Ερωτήσεις θεωρίας

Κεφ1. Όριο – συνέχεια συνάρτησης

1. Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;
   Απ:

   Έστω A ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

2. Ποια είναι η ανεξάρτητη τιμή και ποια η εξαρτημένη τιμή στη συνάρτηση f(x); Σελ.15
3. Τι λέμε σύνολο τιμών μια συνάρτησης $f: A \to R$
   Απ: **Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:** $f(A) = \{y \mid y = f(x)$ **για κάθε** $x \in A\}$

4. Τι λέγεται γραφική παράσταση μια συνάρτησης f με πεδίο ορισμού Α;
   Απ: **Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.**

5. Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
   Απ:

   Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:
   - **έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και**
   - **για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.**

6. Πως ορίζονται οι πράξεις άθροισμα διαφορά γινόμενο και πηλίκο μεταξύ δυο συναρτήσεων f, g με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα;
   Απ:

   Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο

ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο:

$$\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}.$$

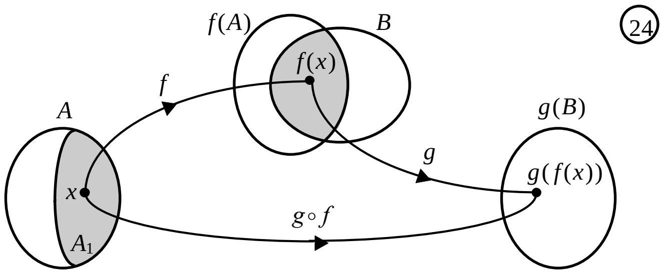
7. Τι δηλώνει γραφικά η διαφορά |f(x) – g(x)|;
   Απ: **Την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων A(x, f(x)) και B(x, g(x)) δηλαδή (AB) = |f(x) – g(x)|**

8. Αν f, g δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με τη g; Ποια η απαραίτητη προϋπόθεση για να ορίζεται η $(g \circ f)(x)$;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *A, B* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της *f* με την *g*, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x)).$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

9. Ποια από τις ιδιότητες αντιμεταθετική και προσεταιριστική ισχύει στη σύνθεση συναρτήσεων;
   Απ:

Αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof) = (hog)of.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των *f, g* και *h* και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Ορισμός μονοτονίας

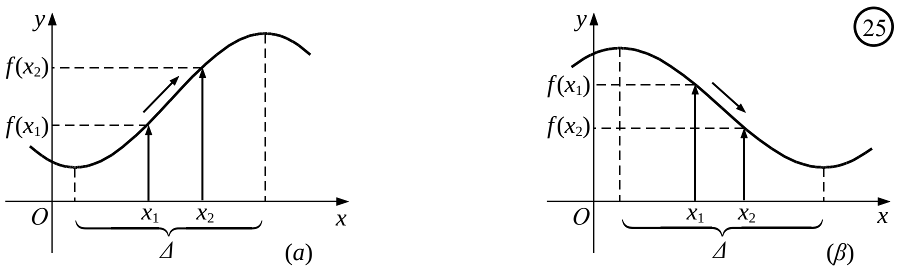
10. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
    Απ:

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)**

- **γνησίως φθίνουσα σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:**

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad (\Sigma\chi.\ \beta)$$



Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα *Δ*, γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

11. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα (αντ. φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
    Απ:

Μια συνάρτηση f λέγεται απλώς :

- **αύξουσα σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \le f(x_2)$**

- **φθίνουσα σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \ge f(x_2)$**

12. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.
    Απ:

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Ορισμός ολικού ακρότατου

13. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α και $x_0 \in$ Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο (αντ. ελάχιστο) το $f(x_0)$;
    Απ:

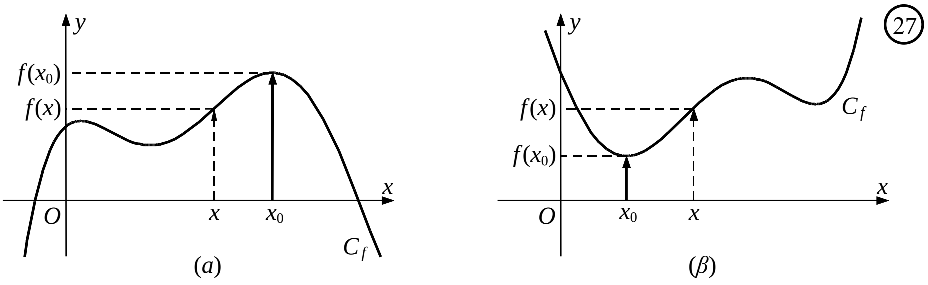
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού *A* θα λέμε ότι:

- **Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν**

$f(x) \le f(x_0)$ **για κάθε** $x \in A$ **(Σχ. 27α)**

- **Παρουσιάζει στο** $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο, το** $f(x_0)$**, όταν**

$f(x) \ge f(x_0)$ **για κάθε** $x \in A$ **(Σχ. 27β).**



Ορισμός τοπικού ακρότατου

(οι ορισμοί αυτοί βρίσκονται στο κεφ2 σελ. 140-141)

14. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο στο** $\mathbf{x_0 \in A}$**;**

Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει** $\delta > 0$**, τέτοιο ώστε**

$f(x) \le f(x_0)$ **για κάθε** $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 **λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το** $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της *f*.**

15. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο στο** $\mathbf{x_0 \in A}$**;**

Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει** $\delta > 0$**, τέτοιο ώστε**

$f(x) \ge f(x_0)$**, για κάθε** $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 **λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το** $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της *f*.**

1-1 Συνάρτηση

16. Πότε μια συνάρτηση f: A→R λέγεται συνάρτηση 1 – 1;

<u>Ορισμός</u>

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ **<u>λέγεται</u> συνάρτηση** $1\!-\!1$**, όταν για οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in A$ **ισχύει η συνεπαγωγή:**

αν $x_1 \ne x_2$, **τότε** $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Κριτήριο: Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ **<u>είναι</u> συνάρτηση** $1\!-\!1$**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in A$ **ισχύει η συνεπαγωγή:**

