Παρατηρήσεις στο Θεώρημα Bolzano και στην ύπαρξη ρίζας

1. Για να αποδείξουμε (με το θεώρημα Bolzano) ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα (α, β) ακολουθούμε τα εξής βήματα
    a. Φέρνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θεωρούμε το πρώτο μέλος ως συνάρτηση f
    b. Αποδεικνύουμε ότι ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θ. Β. στο [α, β]
    c. Αν $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ τότε η εξίσωση έχει ρίζα χ_0 στο [α, β] με $\chi_0 = \alpha$ ή $\chi_0 = \beta$ αν $f(\alpha)f(\beta) = 0$ και $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ αν $f(\alpha)f(\beta)<0$

2. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη **μιας τουλάχιστον** ρίζας μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα (α, β), αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση μπορεί να έχει και παραπάνω από μια ρίζες στο ίδιο διάστημα.

3. Η ύπαρξη ρίζας μπορεί να επιτευχθεί και με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών που είναι γενίκευση του Θ. Β.

4. Η ύπαρξη ρίζας αποδεικνύεται και από το σύνολο τιμών f(Δ). Αν το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο Δ, χωρίς να είναι απαραίτητο η f να είναι συνεχής στο Δ.

5. Η ύπαρξη **μοναδική**ς ρίζας σε ένα διάστημα επιτυγχάνεται σε συνδυασμό με το Θ. Β και μονοτονίας ή αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση είναι 1- 1 στο διάστημα, ή με άτοπο.

6. Όταν η συνάρτηση f που θεωρήσαμε δεν ορίζεται σε κλειστό διάστημα [α, β] ή δεν μας δίνεται το διάστημα, τότε το εντοπίζουμε με κατάλληλες δοκιμές. Αν αυτό δεν είναι εφικτό χρησιμοποιούμε όρια ως εξής: αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε η f είναι αρνητική κοντά στο χ_0 άρα υπάρχει αριθμός α κοντά στο χ_0 ώστε $f(\alpha) <0$, ανάλογα βρίσκουμε ότι $f(\beta) > 0$ αν κάποιο όριο της f είναι θετικό και εργαζόμαστε στο διάστημα [α, β] ή [β, α].

7. Πολλές φορές πριν ορίσουμε την f χρειάζεται να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών στην εξίσωση, για να μπορέσουμε να την ορίσουμε στο επιθυμητό διάστημα.

8. Το αντίστροφο του Θ.Β. δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί να υπάρχει $\rho \in (\alpha, \beta)$ με $f(\rho) = 0$ χωρίς κατ' ανάγκη η f να είναι συνεχής στο [α, β] ή χωρίς να ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

9. Αν το άθροισμα κάποιων τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ίσο με το μηδέν τότε ή θα είναι όλες ίσες με το μηδέν (οπότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη ρίζας) η κάποιες από αυτές θα είναι ετερόσημες όποτε εφαρμόζουμε Θ.Β.

10. Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση διατηρεί **σταθερό πρόσημο** σε **ένα διάστημα** (α, β) αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε αυτό και δεν μηδενίζεται σε αυτό.
<u>Προσοχή το πόρισμα για το σταθερό πρόσημο εφαρμόζεται μόνο σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.</u>

11. Όταν στην άσκηση υπάρχει η έκφραση ''διαδοχικές ρίζες'' μιας συνάρτησης και η συνάρτηση **είναι συνεχής** στο διάστημα που βρίσκονται οι ρίζες, τότε γνωρίζουμε ότι **διατηρεί πρόσημο μεταξύ των ριζών.**

12. Μια συνάρτηση που ειναι συνεχής σε ενα κλειστο διαστημα [α, β] δεν ειναι κατ΄αναγκη συνεχής στα α και β, εκτός αν το πεδίο ορισμου της ειναι το [α, β].

13. Μια σημαντική πρόταση είναι η παρακάτω:
Αν f είναι 1- 1 και συνεχής στο <u>διάστημα</u> Δ τότε θα είναι και γνησίως μονότονη.
Απόδειξη
Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε a, b, c $\in \Delta$ με a < b < c ισχύει

f(a)<f(b<)<f(c) ή f(a)>f(b)>f(c).

Έστω ότι f(b) < min{f(a), f(c)} δηλαδή f(b)< f(a) και f(b) < f(c).

Τότε θα υπάρχει αριθμός k έτσι ώστε f(b) < k < f(a) και f(b) < k < f(c).

Όμώς η f είναι συνεχής στα διαστήματα [a, b]$\subseteq \Delta$ και [b, c]$\subseteq \Delta$

αφού είναι συνεχής στο Δ, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του

θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών δηλαδή υπάρχουν $x_1 \in (a,b)$ και

$x_2 \in (b,c)$ ώστε $f(x_1) = k = f(x_2)$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η f είναι

1-1 στο Δ.

Άρα δεν θα ισχύει f(b) < min{f(a), f(c)}

Παρομοίως αποδεικνύεται ότι δεν θα ισχύει f(b) > max{f(a), f(c)}

Άρα το f(b) θα είναι ανάμεσα των f(a) και f(c)δηλαδή η συνάρτηση

θα είναι γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα.