ΘΕΜΑ 4 _ *1890*

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ **(1)** με παράμετρο $\lambda \neq -2$

Α) Νδο η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι (Μ.6)

$$\Delta = 12\lambda+25$$

Β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες (Μ.7)

Γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$ (Μ.4)

Δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$ (Μ.8)

ΛΥΣΗ 4 _ *1890*

Α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι

$$\Delta = (2\lambda+3)^2-4(\lambda+2)(\lambda-2) = (2\lambda+3)^2-4(\lambda^2-4) = 4\lambda^2+9+12\lambda-4\lambda^2+16 = 12\lambda+25$$

Β) Η εξίσωση (1) με $\lambda \neq -2$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, οπότε

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12\lambda+25>0 \Leftrightarrow 12\lambda > -25 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{25}{12}$$

Δηλαδή η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για $\lambda > -\frac{25}{12}$ με $\lambda \neq -2$

Γ) Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1) είναι αντίστοιχα

$$S = x_1+x_2 = -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} \quad \text{και} \quad P = x_1\cdot x_2 = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}$$

Δ) Είναι

$$\left(x_1+x_2-1\right)^2+\left(x_1\cdot x_2+3\right)^2=0$$

η οποία λόγω ερ.Γ δίνει

$$\left(S-1\right)^2+\left(P+3\right)^2=0$$

συνεπώς

$$S-1=0 \quad \text{και} \quad P+3=0$$

$$S=1 \quad \text{και} \quad P=-3$$

$$-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}=1 \quad \text{και} \quad \frac{\lambda-2}{\lambda+2}=-3$$

$$-(2\lambda+3)=\lambda+2 \quad \text{και} \quad \lambda-2=-3(\lambda+2)$$

$$-2\lambda-3=\lambda+2 \quad \text{και} \quad \lambda-2=-3\lambda-6$$

$$-3\lambda=5 \quad \text{και} \quad 4\lambda=-4$$

$$\lambda=-\frac{5}{3} \quad \text{και} \quad \lambda=-1$$

άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda\in R$, $\lambda\neq-2$ ώστε να ισχύει η δοθείσα σχέση