αν $f(x_1) = f(x_2)$, **τότε** $x_1 = x_2$

Σχόλια

17. **Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση είναι 1 – 1 αν και μόνο αν :**
    a. **Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x**
    b. **Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. Δηλαδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.**

18. **Αν f: A$\to$R μια συνάρτηση, πότε ορίζεται η αντίστροφη της f^{-1}; Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f.**
    Απ:
    Μια συνάρτηση f έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1.
    Όταν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε για κάθε y του συνόλου τιμών της f(A) υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A, για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$, η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντίστροφή της f συμβολίζεται με f^{-1} και ισχύει η ισοδυναμία
    $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

19. **Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:**
    $f(f^{-1}(y))=....$ **αν** $y\in....$ **και** $f^{-1}(f(x))=.....$ **αν** $x\in...$

20. **Τι γνωρίζετε για τις γραφικές παραστάσεις δυο αντίστροφων συναρτήσεων**;
    Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

21. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:
    α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to ...} f(x)=\lim\limits_{x\to ....} f(x)=l$
    β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-....)=....$
    γ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to ...} f(...+...)=....$

22. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω
    α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$**,** τότε f(x) … 0 κοντά στο x_0**.**
    β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$**,** τότε f(x) … 0 κοντά στο x_0 .
    γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει f(x) $\leq$ g(x) κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)....\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
    Ισχύει το αντίστροφο στις παραπάνω ανισοτικές σχέσεις;
    Απ: Για τις περιπτώσεις α και β δεν ισχύει γενικά το αντίστροφο. Για τη περίπτωση γ ισχύει.

23. Να γράψετε τις βασικές ιδιότητες που αφορούν το όριο αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, απόλυτης τιμής και ρίζας συνάρτησης.
    Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να εφαρμόζονται οι παραπάνω

ιδιότητες.
Απ:**<u>Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο</u> x_0, τότε:**

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x))=\kappa\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, **για κάθε σταθερά** $\kappa\in\mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, **εφόσον** $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, **εφόσον** $f(x)\geq 0$ **κοντά στο** x_0.

24. **Αν** $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ **πολυώνυμο να αποδείξετε ότι** $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ **όπου** $x_0\in\mathbb{R}$

<u>Απόδειξη</u>:Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)$$
$$=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$
$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$
$$=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

25. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

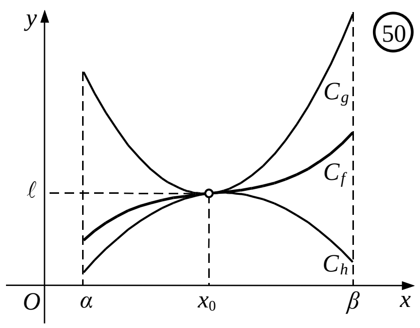
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. **Αν**

- $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ **κοντά στο** x_0 **και**
- $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$,

τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell.$$



26. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ **(μόνο για ασκήσεις)**

Απόδειξη:
Ισχύει ότι $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$ **για κάθε x κοντά στο** x_0 **και αφού** $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ **άρα και** $\lim\limits_{x\to x_0}(-|f(x)|)=0$, **από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει και** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

27. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη το όριο $\lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x}=0$ (σελ. 52)

28. Για ποιες τιμές του x ισχύει η ανίσωση $|\eta\mu x|\le|x|$; Πότε ισχύει η ισότητα; (σελ52)

29. Να συμπληρώσετε τις ισότητες

   a. $\lim_{x\to \dots}\frac{\eta\mu x}{x}=\dots.$ και
   b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\dots$

30. Προσοχή στις παρακάτω βασικές προτάσεις που αφορούν το μη πεπερασμένο όριο. (σελ 60-61)
Απ:
Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ
  αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ
  αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ
  αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

31. Είναι γνωστά τα παρακάτω όρια:

   a. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty,\ \nu\in N^*$
   b. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty,\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty,\quad \nu\in N$

      ΔΕΝ Υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}$
   c. $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty,\ \nu\in\mathrm{N}^*$ **και** $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\\ -\infty, & \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\end{cases},\ \nu\in\mathrm{N}^*$
   d. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0,\ \nu\in\mathrm{N}^*$ **και** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0,\ \nu\in\mathrm{N}^*$

32. **Όρια πολυωνυμικής και ρητής στο $\pm\infty$**

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, **με** $\alpha_\nu\neq 0$ **ισχύει:**

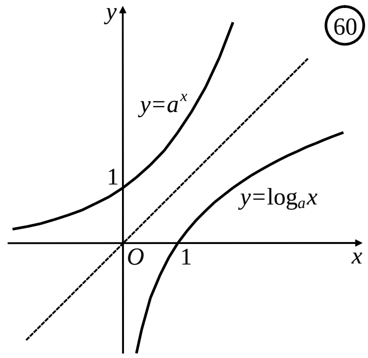
$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\kappa\neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

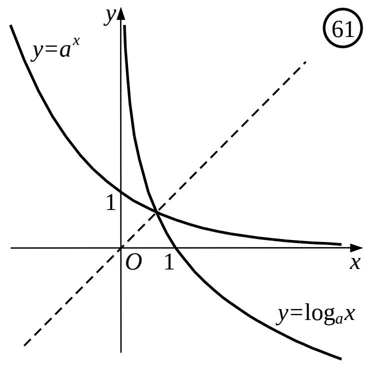
33. **α) Να γραφούν οι σχέσεις που δίνουν το όριο της εκθετικής συνάρτησης f(x) = a^x όταν χ $\to-\infty$ και χ $\to+\infty$ και χ $\to 0$.**
β) Να γραφούν οι σχέσεις που δίνουν το όριο της λογαριθμικής f(x) = $\log_a x$ όταν χ $\to 0$ και χ $\to+\infty$



a. **Αν $\alpha>1$ (Σχ. 60), τότε**

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}\log_\alpha x=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$$



b. **Αν $0<\alpha<1$ (Σχ. 61), τότε**

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$$

$$\lim_{x\to0}\log_\alpha x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$$

34. **α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x$_0$ του πεδίου ορισμού της;**
β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής.
Απ:

a. **έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν**

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

b. **Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, συνεχής συνάρτηση.**

35. Πότε μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Απ: **Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:**

a. **Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή**

b. **Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.**

36. Να διατυπωθεί το θεώρημα που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων .

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$f+g$, $c\cdot f$, **όπου** $c\in R$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ **και** $\sqrt[\nu]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

37. Να διατυπωθεί το θεώρημα για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

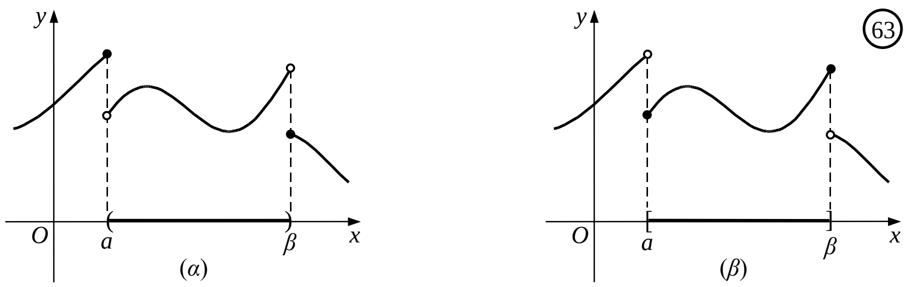
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\underline{f(x_0)}$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

38. **Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].**

ΟΡΙΣΜΟΣ

- **Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ. 63α)**
- **Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον**

$\underline{\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)}$ **και** $\underline{\lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)}$ **(Σχ. 63β)**



Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

<u>Προσοχή</u> μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα [α, β] δεν σημαίνει ότι είναι συνεχής στο α και στο β. Δες το σχήμα 63β σελ.73

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

39. **Να διατυπωθεί το θεώρημα του Bolzano. Ισχύει το αντίστροφο;**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

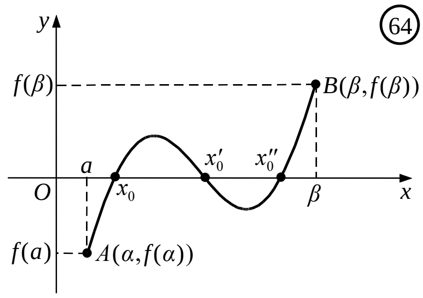
- **η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει**
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

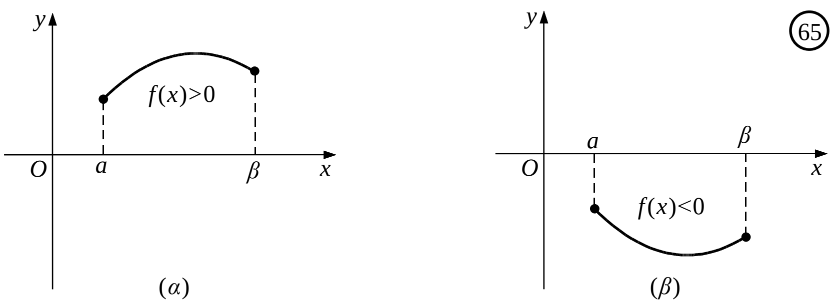
40. **Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano;**
Απ: Επειδή οι τιμές της f στα άκρα α και β είναι ετερόσημες και η f είναι συνεχής στο [α, β] η γραφική της παράσταση θα τέμνει τον άξονα χ΄χ τουλάχιστον μια φορά.



41. Ποιες είναι οι συνέπειες του θεωρήματος Bolzano για το πρόσημο μιας συνάρτησης;

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

42. Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano;
Απ: **ΟΧΙ** για παράδειγμα η συνάρτηση f(x) = x^2 είναι συνεχής και μηδενίζεται για x = 0 διατηρεί όμως θετικό πρόσημο για κάθε $x \neq 0$

43. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι διάφορη του μηδενός και συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό.

44. **Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**. Αν:** • **η *f* είναι συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **και** • $f(\alpha)\neq f(\beta)$ **τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των** $f(\alpha)$ **και** $f(\beta)$ **υπάρχει ένας, τουλάχιστον** $x_0\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιος, ώστε** $f(x_0)=\eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$**. Τότε θα ισχύει** $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ **(Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση** $g(x)=f(x)-\eta$**,** $x\in[\alpha,\beta]$**, παρατηρούμε ότι:**

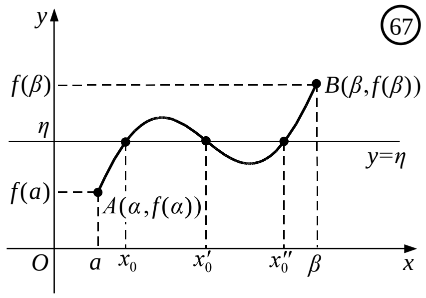
• **η *g* είναι συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **και**

• $g(\alpha)g(\beta)<0$**,**

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ **και**

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$**.**



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε** $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$**, οπότε** $f(x_0)=\eta$**.** ■

45. Τι γνωρίζετε για την εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μια συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f.
    Απ: **Η εικόνα** $f(\Delta)$ **ενός διαστήματος *Δ* μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης *f* είναι διάστημα.**

46. Να διατυπωθεί το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν *f* είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$**, τότε η *f* παίρνει στο** $[\alpha,\beta]$ **μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή *m*.**

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ **τέτοια, ώστε, αν** $m=f(x_1)$ **και** $M=f(x_2)$**, να ισχύει**

$$m\leq f(x)\leq M,\quad \text{για κάθε}\quad x\in[\alpha,\beta].$$

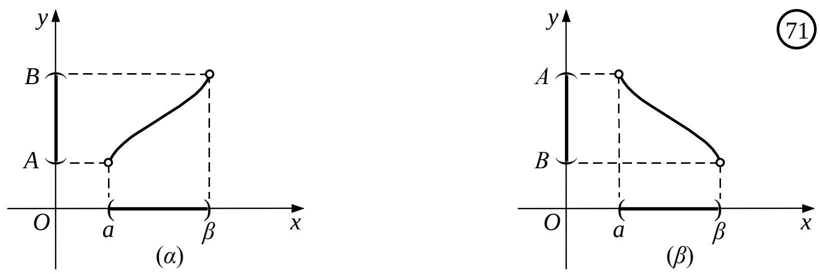
Προσοχή: Από το παραπάνω προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα θα είναι και αυτό κλειστό διάστημα.

47. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β). Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της;
    Απ:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \textbf{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).



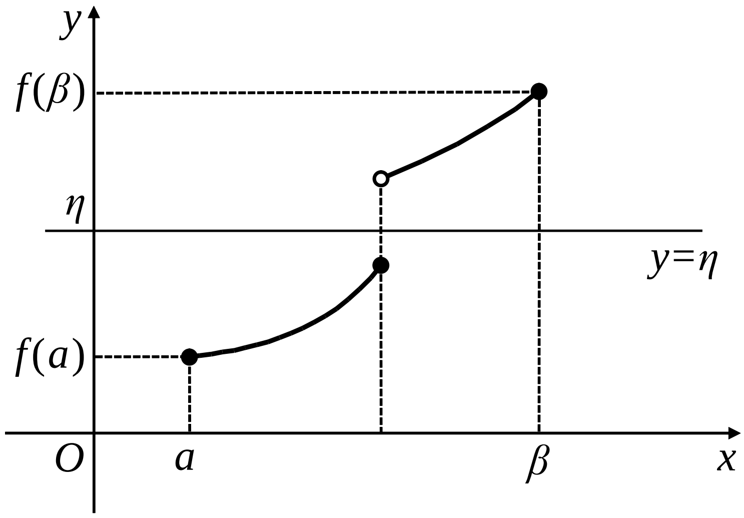
Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους με αιτιολόγηση

1. **Κάθε κατακόρυφη ευθεία μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f σε παραπάνω από ένα σημεία.** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Αν συμβαίνει αυτό τότε για μια τιμή του x θα αντιστοιχούν δυο διαφορετικές τιμές του y, που δεν συμφωνεί με τον ορισμό της **συνάρτησης.**
2. **Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$, $g\circ f$ δυο συναρτήσεων f,g, τότε πάντα ισχύει $f\circ g=g\circ f$** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$ με $(f\circ g)(x)=\ln\sqrt{x}, x>0$ και $(g\circ f)(x)=\sqrt{\ln x},\ x\ge 1$ που προφανώς $f\circ g\neq g\circ f$
3. **Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε θα είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό.** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x,\ x\ge 0 \\ \frac{1}{x},\ x<0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο R αφού είναι γνησίως αύξουσα για $x\le 0$ και γνησίως φθίνουσα για x>0.
4. **Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε πάντα θα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x,\ x\neq 0 \\ 3,\ x=0 \end{cases}$ ισχύει
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq 3=f(0)$
5. **Για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{0\}\cup[1,+\infty)$ ορίζεται το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=0.** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Το όριο δεν ορίζεται γιατί η συνάρτηση f δεν μπορεί να οριστεί όσο κοντά θέλουμε στο 0.

6. **Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g που ορίζονται κοντά στο 0 και ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ τότε θα ισχύει και**
   $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=0$ **Λάθος**

   Αιτιολόγηση: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ και $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ όμως
   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{x^2}\right)=1$

7. **Αν μια συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $[a,b]$ και $f(a)\neq f(b)$ τότε η συνάρτηση παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές των $f(a),\ f(b)$** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα δεν παίρνει την τιμή η.



Γ. Διαφορικός Λογισμός

1. Να διατυπώσετε τον ορισμό για την ύπαρξη εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μια συνάρτησης f σε ένα σημείο της (x_0, f(x_0)) .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=\lambda(x-x_0),$$

2. **Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;**

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.
Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

3. Αν x_0 εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f παραγωγίσιμη στο x_0
Απ:

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

4. Σχόλια σελ 96. τι ονομάζουμε κλίση της f στο x_0;

ΣΧΟΛΙΑ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

● **Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή** t_0**, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης** $x = S(t)$ **τη χρονική στιγμή** t_0**. Δηλαδή, είναι**

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0).$$

● **Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** ε **της** C_f **μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης** f**, στο σημείο** $A(x_0, f(x_0))$ **είναι η παράγωγος της** f **στο** x_0**. Δηλαδή, είναι**

$$\lambda = f'(x_0),$$

οπότε η εξίσωση της ***εφαπτομένης*** ε **είναι:**

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Την κλίση $f'(x_0)$ **της εφαπτομένης** ε **στο** $A(x_0, f(x_0))$ **θα τη λέμε και κλίση της** C_f **στο** A **ή κλίση της** f **στο** x_0**.**

Παράγωγος και συνέχεια

5. **Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:**
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ **έχουμε**

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f **είναι παραγωγίσιμη στο** x_0**. Επομένως,** $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$**, δηλαδή η** f **είναι συνεχής στο** x_0**.** ■

6. Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος;
   Απ: ΟΧΙ παράδειγμα η f(x) = |x| είναι συνεχής στο R αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ = 0.

7. Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν θα είναι συνεχής στο σημείο αυτό. **Σ** **Λ**

8. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **Σ** **Λ**

9. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του αριθμού $f'(x_0)$;
   Απ: Η παράγωγος της f στο x_0 όταν υπάρχει είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

10. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο Α; Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα [α, β];
    Απ:

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A*. Θα λέμε ότι:

— Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *A* ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η *f* είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

— Η *f* είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

11. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α που η f είναι παραγωγίσιμη. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος;

● Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *A* και A_1 το σύνολο των σημείων του *A* στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f': A_1 \to R$$
$$x \to f'(x),$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της *f*** ή απλά **παράγωγος της *f***

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Να αποδείξετε τα παρακάτω:

12. Έστω η σταθερή συνάρτηση f(x) = c, $c \in R$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$

    Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

13. Έστω η συνάρτηση f(x) = x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Απόδειξη

Αν x_0 **είναι ένα σημείο του R, τότε για** $x\neq x_0$ **ισχύει:**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\,,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in N-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$

Απόδειξη

Αν x_0 **είναι ένα σημείο του ○, τότε για** $x\neq x_0$ **ισχύει:**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}\,,$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

15. Έστω η συνάρτηση f(χ) = $\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ = 0.

