ΜΟΡΦΕΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα:

$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0}$

Τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο λύσεις, έστω ρ_1, ρ_2 .

Λέμε επίσης ότι ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Γνωρίζουμε ακόμα ότι : $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και

$S = \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, $P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Αφού $\alpha \neq 0$ μπορούμε να το θεωρήσουμε «κοινό παράγοντα» οπότε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha(x^2 - Sx + P) =$$

$$\alpha[x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2] = \alpha(x^2 - \rho_1 x - \rho_2 x + \rho_1 \cdot \rho_2) =$$

$$\alpha[x(x - \rho_1) - \rho_2(x - \rho_1)] = \alpha(x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$

Άρα αν $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0}$ το τριώνυμο πάντοτε μετατρέπεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων και ισχύει :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)}}$$

………

Έστω τώρα το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα:

$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0}$

Τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μία λύση, έστω, ρ.

Λέμε επίσης ότι ρ είναι η (μοναδική) ρίζα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Γνωρίζουμε ακόμα ότι : $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και η ρ λέγεται διπλή ρίζα. Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει $\boldsymbol{\rho_1 = \rho_2 = \rho}$ οπότε έχουμε:

$S = \rho + \rho = 2\rho = -\frac{\beta}{\alpha}$, $P = \rho + \rho = \rho^2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Αφού $\alpha \neq 0$ μπορούμε να το θεωρήσουμε «κοινό παράγοντα» οπότε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha(x^2 - Sx + P) =$$

$$a[x^2 - 2\rho x + \rho^2] = \alpha(x - \rho)^2$$

Άρα αν $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0}$ το τριώνυμο πάντοτε μετατρέπεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων και ισχύει :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)(x - \rho) = \alpha(x - \rho)^2}}$$

2ος τρόπος

Μπορούμε και να θεωρήσουμε ότι, αφού **Δ=0**, ισχύει $\boldsymbol{\rho_1 = \rho_2 = \rho}$.

Οπότε από τη μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2) = \alpha(x - \rho) \cdot (x - \rho) = a(x - \rho)^2}$$

Είναι λόγω της παραπάνω μορφής που η μοναδική ρίζα λέγεται **διπλή**

……

Έστω τώρα το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα:

$$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0}$$

Τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι αδύνατη.

Λέμε επίσης ότι το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Το τριώνυμο σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παραδείγματα

1) Το τριώνυμο $\boldsymbol{2x^2 - 3x - 2}$ με $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$ $\kappa\alpha\iota$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25$ οπότε

$\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 2$ $\kappa\alpha\iota$ $\rho_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{1}{2}$.

Άρα $\boldsymbol{2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2) \cdot (2x + 1)}$

2) Το τριώνυμο $\mathbf{3x^2-12x+12}$ με

$\alpha=3\ ,\ \beta=-12\ ,\ \gamma=12\ \kappa\alpha\iota\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$ οπότε $\rho=\frac{-\beta}{2\alpha}\ =\ 2$.
Άρα $\mathbf{3x^2-12x+12=3(\chi-2)^2}$

Αλλιώς $\mathbf{3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(\chi-2)^2}$ (Με χρήση της γνωστής ταυτότητας)

3) Το τριώνυμο $\mathbf{2x^2-3x+6}$ με

$\alpha=2\ ,\ \beta=-3\ ,\ \gamma=6\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\mathbf{-39}<0$ οπότε

$\mathbf{2x^2-3x+6\neq 0}$ και δεν μετατρέπεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Η μόνη μετατροπή που μπορούμε να κάνουμε είναι :

$$\mathbf{2x^2-3x+6=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+3\right)=2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+3\right)=}$$

$$\mathbf{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{48}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right]>0}$$

4) Να απλοποιηθεί το κλάσμα : $\mathbf{\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-12x+12}}$

$$\frac{\mathbf{2x^2-3x-2}}{\mathbf{3x^2-12x+12}}=\frac{\mathbf{2(x-2)\cdot(x+\frac{1}{2})}}{\mathbf{3(x-2)^2}}=\frac{2(x+\frac{1}{2})}{3(x-2)}=\frac{2x+1}{3x-6}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) x^2-3x+2 **ii)** $2x^2-3x-2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}$ **ii)** $\frac{2x^2+8x-42}{x^2-49}$ **iii)** $\frac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3}$.

