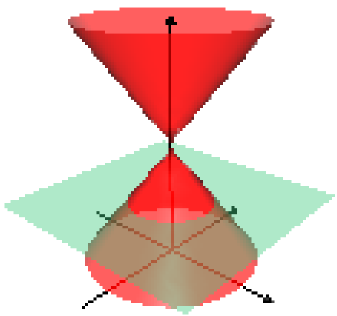
Κεφάλαιο3

Κωνικές Τομές

3.1 Ο Κύκλος



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

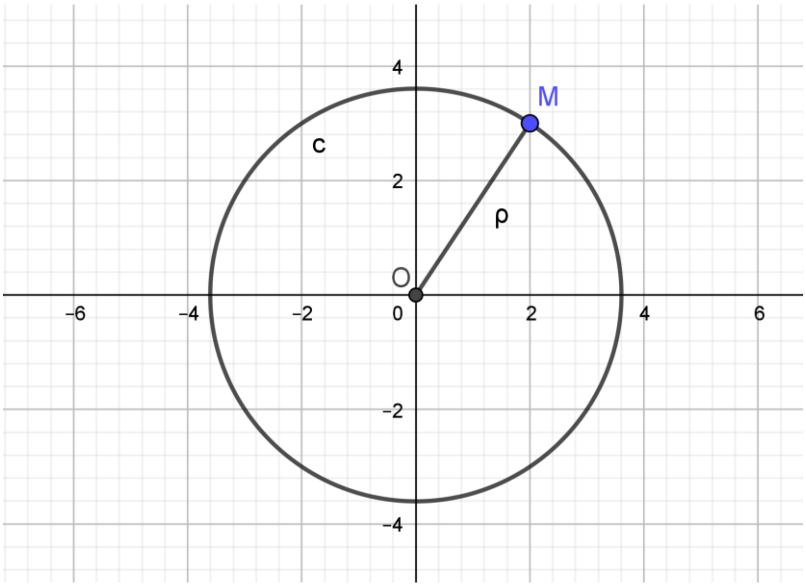
1) Να διατυπωθεί ο ορισμός του κύκλου και να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων (0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση : $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Ορισμός: Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν από ένα σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με ρ. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** και η απόσταση ρ, λέγεται **ακτίνα** του κύκλου.

Απόδειξη: Ένα σημείο Μ(x , y) ανήκει σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ, αν και μόνο αν (ΟΜ) = ρ

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$.(1)

Άρα οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (1) . Συνεπώς **ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ έχει εξίσωση : $x^2 + y^2 = \rho^2$**

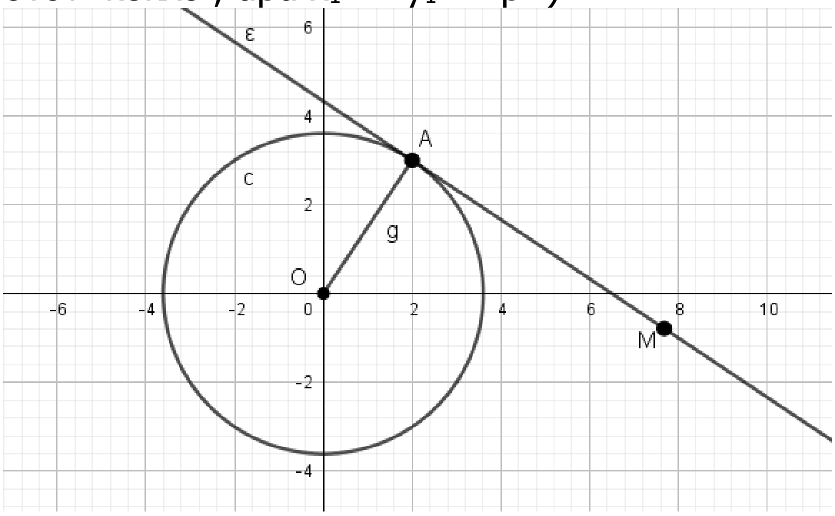


Ορισμός

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1 έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = 1$ και λέγεται ***μοναδιαίος κύκλος*** .

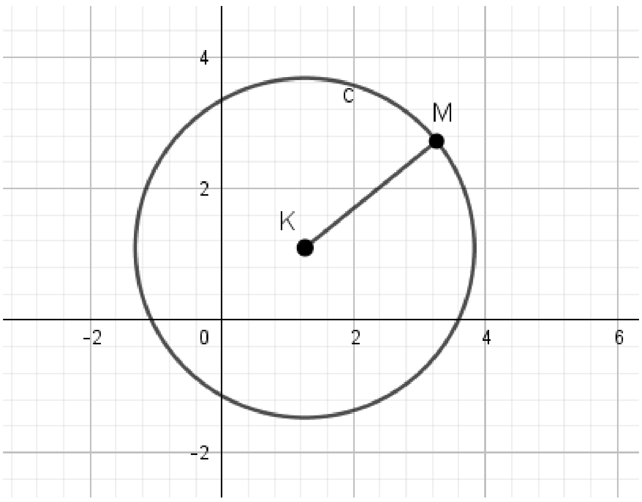
3) Να αποδείξετε ότι η *εφαπτομένη* του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του, $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$.
Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε , αν και μόνο αν
$OA \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. (1)
Όμως $\overrightarrow{OA} = (x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$. Άρα η (1) γίνεται :
$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow xx_1 - x_1^2 + yy_1 - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow$
$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$ (διότι το $A(x_1,y_1)$ ανήκει στον κύκλο , άρα $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$)



4) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ είναι : $C : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$

Ένα σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο του κύκλου αν και μόνο αν
$(KM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$



5) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ **παριστάνει κύκλο , αν και μόνο αν** $\mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}$ **.**

Από την εξίσωση του κύκλου με κέντρο Κ(x_0,y_0) και ακτίνα ρ παίρνουμε : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0$. Θέτουμε $\mathrm{A}=-2x_0$, $\mathrm{B}=-2y_0$, $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$ οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή : $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$, και

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(-2x_0)^2+(-2y_0)^2-4(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=4\rho^2>0$

Αντίστροφα : Η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ γράφεται διαδοχικά : $(x^2+\mathrm{A}x)+(y^2+\mathrm{B}y)+\Gamma=0$

$$(x^2+2\frac{\mathrm{A}}{2}x+\frac{\mathrm{A}^2}{4})+(y^2+2\frac{\mathrm{B}}{2}y+\frac{\mathrm{B}^2}{4})-\frac{\mathrm{A}^2}{4}-\frac{\mathrm{B}^2}{4}+\Gamma=0$$

$$\left(x+\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}{4}\quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\frac{\mathrm{A}}{2}=-x_0$, $\frac{\mathrm{B}}{2}=-y_0$, οπότε έχουμε

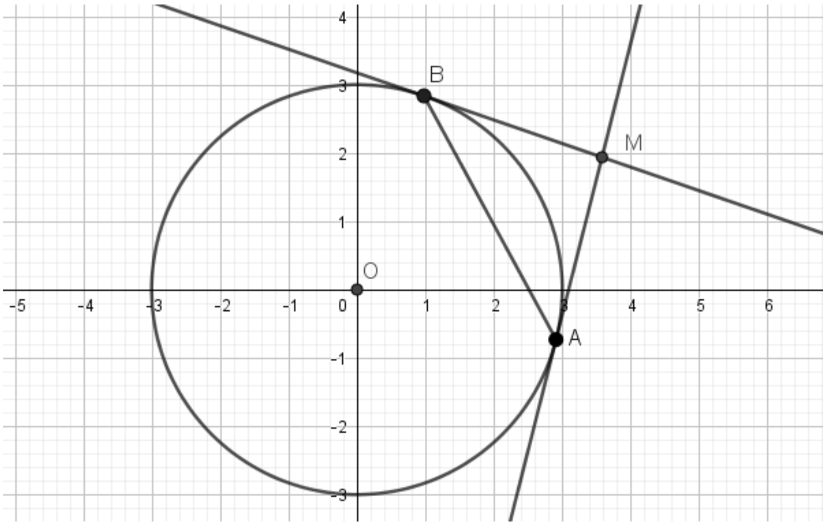
$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}{4}$$

- **αν $\mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}$,** θέτουμε $\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}{4}=\rho^2$ οπότε η (1) γίνεται $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και παριστάνει κύκλο κέντρου $\mathrm{K}(x_0,y_0)=\boxed{\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)}$ με ακτίνα $\boxed{\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}}$.
- αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=0$, η (1) γίνεται $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=0$ οπότε $x=x_0$ και $y=y_0$ και παριστάνει ένα σημείο, το $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$.
- αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma<0$, η (1) γίνεται $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2<0$ η οποία είναι αδύνατη, δηλαδή δεν παριστάνει κανένα σημείο του επιπέδου.