Απόδειξη

Αν x_0 **είναι ένα σημείο του** $(0,+\infty)$ **, τότε για** $x\neq x_0$ **ισχύει:**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,,$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.
17. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$,. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
18. Ποια είναι η παράγωγος των συναρτήσεων f(x) = e^x , x$\in R$, g(x) = lnx, x>0

19. **Να αποδείξετε τον παρακάτω κανόνα παραγώγισης:**
    a. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$**, ισχύει:**

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g **είναι παραγωγίσιμες στο** x_0**, έχουμε:**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \quad ■$$

Αν οι συναρτήσεις f,g **είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα** Δ**, τότε για κάθε** $x\in\Delta$ **ισχύει:** $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

20. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Αν οι συναρτήσεις f,g **είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα** Δ**, τότε για κάθε** $x\in\Delta$ **ισχύει:** $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

21.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f,g **είναι παραγωγίσιμες στο** x_0 **και** $g(x_0)\neq 0$**, τότε και η συνάρτηση** $\frac{f}{g}$ **είναι παραγωγίσιμη στο** x_0 **και ισχύει:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

22. **Να αποδείξετε** ότι η συνάρτηση f(x) = $x^{-\nu}$, ν$\in N^*$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$ για κάθε x$\in R^*$

Απόδειξη

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ **έχουμε:**

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

23. **Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) =** $\varepsilon\varphi x$ **με** $\chi \in R_1 = R - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **Απόδειξη**

Για κάθε $x \in R_1$ **έχουμε:**

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

24. Ποια είναι η παράγωγος της f(x) = σφx και που ορίζεται;
Απ: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = R - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ δηλαδή $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

25. Να διατυπώσετε το θεώρημα για την παράγωγο της $f \circ g$ σε ένα σημείο x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση ***g*** **είναι παραγωγίσιμη στο** x_0 **και η** ***f*** **είναι παραγωγίσιμη στο** $g(x_0)$**, τότε η συνάρτηση** $f \circ g$ **είναι παραγωγίσιμη στο** x_0 **και ισχύει**

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση *g* είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και η *f* είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\dfrac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα

26. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = x^{α}, $\alpha \in R-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, $+\infty$) και ισχύει $f'(x)=ax^{a-1}$

Απόδειξη

αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ **και θέσουμε** $u=\alpha\ln x$**, τότε έχουμε** $y=e^{u}$ **. Επομένως,**

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

27. **Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = α^{x}, α> 0 είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει** $f'(x)=a^{x}\ln a$**.**

Απόδειξη

Αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ **και θέσουμε** $u=x\ln\alpha$**, τότε έχουμε** $y=e^{u}$ **. Επομένως,**

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha.$$

28. **Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = ln|x|, x$\in\mathbb{R}^{*}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^{*}$ και ισχύει** $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$

Απόδειξη

— αν $x>0$**, τότε** $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$**, ενώ**

— αν $x<0$**, τότε** $\ln|x|=\ln(-x)$**, οπότε, αν θέσουμε** $y=\ln(-x)$ **και** $u=-x$**, έχουμε** $y=\ln u$**. Επομένως,**

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$**.**

29. Αν δυο μεγέθη y,x συνδέονται με τη σχέση y = f(x), τι λέμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y **συνδέονται με τη σχέση** $y=f(x)$**, όταν** f **είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο** x_0**, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο** x_0 **την παράγωγο** $f'(x_0)$**.**

30. Τι σημαίνουν οι εκφράσεις οριακό κόστος, οριακό κέρδος, οριακή είσπραξη;

31. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f **είναι:**

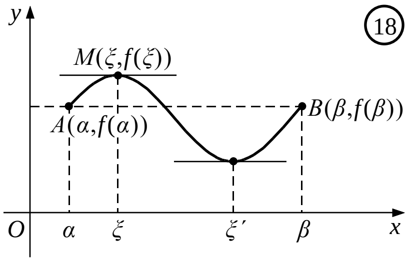
- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και**
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε:**

$$f'(\xi)=0$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



18

32. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

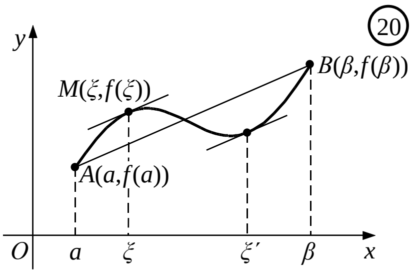
- **συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)**

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB



20

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

33. **Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα**:

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- **η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. ■

34. **Να αποδείξετε το παρακάτω πόρισμα:**

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- **οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και**
- **$f'(x) = g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,**

τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \varDelta$ να ισχύει:

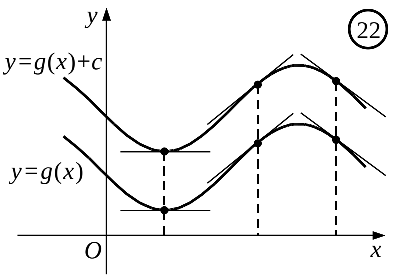
$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \varDelta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \varDelta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



35. Ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα, αν οι συναρτήσεις ορίζονται σε ένωση διαστημάτων;

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του **ισχύουν σε διάστημα** και **όχι σε ένωση διαστημάτων.**
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & x < 0 \\ \ \ 1 \ , & x > 0 \end{cases} .$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

36. Προσοχή στη εφαρμογή στη σελίδα 134.
Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε

$$f(x) = ce^{x} \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

37. **Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:**

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα *Δ*.

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.**
- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

● Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

38. Να αποδείξετε με αντιπαράδειγμα ότι το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

39. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου και ελαχίστου μιας συνάρτησης (σελ 140, 141).
Έχει απαντηθεί στην ερώτηση **Β11**

40. Προσοχή στα σχόλια σελ 142.

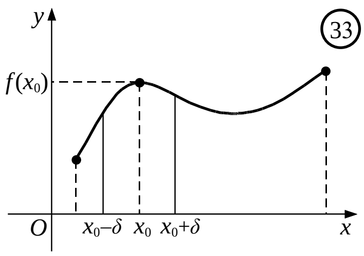
41. **Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.**

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ (2)

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

42. **Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ. (σχόλιο σελ 143)**

Οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**
2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

43. Ποια σημεία του Δ λέγονται **κρίσιμα**;

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f **δεν παραγωγίζεται** ή η **παράγωγός της είναι ίση** με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

44. **Να αποδείξετε το πρώτο κριτήριο τοπικών ακρότατων. (Σελ 144)**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). (Σχ. 35γ).

