ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

<u>Λύση</u>

α) Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\alpha)<n<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-n$, $x\in[\alpha,\beta]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$ οπότε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

<u>Λύση</u>

i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση gof δύο συναρτήσεων f,g με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της gof;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Λύση

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $gof : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

<u>Λύση</u>

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

iii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Λύση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

<u>Λύση</u>

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathrm{N}^* \to \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

Άσκηση 8

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>Λύση</u>

i. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $|\eta\mu x|\le|x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

Λύση

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu {x_0}^\nu+\alpha_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=P(x_0)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

<u>Λύση</u>

Είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$

$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$

άρα $-3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3e^{2x+1} - 5x + 3\right) =$

  $-3\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} - 5\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$

  (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = e\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty$).

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$

  $-3\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} - 5\lim_{x\to-\infty} x + 3 = 0 + \infty + 3 = +\infty$

  (αφού $\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} = e\lim_{x\to-\infty}(e^2)^x = e\cdot 0 = 0$).

Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

γ) Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2x^{2011}+5x-7,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow {x_1}^{2011}<{x_2}^{2011} \Rightarrow 2{x_1}^{2011}<2{x_2}^{2011}$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 5x_1<5x_2 \Rightarrow 5x_1-7<5x_2-7$ άρα

$2{x_1}^{2011}+5x_1-7<2{x_2}^{2011}+5x_2-7 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου $f(1)=2+5-7=0$ και επομένως: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

iii. Είναι: $f(1)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x<1$, έχουμε: $f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0$
- Για κάθε $x>1$, έχουμε: $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει: $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

Άρα $D_f = \left[\ln 2, +\infty\right)$.

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in [\ln 2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{e^{x_1} - 2} < 4\sqrt{e^{x_2} - 2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < 4\sqrt{e^{x_2} - 2} + 3 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left(\left[\ln 2, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\ln 2\right), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$$

Έχουμε:

$$f(\ln 2) = 4\sqrt{e^{\ln 2} - 2} + 3 = 4 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (4\sqrt{e^x - 2} + 3) = +\infty$$

Άρα $f\left(\left[\ln 2, +\infty\right)\right) = \left[3, +\infty\right)$

iii. Η f είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in \left[\ln 2, +\infty\right)$ έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x-2}+3=y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x-2}=\dfrac{y-3}{4} \\ \dfrac{y-3}{4}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x-2=\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2 \\ y\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left[\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2+2\right]. \\ y\geq 3 \end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2+2\right)$ με $D_{f^{-1}}=[3,+\infty)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x)=2$.

Λύση

i. Πρέπει:

$$\left\{\begin{matrix} x-1\geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{x-1}+1>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ άρα } D_f=\left[1,+\infty\right)$$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\left[1,+\infty\right)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3=2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3\Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1}=2\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1}=\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”.

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3\Leftrightarrow \frac{y-3}{2}=\ln(\sqrt{x-1}+1)\Leftrightarrow$$

$e^{\frac{y-3}{2}}=\sqrt{x-1}+1\Leftrightarrow\left(e^{\frac{y-3}{2}}-1\right)^2=x-1$, πρέπει $e^{\frac{y-3}{2}}-1\geq 0$, επομένως

$$x=(e^{\frac{y-3}{2}}-1)^2+1,\ y\geq 3.$$

Άρα $f^{-1}(x)=(e^{\frac{x-3}{2}}-1)^2+1,\ x\in[3,+\infty)$

iv. $f^{-1}(1+x)=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}}-1)^2+1=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}}-1)^2=1 \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}-1=1$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}-1=-1) \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}=2$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}=0$ αδύνατον$) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=\ln 2 \Leftrightarrow x=2\ln 2+2$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3x+2$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^{x}+2^{x}<1$

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε x_1,x_2 με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

και $x_1<x_2\Rightarrow -3x_1>-3x_2\Rightarrow -3x_1+2>-3x_2+2$

άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-3x_1+2>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-3x_2+2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3x+2\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3\lim_{x\to-\infty}x+2=+\infty-(-\infty)-2=+\infty$$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$

οπότε $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3x+2\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3\lim_{x\to+\infty}x+2=0-\infty+2=-\infty$$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το:
$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left(-\infty, +\infty\right)$$

Επειδή $2011 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού $f(0) = 3$) και f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^{2011}+2x-5, x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^{2011}<x_2^{2011} \Rightarrow 3x_1^{2011}<3x_2^{2011}$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-5<2x_2-5$.

Άρα $3x_1^{2011}+2x_1-5<3x_2^{2011}+2x_2-5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε: $f(1)=0$ άρα $x=1$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $x=1$ η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$, ενώ για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1)=0$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{f(x)}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{4x+3}=-\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(3x+4)\right]=+\infty$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $\dfrac{2x-1}{f(x)}=g(x)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$ είναι $g(x)\neq 0$ για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης: $\dfrac{2x-1}{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(2x-1)\dfrac{1}{g(x)}\right]=0$

ii. Θέτουμε: $\dfrac{f(x)}{4x+3}=h(x)$, οπότε $f(x)=(4x+3)h(x)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=-\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(4x+3)h(x)\right]=7\cdot(-\infty)=-\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4)=\kappa(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\kappa(x)=+\infty$

Επίσης $3x+4\neq 0$ για τιμές κοντά στο 1, οπότε $f(x)=\dfrac{k(x)}{3x+4}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{3x+4}k(x)\right]=\dfrac{1}{7}(+\infty)=+\infty$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$$

Λύση

i. Είναι: $f(1)=8$ και $f(5)=12$ και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ($1<5$ και $f(1)<f(5)$).

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,5]$ άρα έχει σύνολο τιμών το:
$$f([1,5]) = [f(1), f(5)] = [8,12]$$

$$\frac{29}{3} \in f([1,5])$$

iii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$.
Έτσι έχουμε:

$$1<2<5 \Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(2)<12 \Leftrightarrow 16<2f(2)<24$$

$$1<3<5 \Leftrightarrow f(1)<f(3)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(3)<12 \Leftrightarrow 24<3f(3)<36$$

$$1<4<5 \Leftrightarrow f(1)<f(4)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(4)<12 \Leftrightarrow 32<4f(4)<48$$

οπότε:
$$72<2f(2)+3f(3)+4f(4)<108 \Leftrightarrow$$

$$8 < \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} < 12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:
$f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$ και αφού f γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(3e^x+1)-2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2$.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x+1>0$ που αληθεύει για κάθε $x\in R$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f=\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1\Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1}+1)<\ell n(3e^{x_2}+1)\Rightarrow \ell n(3e^{x_1}+1)-2<\ell n(3e^{x_2}+1)-2\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y+2=\ell n(3e^x+1)\Leftrightarrow e^{y+2}=3e^x+1\Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{e^{y+2}-1}{3},\frac{e^{y+2}-1}{3}>0 \text{ οπότε } x=\ell n\frac{1}{3}(e^{y+2}-1), y>-2.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\frac{1}{3}(e^{x+2}-1), x\in\left(-2,+\infty\right)$

iv. Έχουμε:

$$f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2\Leftrightarrow \ln\left(3e^x+1\right)-2<\ln\frac{1}{3}\left(e^{\ln 5}-1\right)-2\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3e^x+1\right)<\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3e^x+1<\frac{4}{3}\Leftrightarrow 9e^x+3<4\Leftrightarrow$$

$$e^x<\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<\ln\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<-\ln 9$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-2x^3-3x-1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x-1$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow -2x_1^{\ 3}>-2x_2^{\ 3}$$

και

$$x_1<x_2\Rightarrow -3x_1>-3x_2\Rightarrow -3x_1-1>-3x_2-1$$

άρα

$$-2x_1^{\ 3}-3x_1-1>-2x_2^{\ 3}-3x_2-1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. $f^{-1}(x)=2\Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=f(2)\Leftrightarrow x=-23$

iv. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x)\geq x+1\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)\leq f\left(x+1\right)\Leftrightarrow$$

$$x\leq -2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)-3\left(x+1\right)-1\Leftrightarrow$$

$2x^3+6x^2+10x+6\leq 0\Leftrightarrow$ (Σχήμα Horner)

$\left(x+1\right)\cdot\left(2x^2+4x+6\right)\leq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ (αφού $2x^2+4x+6>0$ διότι $\Delta=16-48=-32<0$)

Άσκηση 11

Δίνεται η $1-1$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x))+f(x)=3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=3$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$

iv. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f\left(x\right)\right)+f(x)-2}$

Λύση

i. Η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(1)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f\left(f\left(f^{-1}(1)\right)\right)+f\left(f^{-1}(1)\right)=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow$$

$$f(1)+1=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow 4-2=3f^{-1}(1)\Leftrightarrow f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$$

ii. Για $x=1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f\left(f(1)\right)+f(1)=3\cdot 1+2\Leftrightarrow f(3)+3=5\Leftrightarrow f(3)=2$$

iii. Είναι:

$f^{-1}(x)=3\Leftrightarrow x=f(3)\Leftrightarrow x=2$ (από ii)

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f(x)\right)+f(x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{3x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

αφού είναι: $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Όμοια και για το $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=(x^2-1)g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1).$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\Big[g(x)(x^2-1)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)\Big]=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\big[3f(x)-2\big]=1>0$, οπότε $3f(x)-2>0$, κοντά στο x_0

Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)g(x)+3\sqrt{x}-3\eta\mu(x-1)-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\big[3g(x)\big]+\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)(x+1)}-3\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=6+\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=$$

$$=6+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=(-1,1)$

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f_2 και f_1 με $f_1(x)=2\ln x+3$ και $f_2(x)=\frac{x+1}{1-x}$, αφού για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει:

$$(f_1 o f_2)(x)=f_1(f_2(x))=2\ln f_2(x)+3=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Rightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Rightarrow$$

$$x_1-x_1x_2+1-x_2=x_2+1-x_1x_2-x_1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x)=y\Rightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Rightarrow \frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow$$

$$x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-x\cdot e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow(1+e^{\frac{y-3}{2}})\cdot x=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Rightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}$$

Επειδή:

$$-1<x<1\Rightarrow-1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1\Rightarrow\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1$$

και $\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}>-1$

ή $-1<1$ και $2e^{\frac{y-3}{2}}>0$ που αληθεύουν για κάθε $y\in\mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{e^{\frac{x-3}{2}}+1},x\in\mathbb{R}$$

- Η f^{-1} είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}}-1$ και $f_2(x)=e^{\frac{x-3}{2}}+1$. Η f_1 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $g_1(x)=e^x-1$ και $g_2(x)=\frac{x-3}{2}$

  Πράγματι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει:

  $$\left(g_1 o g_2\right)(x)=g_1\left(g_2\left(x\right)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}-1=f_1(x)$$

  Η f_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $h_1(x)=e^x+1$ και $h_2(x)=\frac{x-3}{2}$.

