Παρατηρήσεις στις ιδιότητες των ορίων

1. **Αν ζητείται να δείξουμε ότι** $\lim_{x\to x_0} f(x)=k$ **μπορούμε ισοδύναμα να δείξουμε ότι** $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=k$ **ή ότι** $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-k\right)=0$ **και αντιστρόφως**
2. **Αν** $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ **, τότε f(x) > 0 κοντά στο** $\mathbf{x_0}$ **και**
   αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$ **τότε f(x) < 0 κοντά στο** $\mathbf{x_0}$**.**
   a. Το <u>αντίστροφο των παραπάνω δεν ισχύει</u> δηλαδή αν f(x) > 0 δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ γιατί δεν ξέρουμε, πρώτον αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και ακόμη, αν υπάρχει, τότε θα ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge 0$ δηλαδή <u>με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το όριο:</u>
      αν ισχύει f(x) > 0 κοντά στο $\mathbf{x_0}$ **τότε** $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge 0$
      Παράδειγμα η f(x) = $(x – 1)^2$ > 0 για κάθε $x\neq 1$, όμως $\lim_{x\to 1} f(x)=0$
      Παρόμοια:
      αν f(x) < 0 κοντά στο $\mathbf{x_0}$ **και υπάρχει το** $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **, τότε** $\lim_{x\to x_0} f(x)\le 0$
   b. Όταν γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ **(** $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$ **)** τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει αριθμός κ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης κοντά στο x_0, έτσι ώστε f(κ) >0 (f(κ) < 0) και γενικά f(x) >0 (f(x) <0) κοντά στο x_0 ή καλύτερα, υπάρχει περιοχή Δ = $\left(x_0-\delta, x_0\right)\cup\left(x_0, x_0+\delta\right)$ ώστε $f(x)>0, \forall x\in\Delta$ (ή $f(x)<0, \forall x\in\Delta$)
   c. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και όταν $\lim_{x\to +\infty} f(x)>0$ ή <0 και $\lim_{x\to -\infty} f(x)>0$ ή <0

3. Αν οι συναρτήσεις **f, g έχουν όριο στο** $\mathbf{x_0}$ **(το** $\mathbf{x_0}$ **μπορεί να είναι και** $\pm\infty$**) και ισχύει** $f(x)\le g(x)$ **κοντά στο** $\mathbf{x_0}$**, τότε** $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$
   Προσοχή αν η πρώτη συνθήκη δεν έχει ίσον δηλαδή αν f(x) < g(x) τότε πάλι θα ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$**,** αν **φυσικά υπάρχουν** τα αντίστοιχα όρια.
   <u>Παράδειγμα</u> για τις συναρτήσεις f(x) = x^2 και g(x) = $2x^2$ ισχύει f(x) < g(x) κοντά στο x = 0 όμως $\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$ **.**
4. **Ισχύει** ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)<\lim_{x\to x_0} g(x)\Rightarrow f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0 (απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο), προσοχή δεν ισχύει το αντίστροφο, παρά μόνο αν υπάρχουν τα όρια των f και g.

5. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, $\lim_{x\to x_0}(f(x).g(x))$, $\lim_{x\to x_0}(kf(x))$, $\lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)})$ και $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|$ **δεν σημαίνει** ότι θα υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x),\ \lim_{x\to x_0} g(x)$. Αν όμως υπάρχουν τα όρια της f + g και της g στο x_0, τότε θα υπάρχει και το όριο της f στο x_0.

6. **Κριτήριο σύγκλισης στο μηδέν**: Αν $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$
   Απόδειξη: Ισχύει $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ για κάθε $x\in D_f$

και αφού $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right) = 0$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

Επίσης αν $\lim_{x\to x_0} f^2(x) = 0$ τότε και $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ γιατί:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f^2(x)} = 0$$

7. **Μηδενική επί φραγμένη** $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right) = 0$ όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $|g(x)| \le \theta$
   όπου θ > 0 για κάθε x κοντά στο x_0.
   Η απόδειξη του παραπάνω προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής γιατί:
   $|f(x)g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| \le |f(x)|\cdot\theta$ άρα $-\theta|f(x)| \le f(x)g(x) \le \theta f(x)$ κ.λ.π.

8. **Αν** $x \to a$ **τότε θέτοντας** $x-a=h \Leftrightarrow x=a+h$ **έχουμε όριο για** $h\to 0$
   Είναι χρήσιμη αντικατάσταση όταν έχουμε συναρτησιακή σχέση με
   $f(x+y)$ και γνωστό ή ζητούμενο το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

9. **Αν** $x\to a\neq 0$ **τότε θέτοντας** $\frac{x}{a}=h \Leftrightarrow x=ah$ **έχουμε όριο για** $h\to 1$
   Είναι χρήσιμη αντικατάσταση όταν έχουμε συναρτησιακή σχέση με
   $f(xy)$ και γνωστό ή ζητούμενο το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$