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Έστω το τριώνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα: $\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0}$

Τότε όπως ξέρουμε: $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)}$ **,** όπου ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου. Έστω $\rho_1<\ \rho_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- α>0
  - Αν $x<\rho_1<\ \rho_2$ τότε $(x-\rho_1)<0$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-\ \rho_2)<0$ οπότε
    $$\boldsymbol{a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)>0}$$
  - Αν $\rho_1<x<\ \rho_2$ τότε $(x-\rho_1)>0$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-\ \rho_2)<0$ οπότε
    $$\boldsymbol{a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)<0}$$
  - Αν $\rho_1<\rho_2<x$ τότε $(x-\rho_1)>0$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-\ \rho_2)>0$ οπότε
    $$\boldsymbol{a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)>0}$$

$\boldsymbol{x}$	-∞ $\quad\quad$ $\boldsymbol{\rho_1}$	$\boldsymbol{\rho_2}$	+∞
$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma}$	$+$	$-$	$+$

- α<0
  - Αν $x<\rho_1<\ \rho_2$ τότε $(x-\rho_1)<0$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-\ \rho_2)<0$ οπότε
    $$\boldsymbol{a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)<0}$$
  - Αν $\rho_1<x<\ \rho_2$ τότε $(x-\rho_1)>0$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-\ \rho_2)<0$ οπότε
    $$\boldsymbol{a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)>0}$$
  - Αν $\rho_1<\rho_2<x$ τότε $(x-\rho_1)>0$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-\ \rho_2)>0$ οπότε
    $$\boldsymbol{a(x-\rho_1)\cdot(x-\ \rho_2)<0}$$

$\boldsymbol{x}$	-∞ $\quad\quad$ $\boldsymbol{\rho_1}$	$\boldsymbol{\rho_2}$	+∞
$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma}$	$-$	$+$	$-$

....

Έστω τώρα το τριώνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα:

$\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0}$

Τότε όπως ξέρουμε: $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2}$ **,** όπου ρ η μοναδική ρίζα του τριωνύμου. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **α>0**
  - Επειδή είτε $x>\rho$ είτε $x<\rho$ ισχύει $\boldsymbol{(x-\rho)^2>0}$ οπότε $\boldsymbol{a(x-\rho)^2>0}$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma}$	$+$		$+$

- **α<0**
  - Επειδή είτε $x>\rho$ είτε $x<\rho$ ισχύει $\boldsymbol{(x-\rho)^2>0}$ οπότε $\boldsymbol{a(x-\rho)^2<0}$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma}$	$-$		$-$

....

Τέλος το τριώνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα:

$\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0}$ είδαμε πως δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. (Η απόδειξη στην τάξη). Θυμόμαστε όμως για το παράδειγμα το τριώνυμο $\boldsymbol{2x^2-3x+6}$ με

$\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=6$ $\kappa\alpha\iota$ $\quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\mathbf{-39}<0$

$$\boldsymbol{2x^2-3x+6=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+3\right)=2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+3\right)=}$$

$$\boldsymbol{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{48}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right]>0\,.}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται ως εξής:

$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha}\right]}$ **(Η απόδειξη στην τάξη)**

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Επειδή $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha}>\mathbf{0}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

- **α>0** $\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha}\right]>0}$

$\boldsymbol{x}$	**-∞**	**+∞**
$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma}$	$+$	

- **α<0** $\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha}\right]<0}$

$\boldsymbol{x}$	**-∞**	**+∞**
$\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma}$	$-$	

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο** του α , μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν,** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο** του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Παραδείγματα

1) Το τριώνυμο $\boldsymbol{2x^2-3x-2}$ με $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$ $\kappa\alpha\iota$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25$ οπότε

$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=2$ $\kappa\alpha\iota$ $\rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\frac{1}{2}$.

$\boldsymbol{x}$	**-∞**	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$	**2**	**+∞**
$\boldsymbol{2x^2-3x-2}$	$+$	$-$	$+$	

2) Το τριώνυμο $\boldsymbol{3x^2 - 12x + 12}$ με

$\alpha = 3\ ,\ \beta = -12\ ,\ \gamma = 12\ \kappa\alpha\iota\ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ οπότε $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}\ =\ 2\ .$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	2	$+\infty$
$\boldsymbol{3x^2 - 12x + 12}$	$+$		$+$

3) Το τριώνυμο $\boldsymbol{2x^2 - 3x + 6}$ με

$\alpha = 2\ ,\ \beta = -3\ ,\ \gamma = 6\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \boldsymbol{-39} < 0$ οπότε

$\boldsymbol{x}$	**-∞**	**+∞**
$\boldsymbol{2x^2 - 3x + 6}$	$+$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 2x - 15$ **ii)** $4x^2 - 4x + 1$ **iii)** $x^2 - 4x + 13$.

4. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 4x - 3$ **ii)** $-9x^2 + 6x - 1$ **iii)** $-x^2 + 2x - 2$.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ΟΥ}$ ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, δηλαδή ανισώσεις της μορφής
$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma>0}$ ή $\boldsymbol{\alpha\, x^2+\beta x+\gamma<0}$ λύνονται με την βοήθεια της θεωρίας του προσήμου τριωνύμου που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ανίσωση: $\boldsymbol{2x^2-3x-2>0}$

$\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$ $\quad και\ \ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25$ οπότε

$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=2 \quad και \quad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\frac{1}{2}$.

$\boldsymbol{x}$	**-∞**	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$	**2**	**+∞**
$\boldsymbol{2x^2-3x-2}$	$+$		$-$	$+$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $x<-\frac{1}{2}$ ή $x>2$

Αλλιώς γράφουμε $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

2) Να λυθεί η ανίσωση $\boldsymbol{3x^2-12x+12>0}$

$\alpha=3$, $\beta=-12$, $\gamma=12\ και\ \ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$ οπότε $\rho=\frac{-\beta}{2\alpha} = 2$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	2	$+\infty$
$\boldsymbol{3x^2-12x+12}$	$+$		$+$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $x<2$ ή $x>2$

Αλλιώς γράφουμε $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ή απλώς $x\neq 2$

3) Να λυθεί η ανίσωση $\boldsymbol{2x^2-3x+6>0}$

$\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=6\ \ και\ \ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\boldsymbol{-39}<0$ οπότε

$\boldsymbol{x}$	**-∞**	**+∞**
$\boldsymbol{2x^2-3x+6}$	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $x\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

Αλλιώς γράφουμε ότι αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

4) Να λυθεί η ανίσωση $\boldsymbol{-2x^2+3x+2\geq 0}$

$\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=2$ $\quad και\ \ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25$ οπότε

$\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \rho_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{1}{2}$.

x	-∞ $\qquad -\frac{1}{2}$	$\qquad 2$	+∞
$-2x^2+3x+2$	$-$	$+$	$-$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

Αλλιώς γράφουμε $x \in [-\frac{1}{2}, 2]$

5) Να λυθεί η ανίσωση $\boldsymbol{-3x^2+12x-12 \geq 0}$

$\alpha = -3$, $\beta = 12$, $\gamma = -12$ $\kappa\alpha\iota$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ οπότε $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha} = 2$.

x	$-\infty$ $\qquad 2$	$+\infty$
$-3x^2+12x-12$	$-$	$-$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $x = 2$.

6) Να λυθεί η ανίσωση $\boldsymbol{-2x^2+3x-6 > 0}$

$\alpha = -2$, $\beta = +3$, $\gamma = -6$ $\kappa\alpha\iota$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \boldsymbol{-39} < 0$ οπότε

x	-∞ $\qquad\qquad$ +∞
$-2x^2+3x-6$	$-$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι δεν αληθεύει για κανένα πραγματικό αριθμό x , δηλαδή η ανίσωση είναι αδύνατη.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5x^2 \leq 20x$ **ii)** $x^2 + 3x \leq 4$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - x - 2 > 0$ **ii)** $2x^2 - 3x - 5 < 0$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 4 > 4x$ **ii)** $x^2 + 9 \leq 6x$.