  Πράγματι για κάθε $x\in R$, ισχύει:

  $$\left(h_1 o h_2\right)(x)=h_1\left(h_2(x)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}+1=f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3)$$

Αν θέσουμε $u=\frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x\to1^-\Leftrightarrow u\to+\infty$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to +\infty}(2\ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3\right)$$

Αν θέσουμε $u = \dfrac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0}\left(2\ln u + 3\right) = -\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln\frac{x+2}{2-x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(hog)(x)=x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η g , πρέπει: $\frac{x+2}{2-x}>0 \Leftrightarrow x\in(-2,2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το:

$D_g=(-2,2)$.

Επίσης έχουμε: $D_f=\mathbb{R}^*$ οπότε το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\ell n\frac{x+2}{2-x}\neq 0\right\}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\frac{x+2}{2-x}\neq 1\right\}=$$

$$\{x\in(-2,2)\,/\,x\neq 0\}=(-2,0)\cup(0,2)\,.$$

ii. Ισχύει $(hog)(x)=x \Leftrightarrow h(g(x))=x \Leftrightarrow h\left(\ln\frac{x+2}{2-x}\right)=x$ (1)

Θέτουμε $u=\ln\frac{x+2}{2-x}$, οπότε έχουμε:

$u=\ln\frac{x+2}{2-x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2-x}=e^u \Rightarrow 2e^u-xe^u=x+2 \Rightarrow x=\frac{2e^u-2}{e^u+1}$ αφού $e^u+1\neq 0$, για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Άρα η (1) γίνεται: $h(u)=\frac{2e^u-2}{e^u+1}$ ή $h(x)=\frac{2e^x-2}{e^x+1}$.

iii.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $h(-x)=\frac{2e^{-x}-2}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{2}{e^x}-2}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{2-2e^x}{1+e^x}=-\frac{2e^x-2}{1+e^x}=-h(x).$

  Άρα η h περιττή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1,5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1,5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^4<{x_2}^4\Rightarrow 2{x_1}^4<2{x_2}^4$ και

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1<3\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1+1<3\ln x_2+1$

άρα $2{x_1}^4+3\ln x_1+1<2{x_2}^4+3\ln x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+1)=0-\infty+1=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+1)=(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty$

Επομένως είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 1 = 3(\ln 1 - \ln\lambda) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 1 = -3\ln\lambda \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 3\ln\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda) = 0$. Αυτό ισχύει αφού $0 \in f((0,+\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. $2f^3(x)-3=2x-3f(x)\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0+3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{2\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3}$$

Αφού $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3\neq 0,$ διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta=4f^2(x_0)-4\cdot 2(2f^2(x_0)+3)=4f^2(x_0)-16f^2(x_0)-24=$$

$$-12f^2(x_0)-24=-12\left[f^2(x_o)+2\right]<0$$

Άρα: $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}\le 2\left|x-x_0\right|$.

Οπότε $-2\left|x-x_0\right|\le f(x)-f(x_0)\le 2\left|x-x_0\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-2\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[2\left|x-x_0\right|\right]=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ii. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f(x)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f(x)\Leftrightarrow f(x)-\alpha=0\Leftrightarrow (f(x)-\alpha)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0,\ \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2\ge 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2+3\ge 3>0$

$(1)\Leftrightarrow 2\left(f^3(x)-\alpha^3\right)+3\left(f(x)-\alpha\right)=0\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$

$2x+3=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-3}{2}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$.

Επίσης $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$.

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Οπότε: $2f^3(x)+3f(x)=2x+3\Leftrightarrow 2y^3+3y=2f^{-1}(y)+3$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-3}{2},\ x\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)=0\Leftrightarrow x=f^{-1}(0)=\dfrac{2\cdot 0^3+3\cdot 0-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f , οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y=x$.

$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow \dfrac{2x^3+3x-3}{2}=x$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x-3=2x \Leftrightarrow 2x^3+x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

Παρατήρηση: Τις προτάσεις

Α) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)-\eta\mu f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $|2f(x)-x|\le|f(x)|$.

2.Να αποδείξετε ότι $|f(x)|\le|x|$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4.Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f(x)}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

<u>Λύση</u>

1. Από την υπόθεση έχουμε:

$2f(x)-\eta\mu f(x)=x\Rightarrow 2f(x)-x=\eta\mu f(x)\Rightarrow|2f(x)-x|=|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$ **(1)**

2. Ισχύει

$$\big||2f(x)|-|x|\big|\le|2f(x)-x|\overset{(1)}{\le}|f(x)|\Rightarrow\big||2f(x)|-|x|\big|\le|f(x)|\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow-|f(x)|\le\underline{|2f(x)|-|x|\le|f(x)|}\Rightarrow|2f(x)|-|f(x)|\le|x|\Rightarrow|f(x)|\le|x|$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $|f(x)|\le|x|\Rightarrow-|x|\le f(x)\le|x|$, **(2)** όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, οπότε η **(2)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

4. Θέτουμε $f(x)=u$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, τότε $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

$$2f(x)-\eta\mu f(x)=x\overset{\gamma\iota\alpha\, x\neq 0}{\Rightarrow}2\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=1.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=2-1=1\neq 0$, οπότε για x κοντά στο 0 θα ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}=1.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x+1)=3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x+5)\le 0$.

Λύση

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1<2$ είναι $f(-1)=0<f(2)=3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x<-1\Rightarrow f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\Rightarrow f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x+1)=3\Leftrightarrow f(2e^x+1)=f(2)\Leftrightarrow 2e^x+1=2\Leftrightarrow$$

$$2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x+5)\le 0\Leftrightarrow f(3x+5)\le f(-1)\Leftrightarrow 3x+5\le -1\Leftrightarrow 3x\le -6\Leftrightarrow x\le -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=2017.$
- $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.
- $f(x)=f(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.
4. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2g(x)=3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Rightarrow}f(x)=(x-1)h(x)+2x-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2017$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)h(x)+2x-1]=0\cdot 2017+2-1=1$. Άρα $f(1)=1$.

2. Αφού η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτοντας $x=1$ παίρνουμε:
$|g(1)-2|\le|f(1)-1|=0\Rightarrow g(1)-2=0\Rightarrow g(1)=2$.

Επίσης έχουμε:
$|g(x)-2|\le|f(x)-1|\Leftrightarrow -|f(x)-1|\le g(x)-2\le|f(x)-1|\Leftrightarrow 2-|f(x)-1|\le g(x)\le 2+|f(x)-1|$ **(1).**
Όμως χρησιμοποιώντας ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=1$, έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 1}(2-|f(x)-1|)=\lim\limits_{x\to 1}(2+|f(x)-1|)=2$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2=g(1)$. Άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.

3. Αφού η σχέση $f(x)=f(x+1)$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτοντας $x=1$ παίρνουμε:
$f(2)=f(1)=1$.

Έχουμε: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x+1)\overset{\text{Θέτω: } x+1=u,\text{ όταν } x\to 1 \text{ τότε } u\to 2}{=}\lim\limits_{u\to 2}f(u)$, οπότε
$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1=f(2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=x^2g(x)-3$ που είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
Επίσης για x=2 η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$ μας δίνει: $|g(2)-2|\le|f(2)-1|=0\Rightarrow g(2)=2.$
Έχουμε: $t(1)=1^2g(1)-3=2-3=-1<0$ και $t(2)=2^2g(2)-3=4\cdot2-3=5>0$, οπότε $t(1)t(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ.Bolzano οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $t(\xi)=0\Rightarrow \xi^2g(\xi)=3$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
   a. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
   b. Ισχύει: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=y=0$ έτσι έχουμε: $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

2. Έστω $x\in\mathbb{R}$, τότε και $-x\in\mathbb{R}$.Θέτουμε στη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ όπου $y=-x$ και παίρνουμε:

$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$,
άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

3.
a. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. **(1)**
Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=x_1$ και $y=-x_2$ γίνεται

$f(x_1-x_2)=f(x_1)+f(-x_2)\Leftrightarrow f(x_1-x_2)=f(x_1)-f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1-x_2)=0$.
Αφού όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, θα είναι υποχρεωτικά $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

b. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x=f^{-1}(\alpha)$, $f(y)=\beta\Leftrightarrow y=f^{-1}(\beta)$, έτσι έχουμε
$\alpha+\beta=f(x)+f(y)=f(x+y)\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=x+y\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$
Άρα $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Αν ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε έχουμε:
$3\rho^2+4f^2(\rho)=27 \Leftrightarrow \rho^2=9 \Leftrightarrow \rho=3$ ή $\rho=-3$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f, ως συνεχής στο $[-3,3]$, είναι συνεχής στο $(-3,3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

iii.

- Αν $f(x)<0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=-\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

- Αν $f(x)>0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

iv. $f(1)=\sqrt{6}>0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},x\in[-3,3].$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27-3x^2}-3\sqrt{3}}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}x^7\eta\mu\frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x+9-9}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}$

ii. Επειδή $\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\ne 0$, έχουμε:

$\left|x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|x^7\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|x^7\right|\Leftrightarrow -\left|x^7\right|\le x^7\eta\mu\frac{2}{x}\le\left|x^7\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^7\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|x^7\right|=0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} \le f(x) \le \frac{x^8 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x} = \frac{1}{3}$ (από i ερώτημα).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^7 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{1}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (από ii ερώτημα)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$, είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$.

<u>Λύση</u>

i. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε για $x=2$ έχουμε:

$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1 \Leftrightarrow f(5)+10=5 \Leftrightarrow f(5)=-5$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$

$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4$.

iv. Έχουμε:

$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$

$f^{-1}(2x^2+7x)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$ με $0<\alpha<\beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\alpha+\beta$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$, έχει ακριβώς μια λύση στο (α,β).

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $0<\alpha<\beta\Leftrightarrow 2\alpha<2\beta\overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} f(\beta)<f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\alpha-\beta$, η οποία είναι συνεχής (f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-\alpha-\beta>f(x_2)-\alpha-\beta\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$.

Οπότε το σύνολο τιμών της g είναι
$g([\alpha,\beta])=[g(\beta),g(\alpha)]=[f(\beta)-\alpha-\beta,f(\alpha)-\alpha-\beta]=[\alpha-\beta,\beta-\alpha]$ και επειδή το

$0\in\left[\underset{-}{\alpha-\beta},\underset{+}{\beta-\alpha}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($g$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha+\beta$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής (αφού f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)$ **(1)** και $x_1<x_2\Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$ **(2)**.

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$

Οπότε το σύνολο τιμών της h είναι
$h([\alpha,\beta])=[h(\beta),h(\alpha)]=[f(\beta)-2\beta,f(\alpha)-2\alpha]=[2(\alpha-\beta),2(\beta-\alpha)]$ και επειδή το

$0\in\left[\underbrace{2(\alpha-\beta)}_{-},\underbrace{2(\beta-\alpha)}_{+}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($h$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_1\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $h(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=2x_1$.

Άσκηση 12

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x) = -e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Αν $f(2017) > 0$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και g.

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3 + (\theta - 1)x - 1}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Αν $f(1) < e$ και $g(-2) > -2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, 1)$.

Λύση

1. Είναι $f(x)g(x) = -e^x < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x)g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως οι συναρτήσεις f, g δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι και συνεχείς θα διατηρούν σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα ετερόσημες.

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(2017) > 0$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $g(2017) < 0$.

- Αν $\theta = 0$ τότε $|\eta\mu\vartheta| = |\vartheta| \Leftrightarrow |\vartheta| - |\eta\mu\vartheta| = 0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{-x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(2017)x^4}{-x} = -g(2017)\lim_{x\to+\infty} x^3 = -g(2017)(+\infty) \overset{g(2017)<0}{=} +\infty$$

- Αν $\theta \neq 0$ τότε $|\eta\mu\vartheta| < |\vartheta| \Leftrightarrow |\vartheta| - |\eta\mu\vartheta| > 0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3 + (\theta - 1)x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(2017)x^4}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3} = \frac{g(2017)}{|\theta| - |\eta\mu\theta|}\lim_{x\to+\infty} x =$$
$$= \frac{g(2017)}{|\theta| - |\eta\mu\theta|}(+\infty) \underset{|\theta|-|\eta\mu\theta|>0}{\overset{g(2017)<0}{=}} -\infty.$$

3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2, 1)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = g(x) - x$, η οποία είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) στο $[-2, 1]$.

Είναι $h(1) = g(1) - 1 < -1 - 1 = -2 < 0,$ γιατί: $f(1)g(1) = -e \Leftrightarrow g(1) = \dfrac{-e}{f(1)} < -1$ αφού

$$f(1) < e \Leftrightarrow \frac{e}{f(1)} > 1 \Leftrightarrow -\frac{e}{f(1)} < -1.$$

Επίσης $h(-2) = g(-2) + 2 > -2 + 2 = 0 \Leftrightarrow h(-2) > 0$.

Άρα η h είναι συνεχής στο $\left[-2,1\right]$ και $h(-2)h(1)<0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-2,1\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=x_0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R},\ \alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x},\ \alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x},\ \alpha>3$

Λύση

i. Είναι $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1=\left(\alpha^x+1\right)^2\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0)=-2$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=-\left(\alpha^x+1\right)=-\alpha^x-1$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1\right]}{3^x\cdot\left[3\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4\right]}=\dfrac{-1}{4}$, αφού $0<\dfrac{\alpha}{3}<1, 0<\dfrac{1}{3}<1$ και $0<\dfrac{2}{3}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\cdot\left[-2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x-2\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3+4\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}=-\infty$, αφού $\dfrac{\alpha}{2}>1,\dfrac{3}{2}>1$ και $0<\dfrac{1}{2}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

Λύση

i. Η σχέση $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, έχουμε:

$$1\le 4f(0)\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$$

Για $x=1$, έχουμε:

$$2\le 4f(1)\le 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$$

ii. Για $x\ne 0$, θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+1\le 4f\left(\frac{1}{x}\right)\le\left(\frac{1}{x}\right)^4+2\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\le x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4\right)=\frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x+3\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\frac{1}{4}+4\cdot 3}{0+3}=\frac{49}{12}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ (από ii), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

iv. Έστω $g(x)=f(x)-x$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει:

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\cdot\left[f(1)-1\right]<0$ αφού $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)>0$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(1)<1$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε
$g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0$

Άσκηση 15

i.Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2,$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x+x^2 g(x)}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{2f(x)-4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xh(x)+4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+4}{2}=2$$

ii. Είναι:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $xg(x)\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2$

- Αν $x>0$, τότε: $g(x)\le\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\le\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και

  επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\le 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\le 0.$

- Αν $x<0$, τότε: $g(x)\ge\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και
  επομένως

  $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\ge 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\ge 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2x+x^2g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[f^2(x)+\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\right]}{x^2\left[\left(\dfrac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2+g(x)\right]}=\frac{4+4}{1+0}=8.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}4\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{(2x)^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(2x)}{(2x)}\right)^2=4\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f\left(x\right)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-\alpha=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-\alpha\right)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0,\ \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f\left(x\right)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2\ge0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2+3\ge3>0$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)-2\alpha^3+3f\left(x\right)-3\alpha=0\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)+3f\left(x\right)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$

$4x+1=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-1}{4}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$

και $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

άρα $2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 4x_1+1=4x_2+1$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$3f\left(f^{-1}(x)\right)+2\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$$

$3x+2x^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-1}{4}.$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1{}^3<x_2{}^3\Rightarrow 2x_1{}^3<2x_2{}^3$

και $x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1$

άρα

$2x_1{}^3+3x_1-1<2x_2{}^3+3x_2-1\Rightarrow \dfrac{2x_1{}^3+3x_1-1}{4}<\dfrac{2x_2{}^3+3x_2-1}{4}\Rightarrow$
$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2),$

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow$

$\dfrac{2x^3+3x-1}{4}=x\Leftrightarrow 2x^3-x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

iv. Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε:

$f(2e^{x-1})=f(3-x)\Leftrightarrow 2e^{x-1}=3-x\Leftrightarrow 2e^{x-1}+x-3=0$ (1)

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

Έστω $g(x)=2e^{x-1}+x-3$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\Rightarrow 2e^{x_1-1}<2e^{x_2-1}$

και $x_1<x_2\Rightarrow x_1-3<x_2-3$

άρα $2e^{x_1-1}+x_1-3<2e^{x_2-1}+x_2-3\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει
$f^2(x)+4ημ^2x=x^2-3x+4f(x)ημx+10$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2ημx$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0)=\sqrt{10}$.
iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+συνx-1-\sqrt{10}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$f^2(x)+4ημ^2x=x^2-3x+4f(x)ημx+10 \Leftrightarrow$