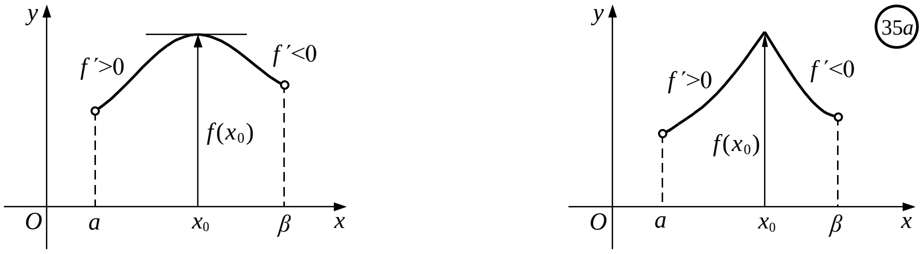
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0), \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

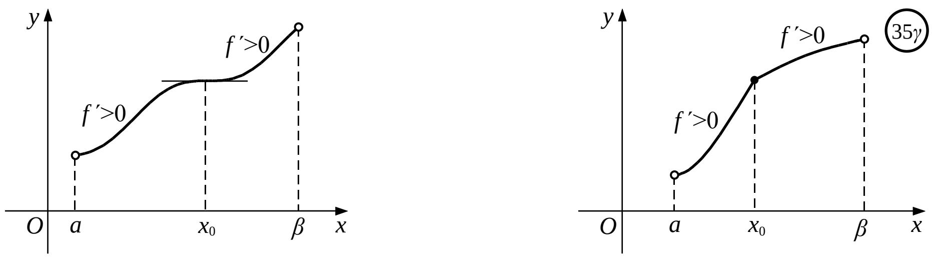
$$f(x) \le f(x_0)\,, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)\,,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι

$$f'(x) > 0\,, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)\,.$$



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

45. **Πως βρίσκουμε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα [α, β];**
Απ:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

46. **Προσοχή στην εφαρμογή 2 σελ 148.**
Μας δίνει την δυνατότητα να χρησιμοποιούμε **χωρίς απόδειξη** ότι
$\ln x \leq x-1$ για κάθε x>0.
Από την προηγούμενη σχέση αν στη θέση του x βάλουμε e^x με $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει και η ανίσωση $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ την οποία χρησιμοποιούμε και αυτή **χωρίς απόδειξη**

47. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε θα λέμε ότι η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο Δ. σελ. 155

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* σε κάθε σημείο του *Δ* βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Μια συνάρτηση που είναι κυρτή δεν σημαίνει ότι είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, είναι όμως σίγουρα παραγωγίσιμη (σύμφωνα με τον ορισμό του βιβλίου)

48. Να διατυπώσετε το θεώρημα που συνδυάζει το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου με τα κοίλα μια συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

έστω μια συνάρτηση *f* *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του *Δ*.

- **Αν $f''(x)>0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι κυρτή στο *Δ*.**

• **Αν $f''(x)<0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.**

49. Να δείξετε με αντιπαράδειγμα ότι το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.
50. Πότε ένα σημείο (x_0, f(x_0)) λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν • η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και • η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

51. Ποιο θεώρημα ισχύει για τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

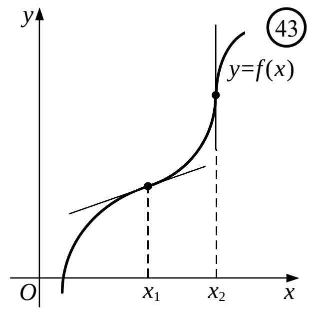
Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f **και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη**, τότε $f''(x_0)=0$.

52. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μια συνάρτηση f;

Ο ι π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς σ η μ ε ί ω ν κ α μ π ή ς μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**

ii) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''** (Σχ. 43).



53. Πότε η ευθεία χ = x_0 είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $\boldsymbol{x=x_0}$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

54. Πότε μια ευθεία y = β είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

55. Πότε μια ευθεία y =λx + β είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

56. Με ποιο τρόπο προσδιορίζουμε την πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης;

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}.$$

57. **Που αναζητούμε ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

58. Να διατυπώσετε τον κανόνα de L' Hospital για τα όρια απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους με αιτιολόγηση

1. **Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη π.χ. η συνάρτηση f(x)=|x| είναι συνεχής στο R δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο x = 0 αφού
   $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

2. **Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο δεν θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Η παραπάνω συνάρτηση

3. **Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Σωστό.**
   Αιτιολόγηση: έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε σύμφωνα με το θεώρημα θα είναι και συνεχής που είναι άτοπο.

4. **Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(a)\neq f(\beta)$ τότε δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρ. Rolle. Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση f(x) = x^2 είναι συνεχής στο [-1, 3] παραγωγίσιμη στο (-1, 3) f(-1)$\neq$f(3) όμως $f'(0)=0$

5. **Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x)>0,\ \forall x\in\Delta$ Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση f(x) = x^3 είναι γν. αύξουσα και παραγωγίσιμη στο R όμως $f'(x)=3x^2\geq 0$ στο R.

6. **Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι σταθερή. Λάθος**
   Αιτιολόγηση: π.χ. η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 4, & x>0\end{cases}$ έχει
   $f'(x)=0,\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ όμως δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

7. **Οι ρίζες της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση f(x) = x^3 δεν έχει ακρότατα όμως η παράγωγος της μηδενίζει στο μηδέν.

8. **Αν η f έχει ακρότατο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε** $f'(x_0)=0$ **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Μπορεί το x_0 να είναι άκρο του πεδίου ορισμού. Π.χ. η συνάρτηση f(x) = x με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ έχει ελάχιστο στο μηδέν όμως $f'(0)=1$
9. **Οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου μια συνάρτησης f είναι σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.** **Λάθος**
   Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση f(x)=x^4 έχει $f''(x)=12x^2$ και $f''(0)=0$ όμως δεν αλλάζει η κυρτότητα της f αριστερά και δεξιά από το μηδέν αφου $f''(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$

10. **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε** $f''(x)>0$ **για κάθε x εσωτερικό του Δ.** **Λάθος**
    Αιτιολόγηση: Δεν αναφέρεται αν η f έχει δεύτερη πάραγωγο στο Δ, αλλά ακόμη και αν έχει τότε μπορεί να ισχύει $f''(x)\geq 0$,όπως συμβαίνει με την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f(x)=x^4.

11. **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και** $x_0\in(a,\beta)$ **. Αν η** f'' **αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε το σημείο Α(x_0, f(x_0)) είναι σημείο καμπής.** **Λάθος**
    Αιτιολόγηση. Για να είναι σημείο καμπής πρέπει επιπλέον να ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο Α.

12. **Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το R, αποκλείεται να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.** **Λάθος**
    Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το R, όμως έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 1 αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

Δ. Ολοκληρωτικός λογισμός

1. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

   ΟΡΙΣΜΟΣ

   Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της *f* στο *Δ***[1] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

   $$F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ x\in\Delta.$$

[1] Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα *Δ* έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

2. **Να διατυπώσετε και να αποδείξετε** το θεώρημα που αφορά τις αρχικές συναρτήσεις μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ. (σελ 186)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \quad \blacksquare$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η έννοια της αρχικής μιας συνάρτησης έχει νόημα σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

3. Για τις παράγουσες ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες
   Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:
   a. Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ και
   b. Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

4. Αν f συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] πως ορίζεται το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.

Αποδεικνύεται ότι, “Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \boldsymbol{f(\xi_\kappa)\Delta x}\right)$ (1) υπάρχει στο $+\infty$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ”.

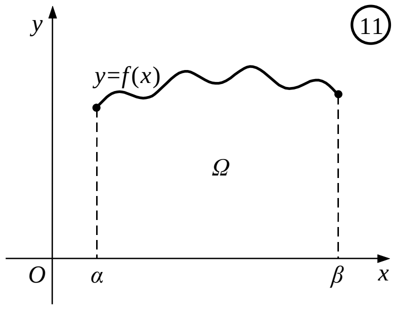
Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f(x)dx}$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

5. Τι εκφράζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα Ι = $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, όπου f(x) $\geq$0 για κάθε x$\in$[α, β]

Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{E(\Omega)}.$$



6. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:
   a. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = ...\int_\beta^\alpha f(x)dx$
   b. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = ...$

7. Αν f(x) $\geq$0 για κάθε x$\in$[α, β], τι ισχύει για το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$;
   Απ:

$$\boxed{\text{Αν}\quad f(x)\geq 0,\quad \text{τότε}\quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0.}$$

8. Να διατυπώσετε τις βασικές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f,g σ υ ν ε χ ε ί ς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in$R. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

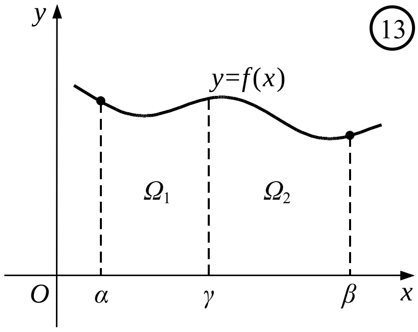
Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $$\int_\alpha^\beta f(x)dx>0 .$$

9. Αν f συνεχής στο Δ πότε ισχύει η ισότητα $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$



10. Αν f συνεχής στο Δ , f(x) ≥0 και α < β< γ α, β, γ∈Δ, ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$;

Αν $f(x)\geq 0$ και $\alpha<\gamma<\beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1)=\int_\alpha^\gamma f(x)dx\,,\quad E(\Omega_2)=\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

και $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

11. Γενικά ισχύει ότι αν f συνεχής και f(x) ≥0 για κάθε x∈[α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

12. **Τι πρέπει να ισχύει <u>επιπλέον</u> ώστε** $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$;

13. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω:

Για να ορίζεται η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ στο Δ, πρέπει η συνάρτηση f(x) να είναι …………… στο Δ και το α να……….. στο …… Η F(x) είναι μια……………….. της f στο Δ, δηλαδή ισχύει: $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=$........ για κάθε ………

14. **Διατυπώστε και αποδείξτε** το **θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού** (σελ. 216)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c\,. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha)\,,$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)\,. \qquad \blacksquare$$

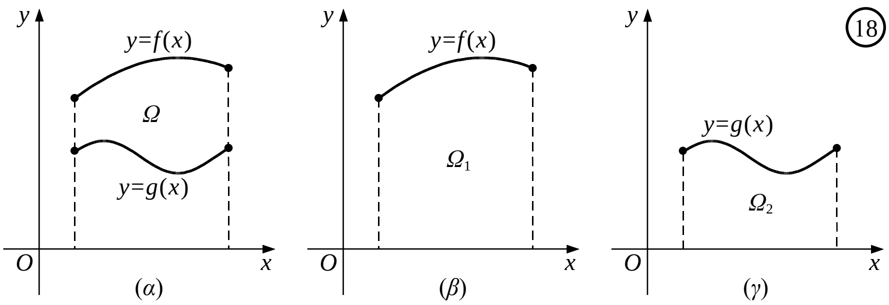
15. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]. Ποιο είναι το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που ορίζεται
   a. Από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ = α και χ = β;
   b. Από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g, των f, g και τις ευθείες χ = α και χ = β.

16. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες x = α και x = β όπου f(x) ≥ g(x) για κάθε $x \in [a, \beta]$ δίνεται από τον τύπο

Ε(Ω) = $\int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx\,.$$

Επομένως,

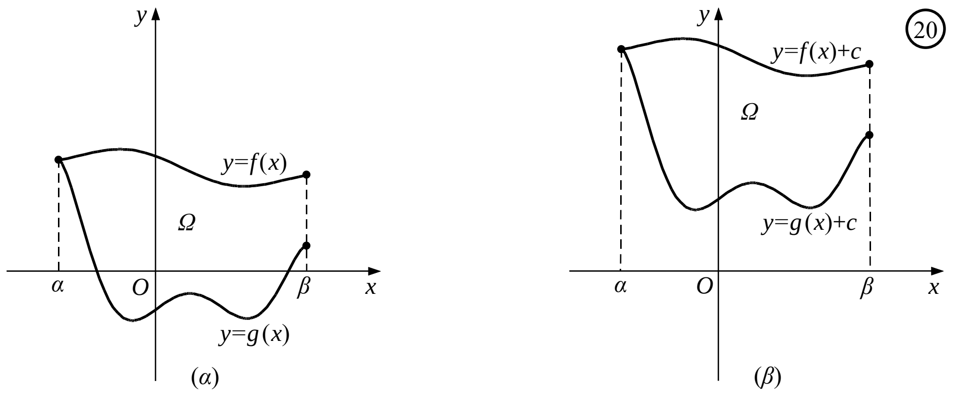
$$\boxed{E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx} \qquad (1)$$

- Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

(ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx\,.$$

Άρα:

$$\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx}$$

Τα σχόλια του σχολικού βιβλίου

Σύνθεση συναρτήσεων

- Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof) = (hog)of\,.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

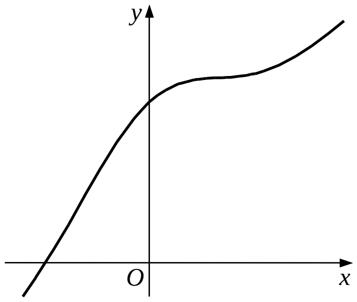
Αντίστροφη συνάρτηση

- Μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν:

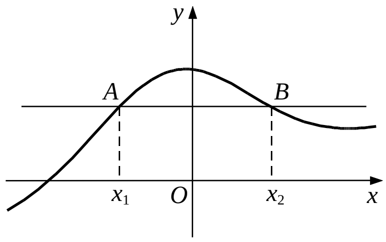
– Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

– Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).

33



συνάρτηση 1-1

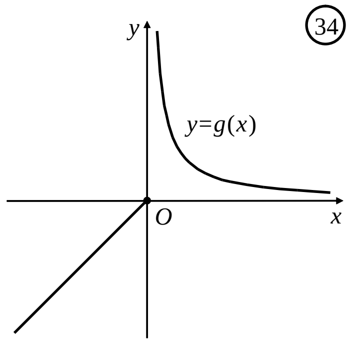


συνάρτηση όχι 1-1

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1−1". Έτσι, οι συναρτήσεις $f_1(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$, $f_2(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$, $f_3(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ και $f_4(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$, είναι συναρτήσεις 1−1. Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1−1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x\ , & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}\ , & x>0 \end{cases}$ (Σχ. 34).

34



ΟΡΙΟ

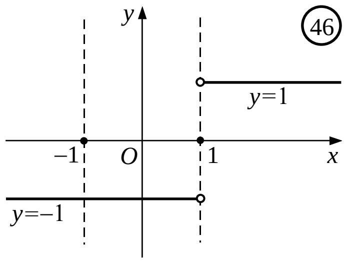
Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α,x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή

$$f(x)=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1.$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

46



ΠΡΟΣΟΧΗ $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$».

Λάθος

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

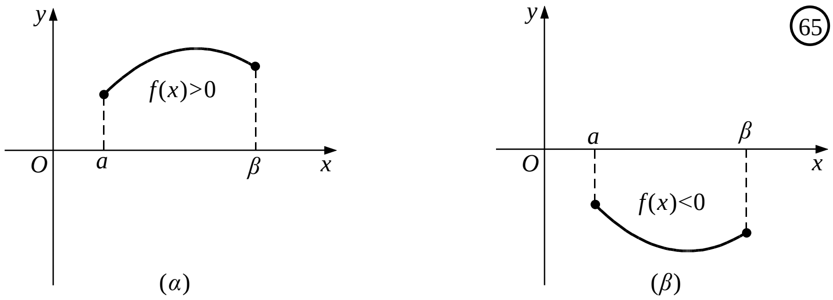
και

$$\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

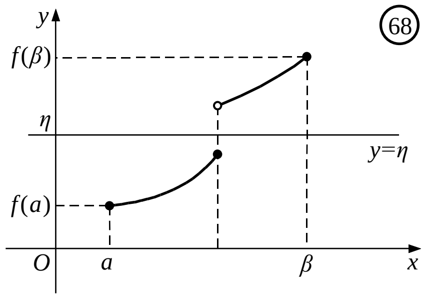
— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



● Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{M}]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

● Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι

$$\boldsymbol{\upsilon(t_0) = S'(t_0)}.$$

● Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης *f*, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι

$$\boldsymbol{\lambda = f'(x_0)}\,,$$

οπότε η εξίσωση της *ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε* είναι:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο *A*** ή **κλίση της *f* στο x_0**.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ’ ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ Θ. ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ-

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1\ , & x < 0 \\ 1\ , & x > 0 \end{cases}.$$

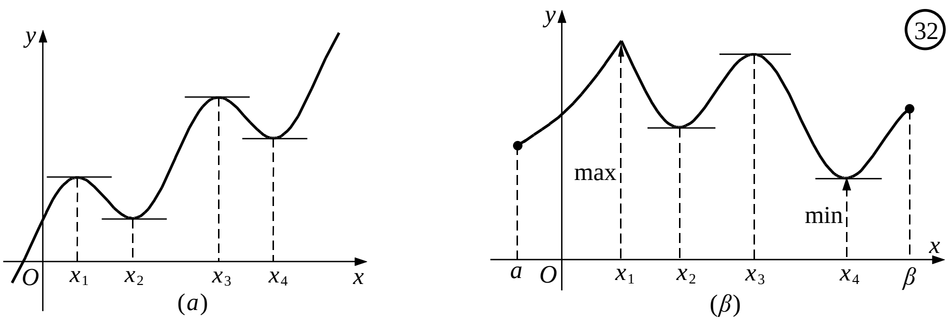
Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ R.

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). **Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής**. **Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης** (Σχ. 32α).

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, τα **εσωτερικά** σημεία του *Δ*, **στα οποία η** f' **είναι διαφορετική από το μηδέν**, **δεν** είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

ΚΥΡΤΑ ΚΟΙΛΑ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του *Δ* βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΜΒΑΔΟΝ

Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25)