ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ …ΠΟΛΛΕΣ ΙΔΕΕΣ

Ημερίδα Μαθηματικών
13 Μαΐου 2019

1ο Γενικό Λύκειο Χανίων

Η ΕΚΦΩΝΗΣΗ

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(κ, λ) και $\vec{\beta}$ =(μ, ν) είναι κάθετα και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα,

να δείξετε ότι $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$.

Βιβλίο Μαθηματικών προσανατολισμού Β΄ Λυκείου

Με άλλα λόγια

Για τους αριθμούς κ, λ, μ ,ν ισχύουν:

- $κ^2+λ^2 =1$
- $μ^2+ν^2 =1$
- $κμ+λν =0$.

Να αποδείξετε ότι $(κν – λμ)^2=1$

$1^{Η}$ ΙΔΕΑ
ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ευχαριστώ τον συνάδελφο Γιώργο Τζιγκουνάκη

Είναι $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2 = \kappa^2\nu^2 - 2\kappa\lambda\mu\nu + \lambda^2\mu^2 =$

$$= \kappa^2(1-\mu^2) - 2\kappa\lambda\mu\nu + \lambda^2(1-\nu^2)$$

$$= \kappa^2 - \kappa^2\mu^2 - 2\kappa\lambda\mu\nu + \lambda^2 - \lambda^2\nu^2$$

$$= \kappa^2 + \lambda^2 - (\kappa\mu + \lambda\nu)^2$$

$$= \kappa^2 + \lambda^2 = 1$$

$2^{Η}$ ΙΔΕΑ
ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Από την σχέση κμ+λν = 0 (I),
διακρίνουμε τις περιπτώσεις

I. Αν κ, λ $\neq$ 0 τότε μ =- $\frac{\lambda\nu}{\kappa}$.

Ετσι κν-λμ = κν+$\frac{\lambda^2\nu}{\kappa}$= $\frac{(\kappa^2+\lambda^2)\nu}{\kappa}$ = $\frac{\nu}{\kappa}$ (αφού $\kappa^2+\lambda^2$ =1)

Επομένως $\boldsymbol{(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \frac{\nu^2}{\kappa^2}}$ και λόγω (I) $\frac{\nu}{\kappa}$ = -$\frac{\mu}{\lambda}$

άρα $\boldsymbol{(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \frac{\nu^2}{\kappa^2}} = \boldsymbol{\frac{\mu^2}{\lambda^2}} = \boldsymbol{\frac{\mu^2+\nu^2}{\kappa^2+\lambda^2}}$ = 1.

II. Αν κ = 0 τότε λ= 1 ή -1 ($\kappa^2+\lambda^2$ =1)
και η (I) είναι ν = 0 οπότε μ = 1ή -1
που σε κάθε περίπτωση είναι **(κν – λμ)^2 = 1.**

$3^{Η}$ ΙΔΕΑ
ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Είναι $(\kappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2) = 1$

Άρα

$\kappa^2\mu^2+\lambda^2\mu^2+\kappa^2\nu^2+\lambda^2\nu^2 =1$

(και από την $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 -2\alpha\beta$)

$(\kappa\mu+\lambda\nu)^2-2\kappa\lambda\mu\nu+\kappa^2\nu^2+\lambda^2\mu^2=1$

(όμως $\kappa\mu+\lambda\nu =0$)

Και τελικά $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2 = 1$

4Η ΙΔΕΑ
ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Άμεσα από την ταυτότητα Lagrange

(άσκηση στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου)

Δηλ. ισχύει

$(\kappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2)= (\kappa\mu+\lambda\nu)^2+(\kappa\nu-\lambda\mu)^2$

και αφού

$\kappa^2+\lambda^2 = 1$, $\mu^2+\nu^2 =1$ και $\kappa\mu+\lambda\nu = 0$

Έχουμε $\boldsymbol{(\kappa\nu-\lambda\mu)^2 = 1}$

5Η ΙΔΕΑ
ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Από την σχέση $\kappa\mu+\lambda\nu = 0$ (I),
διακρίνουμε τις περιπτώσεις

I. Αν $\kappa, \lambda \neq 0$ τότε από (I) $\Rightarrow \frac{\nu}{\kappa} = -\frac{\mu}{\lambda} = \rho \in \mathbb{R}$,

έτσι $\nu = \rho\kappa$ και $\mu = -\rho\lambda$, οπότε $\kappa^2+\lambda^2 = \mu^2+\nu^2 = 1 \Rightarrow$

$\kappa^2+\lambda^2 = \rho^2(\kappa^2+\lambda^2) = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1$.

Ετσι $\kappa\nu-\lambda\mu = \rho\kappa^2 + \rho\lambda^2 = \rho(\kappa^2+\lambda^2) = \rho$

Επομένως $\boldsymbol{(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \rho^2 = 1}$.

II. Αν $\kappa = 0$ τότε $\lambda = 1$ ή -1 $(\kappa^2+\lambda^2 = 1)$
και η (I) είναι $\nu = 0$ οπότε $\mu = 1$ή -1
που σε κάθε περίπτωση είναι $\boldsymbol{(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1}$.

6^{Η} ΙΔΕΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ

Από τις $κ^2+λ^2 = 1$, $μ^2+ν^2 =1$

μπορούμε να έχουμε θέτοντας

κ=ημx, λ=συνx, μ=ημy και ν = συνy.

Οπότε η σχέση κμ+λν =0 γίνεται ημxημy+συνxσυνy = 0

και έτσι

συν(x-y) = 0. Άρα ημ(x-y)=±1 δηλ.

ημxσυνy-ημyσυνx =±1 ή κμ-λν=±1

και τελικά **$(κμ-λν)^2 = 1$**

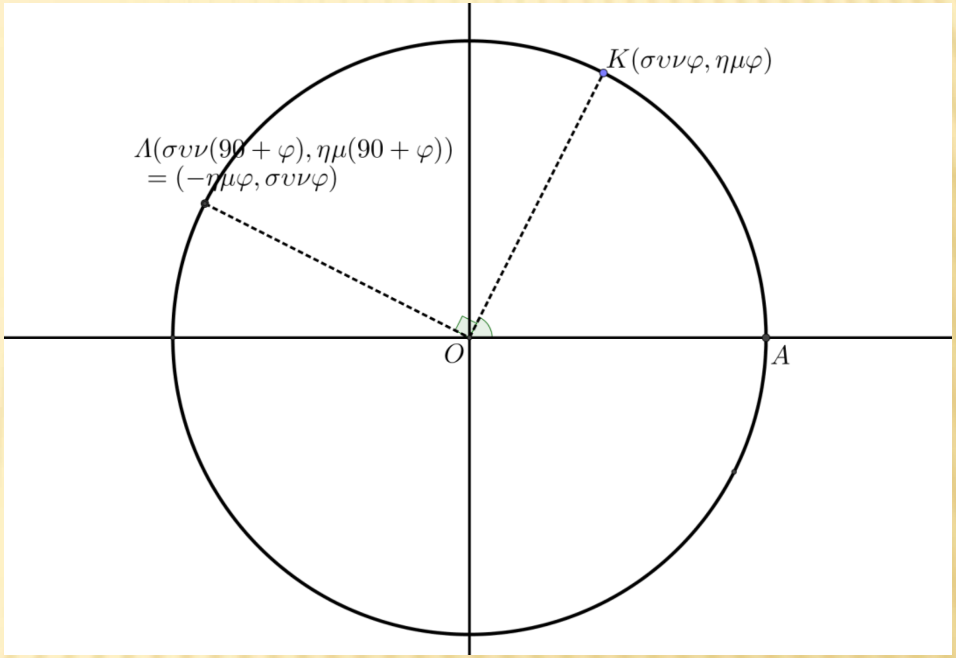
$7^{Η}$ ΙΔΕΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ

Έστω

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} = (\sigma\upsilon\nu\varphi, \eta\mu\varphi)$

και (αφού είναι κάθετα)

$\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}} = (-\eta\mu\varphi, \sigma\upsilon\nu\varphi)$



Τότε κ=συνφ, λ=ημφ, μ=-ημφ και ν=συνφ.

Έτσι είναι κν-λμ = συν^{2}φ-ημφ(-ημφ) = συν^{2}φ+ημ^{2}φ = 1

(Το -1 θα ήταν αν το Λ ήταν στο 4^{ο} τεταρτημόριο του κύκλου)

και τελικά **(κν-λμ)^2 = 1**

Ημερίδα Μαθηματικών
13 Μαΐου 2019

$8^{Η}$ ΙΔΕΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ

Έστω

$\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta}$ =(μ, ν) με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$

Τότε η σχέση κμ+λν = 0 γίνεται $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ -\nu & \mu \end{vmatrix}=0$,

οπότε τα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\overrightarrow{\beta_1}$ =(-ν, μ) είναι συγγραμμικά.

Έτσι από την $|\vec{\alpha}.\overrightarrow{\beta_1}|=|\vec{\alpha}|.|\overrightarrow{\beta_1}|$ (εφαρ. σχολ. βιβλίου)

άρα –κν+λμ = 1.$(\nu^2+\mu^2)=1$

και τελικά **$(\kappa\nu-\lambda\mu)^2 = 1$**

$9^{Η}$ ΙΔΕΑ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Έστω z=κ+λi και w=κ+νi,
μοναδιαίοι μιγαδικοί με κμ+λν=0,

τότε
$$\left|\frac{\kappa+\lambda i}{\mu+\nu i}\right|=\left|\frac{(\kappa+\lambda i)(\mu-\nu i}{\mu^2+\nu^2}\right|=\left|\frac{(\kappa\mu+\lambda\nu)+(\lambda\mu-\kappa\nu)i}{1}\right|=$$
$|(\lambda\mu-\kappa\nu)i|$.

Αρα $\frac{|\kappa+\lambda i|}{|\mu+\nu i|}=|\lambda\mu-\kappa\nu|$ δηλ $|\lambda\mu-\kappa\nu| \overset{\mu o\nu\alpha\delta\iota\alpha\iota o\iota}{\triangleq} =\frac{1}{1}$ =1

και τελικά **(κν-λμ)^2=1.**

$10^{\text{Η}}$ ΙΔΕΑ
ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (ΒΙΒΛΙΟ ΛΥΣΕΩΝ)

Επειδή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ οπότε

$$\kappa\mu + \lambda\nu = 0 \qquad (1)$$

Επειδή τα μέτρα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα με τη μονάδα έχουμε

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 1 \text{ και } \mu^2 + \nu^2 = 1. \qquad (2)$$

Επομένως

$$(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = [(\kappa, \lambda) \cdot (\nu, -\mu)]^2 = \left(\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \cdot \sqrt{\nu^2 + \mu^2} \cdot \text{συν}\omega\right)^2 = 1 \cdot 1 \cdot \text{συν}^2\omega,$$

όπου ω είναι η γωνία των διανυσμάτων (κ, λ) και $(\nu, -\mu)$.

Όμως τα διανύσματα (κ, λ) και $(\nu, -\mu)$ είναι παράλληλα, αφού

$\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \nu & -\mu \end{vmatrix} = -(\kappa\mu + \lambda\nu) = 0$. Επομένως, θα είναι $\text{συν}^2\omega = 1$ και έτσι θα έχουμε

$(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1.$

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας

Ερωτήσεις