$[f(x)-2ημx]^2=x^2-3x+10>0,$ (1) γιατί $\Delta=9-40=-31<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο $x^2-3x+10$ είναι ομόσημο του $1>0$. Οπότε $f(x)-2ημx\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού η $g(x)=f(x)-2ημx$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ii. Είναι: $f(0)=\sqrt{10}$, οπότε $g(0)=f(0)-2ημ0=f(0)=\sqrt{10}>0$ και από (i) έχουμε: $g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-2ημx>0$. Άρα $f(x)-2ημx=\sqrt{x^2-3x+10}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-3x+10}+2ημx$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+συνx-\sqrt{10}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+10}+2ημx+συνx-\sqrt{10}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}+2\frac{ημx}{x}+\frac{συνx-1}{x}\right)\overset{(*)}{=}-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2+0=-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2.$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}}\right)=\frac{-3}{2\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(2\frac{ημx}{x}\right)=2\cdot 1=2,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{συνx-1}{x}\right)=0$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης fofog.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g=\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq 3\}=(-\infty,3]\neq\varnothing$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,3]$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1=\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x+1}$, (πρέπει $y\geq -1$) $\Leftrightarrow x=(y+1)^2-1$ οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2-1$ με $x\geq -1$

iv. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$D_{fofog} = D_{fo(fog)} = \left\{ x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1 \right\} = (-\infty, 3] \neq \varnothing$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με

$x_1 < x_2 \overset{\text{g γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$

$f\left(f\left(g\left(x_1\right)\right)\right) > f\left(f\left(g\left(x_2\right)\right)\right)$.

Άρα η συνάρτηση fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\[2ex] \lambda, & x=0\\[2ex] \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+\kappa\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa\cdot1}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$f(0)=\lambda$

Άρα: $\lambda=4$ και $2+\kappa=4\Leftrightarrow\kappa=2$

ii. Για $\kappa=2$ και $\lambda=4$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\[2ex] 4, & x=0\\[2ex] \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^2}}+3\right)} = (+\infty)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right) = -\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = 0,$$

αφού: $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| = \dfrac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{|x|} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1),\ x\in[0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$g(0) = f(0) = 4 > 0$

$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\dfrac{e}{9} < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2) \\ \\ \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$ και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

Λύση

i. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)}=-\dfrac{1}{16}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\kappa x+1}{2(x-2)(x+2)}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+1)=2\kappa+1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}2(x-2)(x+2)=0$

Αν $2\kappa+1\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq -\dfrac{1}{2}$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Αν $2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-\dfrac{1}{2}$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x+1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{4x^2\left(x-2\right)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x)+2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x)-2x$ και για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3xh(x)-2x}{\eta\mu x} = 3\cdot 5\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15-2=13$$

iv. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} g(x) \overset{x=u+3}{=} \lim\limits_{u\to 0} g(u+3) = \lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)+f(u)\right] = 13+(-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=-2x^5-2kx^3+2k^5$, $x\in\mathbb{R}$ και $k>0$.
α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,k)$.
δ) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+2k^5}{\eta\mu^3 x}=\lambda^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(k,\lambda)$.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5\Rightarrow -2x_1^5>-2x_2^5$ **(1)** και

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\overset{-2k<0}{\Rightarrow}-2kx_1^3>-2kx_2^3\Rightarrow -2kx_1^3+2k^5>-2kx_2^3+2k^5$. **(2)**

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $-2x_1^5-2kx_1^3+2k^5>-2x_2^5-2kx_2^3+2k^5\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^5-2kx^3+2k^5)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^5)=-2(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^5-2kx^3+2k^5)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^5)=-2(-\infty)=+\infty$$

Επομένως είναι: $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0,k]$, ισχύουν:

- $f(0)=2k^5>0$
- $f(k)=-2k^5-2k^4+2k^5=-2k^4<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,k)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-f(x)+2k^5}{\eta\mu^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5+2kx^3-2k^5+2k^5}{\eta\mu^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(2x^2+2k)}{\eta\mu^3 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2k}{\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}}=2k=\lambda^2$$, αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

Δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων $M(k,\lambda)$, ικανοποιούν την εξίσωση: $y^2=2x$.

Άρα ανήκουν σε μία παραβολή με εξίσωση $y^2=2x$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1<\ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1<3\ln 2x_2$$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow e^{3x_1}<e^{3x_2}$

και

$$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-2<4x_2-2.$$

Άρα $3\ln 2x_1+e^{3x_1}+4x_1-2<3\ln 2x_2+e^{3x_2}+4x_2-2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii.Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=-\infty+1+0-2=-\infty$$

αφού $\lim_{x\to 0}\ln 2x=\lim_{u\to 0}\ln u=-\infty$, και $\lim_{x\to 0}e^{3x}=\lim_{u\to 0}e^{u}=1$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=+\infty$ αφού $\lim_{x\to +\infty}\ln 2x=\lim_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$ και

$$\lim_{x\to +\infty} e^{3x}=\lim_{u\to +\infty} e^{u}=+\infty$$

iii. $f(x)=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu \Leftrightarrow$

$3\ln 4\mu+e^{6\mu}+8\mu=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1) \Leftrightarrow$

$3\ln 2\cdot(2\mu)+e^{3(2\mu)}+4\cdot(2\mu)-2=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1)-2 \Leftrightarrow$

$f(2\mu)=f(\mu^2+1) \Leftrightarrow \mu^2+1=2\mu \Leftrightarrow \mu=1$ (Διπλή ρίζα).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \le \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \le \frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

- Για $x>0$, έχουμε: $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \le \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 \le 3\eta\mu x - 2xf(x) \le \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow$

  $-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\frac{\eta\mu x}{x} \le f(x) \le \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$

  αλλά: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

- Για $x<0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x} \le f(x) \le -\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{3}{2}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{3}{2}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}$.

ii. Η σχέση $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$ ισχύει για κάθε $x\in R$ άρα και για $x=0$ οπότε έχουμε: $4f(0)+3f(1)=-2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}.$$

Άρα $4\cdot\frac{3}{2}+3f(1)=-2013\Leftrightarrow f(1)=-673$.

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$

Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$. Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=-673<0$$

Οπότε: $h(0)h(1)=-\frac{673}{2}<0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4$, για κάθε $x\in(0,2)$.
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+1}{x}=5$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$.
2. Αν $g(x)=4-e^x-f(x)$, $x\in(0,2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $t(x)=\ln(-f(x)+4)$, $x\in(0,2)$ τέμνει την $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ θα είναι συνεχής και στα άκρα 0 και 2, οπότε θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4 \overset{x<2\Leftrightarrow x-2<0}{\Rightarrow} x+2\le f(x)\le 4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$ **(1)**

  Όμως $\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ και $\lim\limits_{x\to2}4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\overset{x-2=u,\ x\to2\Rightarrow u\to0}{=}4\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=4$, οπότε η **(1)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$. Άρα $f(2)=4$.

- Θέτουμε $\dfrac{f(x)+1}{x}=s(x)\Rightarrow f(x)=xs(x)-1$ και $\lim\limits_{x\to0}s(x)=5$.

  Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(xs(x)-1)=0\cdot5-1=-1$. Άρα $f(0)=-1$.

2. Έστω $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow -f(x_1)>-f(x_2)$ **(2)** και

$x_1<x_2\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow 4-e^{x_1}>4-e^{x_2}$ (3).

Προσθέτοντας τις **(2)** και **(3)** έχουμε: $4-e^{x_1}-f(x_1)>4-e^{x_2}-f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$.

Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$, το σύνολο τιμών της θα είναι: $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to2^-}g(x),\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right)=(-e^2,4)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(4-e^x-f(x))=4-e^2-4=-e^2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(4-e^x-f(x))=4-e^0+1=4$.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,2)$ έτσι ώστε να ισχύει: $t(x_0)=x_0$.
Είναι:
$t(x_0)=x_0\Leftrightarrow\ln(-f(x_0)+4)=x_0\Leftrightarrow e^{x_0}=-f(x_0)+4\Leftrightarrow 4-f(x_0)-e^{x_0}=0\Leftrightarrow g(x_0)=0$

Επειδή το $0 \in g(A)=\left(-e^{2},4\right)$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=\left(0,2\right)$, υπάρχει μοναδικό $x_{0}\in\left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_{0})=0$. Άρα και $t(x_{0})=x_{0}$.

Άσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)=x^2+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)$.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=x-f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Είναι $x^2+x+1>0$ γιατί $\Delta=-3<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του 1>0. Άρα $f^2(x)=x^2+x+1>0\Rightarrow f^2(x)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε: $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

2. Αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+f(x)}{x}\cdot x-1)=-\dfrac{1}{2}\cdot 0-1=-1<0$, θα υπάρχει x_1 (κοντά στο 0) με $f(x_1)<0$ και λαμβάνοντας υπόψη το **(1)** ερώτημα θα έχουμε $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε: $f^2(x)=x^2+x+1\Rightarrow f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $$\lim_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

4. Αφού , $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=-\dfrac{1}{2}<0$, υπάρχει ρ_1 κοντά στο $\left(-\infty\right)$ έτσι ώστε $g(\rho_1)<0$.
Αφού $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-f(x)\right)=0+1=1>0$, υπάρχει ρ_2 κοντά στο 0 έτσι ώστε $g(\rho_2)>0$.
Έχουμε $g(\rho_1)g(\rho_2)<0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]\subseteq\left(-\infty,0\right)$, οπότε ισχύει το Θ. Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\left(\rho_1,\rho_2\right):g(x_0)=0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1. Αν $1<f(x)<e$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Αν $f(0)>1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x+x\eta\mu\frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν $f(k)+f(2k)=4k$, $k>0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x)-k}{x-2k}=\frac{f(x)-2k}{x-k}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(k,2k)$.

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g:[1,3]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,3]$ έτσι ώστε $g(\xi)=\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}-\frac{7}{3}$.

<u>Λύση</u>

1. Έστω $h(x)=f(x)-e^x$, $x\in[0,1]$.

- Αφού η σχέση $1<f(x)<e$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτοντας $x=0$ και $x=1$ παίρνουμε: $1<f(0)<e$ και $1<f(1)<e$, αντίστοιχα.
- Είναι $h(0)=f(0)-e^0>1-1=0\Rightarrow h(0)>0$ και $h(1)=f(1)-e^1<e-e=0\Rightarrow h(1)<0$, οπότε ισχύει: $h(0)h(1)<0$.
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω ισχύει το Θ.Bolzano για την h, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=e^{x_0}$.

2. Έστω $\varphi(x)=f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x}$, $x>0$ η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to+\infty}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$, αφού:

  $\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|\le\frac{1}{|u|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|u|}\le\frac{\eta\mu u}{u}\le\frac{1}{|u|}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}(-\frac{1}{|u|})=\lim\limits_{u\to+\infty}(\frac{1}{|u|})=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=f(0)-1-0=f(0)-1>0$. Τότε θα υπάρχει x_1 κοντά στο 0 ώστε $\varphi(x_1)>0$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to 0}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=0-(+\infty)-1=-\infty$. Τότε θα υπάρχει x_2 κοντά στο $+\infty$ ώστε $\varphi(x_2)<0$.
- Είναι $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$ και η συνάρτηση φ συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(0,+\infty)$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq(0,+\infty)$, με $x_0>0$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$.