Πολική χορδή σημείου

Αν από σημείο $M(x_0,y_0)$ φέρουμε τις δύο εφαπτομένες στα σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$, η χορδή ΑΒ λέγεται πολική χορδή του Μ. Το κέντρο του κύκλου είναι το Ο(0,0) και το Μ βρίσκεται εκτός του κύκλου, οπότε $x_0 \neq 0$ και $y_0 \neq 0$.

Η εφαπτομένη ΜΑ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ και διέρχεται από το Μ, οπότε $x_0x_1 + y_0y_1 = \rho^2$ (1). Η εφαπτομένη ΜΒ έχει εξίσωση $xx_2 + yy_2 = \rho^2$ και διέρχεται από το Μ, οπότε $x_0x_2 + y_0y_2 = \rho^2$ (2). Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $x_0x + y_0y = \rho^2$ παριστάνει ευθεία (αφού $x_0 \neq 0$ και $y_0 \neq 0$) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β (λόγω των (1) και (2)). Οπότε η $x_0x + y_0y = \rho^2$ είναι η εξίσωση της πολικής χορδής ΑΒ.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ **(Οι ερωτήσεις με κόκκινα γράμματα είναι εκτός ύλης)**

1) Κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος.

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(-2,1) και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$.

β) Η ευθεία $y = x + \alpha$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ όταν $\alpha = 2$ ή $\alpha = -2$.

γ) Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ όταν $A=0$ βρίσκεται στον άξονα y΄y.

δ) Η εξίσωση $\lambda x^2 + \lambda y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $\lambda<0$ και A , B , $\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο σημείο του 1ου τεταρτημορίου.

ε) Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 3x - 4y + 5 = 0$ και $2x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 8 = 0$ είναι ομόκεντροι.

στ) Όταν $A + B = 0$, το κέντρο του κύκλου

$x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$ βρίσκεται στην ευθεία $y = -x$.
ζ) Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$ εφάπτεται της ευθείας $y = 3$.
η) Το σημείο Λ(3,2) είναι εσωτερικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 12$.
θ) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 2ay + a^2 + 5 = 0$ παριστάνει κύκλο.

2) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :
α) Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Κ(0,-1) και ακτίνα ρ=2 είναι ....
β) Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $x^2 + y^2 = ρ^2$ είναι ....
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = ρ^2$ στο σημείο του Μ(ρσυνθ , ρημθ) είναι :..............................
δ) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$ παριστάνει κύκλο όταν .... Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το σημείο Κ(...... , ...) και ακτίνα ρ = ...
ε) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 3$ που διέρχονται από το σημείο Α(3,2) είναι : ....
στ) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ στο σημείο του Α(4,3) είναι : ....
ζ) Ο κύκλος $x^2 + (y-3)^2 = 9$ εφάπτεται στον άξονα ....

3) Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση :
α) Η ευθεία ε: $y = x + 3$ και ο κύκλος C : $x^2 + y^2 = 2$:
Α. τέμνονται **Β.** εφάπτονται **Γ.** δεν έχουν κοινά σημεία

β) Έστω ο κύκλος με παραμετρικές εξισώσεις: $x = 3συνφ$, $y = 3ημφ$, όπου $φ \in [0,2π)$. Το σημείο $Α(2,\sqrt{6})$ είναι :
Α. εσωτερικό του κύκλου **Β.** εξωτερικό του κύκλου
Γ. σημείο του κύκλου
γ) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(1+3συνφ , -2+3ημφ) με $φ \in [0,2π)$ είναι ο κύκλος με εξίσωση :
Α. $x^2+y^2=9$ **Β.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ **Γ.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$
Δ. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
δ) Αν το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 + Ax + By + 3 = 0$ είναι το σημείο Κ(6,-4) , τότε το Α + Β είναι :
Α. 2 **Β.** -2 **Γ.** 4 **Δ.** -4 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα
ε) Αν η ευθεία $y = 3x + β$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ τότε το β είναι :
Α. $\sqrt{10}$ **Β.** $-\sqrt{10}$ **Γ.** $\pm\sqrt{10}$ **Δ.** $2\sqrt{10}$ **Ε.** $\pm 2\sqrt{10}$
στ) Αν ο κύκλος $(x-2)^2 + (y-3)^2 = ρ^2$ εφάπτεται στην ευθεία $3x-4y-19=0$, τότε το ρ είναι :
Α. 25 **Β.** 4 **Γ.** 16 **Δ.** 5 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα