ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1

1) Δίνονται οι συναρτήσεις : $g(x) = lnx$ και $f(x) = e^x$

I. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και η g κοίλη.
II. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο Α(0,1) και της C_g στο Β(1,0)
III. Να αποδείξετε ότι $lnx \leq \chi - 1$, $x \in (0, +\infty)$ $\quad$ $και \quad e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

2) Έστω η συνάρτηση $f(x) = |lnx - ax + a|$

I. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$
II. Να υπολογίσετε τον αριθμό α
III. Αν α=1 να δείξετε ότι $f(x) = x - lnx - 1$
IV. Να αποδείξετε ότι : $ex - e^x \leq x - lnx - 1$ για κάθε x>0
V. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(f(x))}{x}$ (υπόδειξη : $\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{f(f(x))}{x}$)

3) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = xlnx$ και $g(x) = lnx + x - 1$

I. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και η g κοίλη.
II. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (1, e)$: $f'(x_0) = g'(x_0)$
III. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.
IV. Να αποδείξετε ότι $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in (1, e)$
V. Να αποδείξετε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (e, +\infty)$

4) Να αποδείξετε ότι : $x + ημx \leq \pi$, για κάθε $x \in [0 , \pi]$

5) Να αποδείξετε ότι : $-x + συνx \leq \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2} , 0]$

6) Έστω η συνάρτηση: $f(x) = lnx^2$

I. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = lnx^2$
II. Αν $x > 0$ να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.
III. Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) - f(x)$ έχει ελάχιστη τιμή , έστω $g(x_0)$, όπου $x_0 \in (1 , 2)$.