3. Έστω $t(x)=(f(x)-k)(x-k)-(f(x)-2k)(x-2k)$, $x\in[k,2k]$, $k>0$.

- Είναι $t(k)=-(f(k)-2k)(k-2k)=k(f(k)-2k)<0$, γιατί
  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)=4k-f(k)\Leftrightarrow 2f(k)<4k\Leftrightarrow f(k)-2k<0$ και $k>0$.

- $t(2k)=(f(2k)-k)(2k-k)=k(f(2k)-k)>0$, γιατί:
  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)\Leftrightarrow f(2k)>f(k)=4k-f(2k)\Leftrightarrow 2f(2k)>4k\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(2k)>2k>k\Leftrightarrow f(2k)-k>0$ και $k>0$.
- Είναι $t(k)t(2k)<0$ και η συνάρτηση t συνεχής στο $[k,2k]$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(k,2k)$, τέτοιο ώστε $t(\xi)=0$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$. Τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M δηλαδή υπάρχουν
$x_1,x_2: m=g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)=M$ **(1),** για κάθε $x\in[1,3]$.
Θέτουμε στην **(1)**, όπου $x=1,2,3$, έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(2)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(3)\le g(x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ 2g(x_1)\le 2g(2)\le 2g(x_2)\\ 3g(x_1)\le 3g(3)\le 3g(x_2)\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}6g(x_1)\le g(1)+2g(2)+3g(3)\le 6g(x_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)\le\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\le g(x_2)$$

1η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=\dfrac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_1$

2η Περίπτωση: Αν $g(x_2)=\dfrac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_2$

3η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g=$σταθερή, οπότε ξ είναι κάθε σημείο του διαστήματος $[1,3]$.

4η Περίπτωση: Αν $g\left(x_1\right) < \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} < g\left(x_2\right)$.

Δηλαδή το $\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} \in \left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right)\right)$, οπότε από Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(1,3\right)$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} = \frac{f(1)-1+2(f(2)-2)+3(f(3)-3)}{6} =$$

$$= \frac{f(1)-1+2f(2)-4+3f(3)-9}{6} = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left[1,3\right]$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}.$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(e^{f(x)}\right) = \ln x + 2$, για κάθε $x > 0$ και
- $(f \circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln(\ln x + 1)^2$ για κάθε $x > \frac{1}{e}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\ln(x-1)$, $x > 1$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{-x} + 2\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(1+e, 1+e^{3/2}\right)$.

Λύση

1. Έστω
$x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x_1 + 2 = \ln x_2 + 2 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. $(f \circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln(\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow f(f(e^{f(x)})) = 2\ln(\ln x + 1) \Leftrightarrow f(\ln x + 2) = 2\ln(\ln x + 1)$ **(1)**
Θέτουμε: $\ln x + 2 = y \Leftrightarrow \ln x + 1 = y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$ και η **(1)** γίνεται:
$f(\ln x + 2) = 2\ln(\ln x + 1) \Rightarrow f(y) = 2\ln(y-1)$, $y > 1$. Άρα $f(x) = 2\ln(x-1)$, $x > 1$.

3. Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι:
$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\} = \{x > 1 \text{ και } 2\ln(x-1) > 1\} = \left\{x > 1 \text{ και } x > 1 + \sqrt{e}\right\} = \left(1+\sqrt{e}, +\infty\right)$

$(f \circ f)(x) = f\left(e^{-x} + 2\right) \Leftrightarrow f(f(x)) = f\left(e^{-x} + 2\right) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow 2\ln(x-1) = e^{-x} + 2$
$\Leftrightarrow 2\ln(x-1) - e^{-x} - 2 = 0.$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2\ln(x-1) - e^{-x} - 2$ και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $\left[1+e, 1+e^{3/2}\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[1+e, 1+e^{3/2}\right] \subseteq \left(1+\sqrt{e}, +\infty\right)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(e+1) = 2\ln(e+1-1) - e^{-(e+1)} - 2 = 2 \cdot 1 - \frac{1}{e^{e+1}} - 2 = -\frac{1}{e^{e+1}} < 0$

- $g(1+e^{3/2}) = 2\ln(1+e^{3/2}-1) - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 3 - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 1 - \dfrac{1}{e^{1+e^{3/2}}} > 0$, δηλαδή $g(1+e^{3/2})g(e+1) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(1+e, 1+e^{3/2}\right)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left(f \circ f\right)\left(x_0\right) = f\left(e^{-x_0} + 2\right)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση</u>

i. $A \in C_f$, άρα $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η σχέση (1) για $\lambda = 1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$f(x) = \dfrac{\kappa\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\kappa \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] + \lim_{x\to 0} \frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\left(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)} = \kappa - \frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \kappa - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa = \lambda = 1$ γίνεται: $\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$.

Για $x \neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x) = \dfrac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$1+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\sigma\upsilon\nu x(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x})}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3 \cdot 2^x+3 \cdot 2^x-4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x \neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^3 \cdot 2^x+3 \cdot 2^x-4}{2^x}=x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2 \Rightarrow {x_1}^3<{x_2}^3 \Rightarrow {x_1}^3+3<{x_2}^3+3$

και $x_1<x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$,

αφού η συνάρτηση $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$${x_1}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<{x_2}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=(-\infty)+3-4(+\infty)=-\infty,$$

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

iii. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = (+\infty)+3-4\cdot 0 = +\infty$,

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

iv. Η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Το $\kappa\in\mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/01/2019