  και  $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$ , οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} \text{ και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Έτσι η (2) γίνεται  $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$ , το οποίο ισχύει αφού  $f'$  γνησίως αύξουσα και  $\xi_2 \geq \xi_1$ .

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για  $\alpha > \beta$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$ ,  $x > -1$ .

Ισχύει

$$f'(x) = \frac{(2-x^2)'(x+1) - (2-x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{(-x^2 - 2x - 2)'(x+1)^2 - (-x^2 - 2x - 2)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x > -1$ , συνεπώς  $f$  κυρτή στο  $(-1, +\infty)$ .

i. Έχουμε  $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$ , άρα  $\ln \alpha > -1$  και  $\ln \beta > -1$ . Επίσης

$$\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \ln^2(\sqrt{\alpha \cdot \beta})}{\ln(\sqrt{\alpha \cdot \beta}) + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 - (\ln \alpha)^2}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - (\ln \beta)^2}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$f(\ln \alpha) + f(\ln \beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση  $f$  η οποία είναι κυρτή στο  $(-1, +\infty)$  και για τους  $\ln \alpha > -1$  και  $\ln \beta > -1$ .