# 6η ΔΙΑΛΥΚΕΙΑΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
# ‘’Θεόδωρος Φυλακτός ‘’

## Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ
## ΠΕΜΠΤΗ18ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024
## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
## ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_o$, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,x_o)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_o,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

**(Μονάδες 7)**

**Α2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in A$;

**(Μονάδες 4)**

**Α3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής (μονάδες 2) και να το ερμηνεύσετεγεωμετρικά (μονάδες 2).

**(Μονάδες 4)**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρότασηείναι ***Σωστή***, ή ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

**α)** Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής και κυρτή σε ένα διάστημα Δ ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

**β)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν ισχύει ότι $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to x_o} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_o}\left[f(x)+g(x)\right]=0$.

**γ)** Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

**δ)** Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, gέχουν ως σημεία καμπής τα σημεία τους με τετμημένη $x_o$, τότε και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h = f \cdot g$ έχει ως σημείο καμπής το σημείο της με τετμημένη $x_o$.

**ε)** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να τέμνει τηνασύμπτωτή της.

**(Μονάδες 10)**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,1] \to \mathbb{R}$και $h(x) = \sqrt{x}$ , $x \in [0,1]$ , για τις οποίες ισχύει $f(h(x)) = x - 2\sqrt{x} + 3$ για κάθε $x \in [0,1]$.

**B1.** α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $x \in [0,1]$ (μονάδες 3) και

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1}}{f(x)-2}$. (μονάδες 4)

**(Μονάδες 7)**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**(Μονάδες 7)**

Στα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε γνωστό ότι $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$ , $x \in [2,3]$ . Επιπλέον, θεωρήστε τη συνάρτηση $g:[2,3] \to \mathbb{R}$,η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f^{-1}(x)}{3-x} & , \quad 2 \le x < 3 \\ \alpha & , \quad x = 3 \end{cases}$.

**B3.** Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η g να είναι συνεχής.

**(Μονάδες 6)**

**B4.** Για $\alpha = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = e^{x-2} - 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

**(Μονάδες 5)**

## ΘΕΜΑ Γ.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x & , \quad 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της fέχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1$ στο $-\infty$.

**Γ1.** α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.(μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.(μονάδες 3)

**(Μονάδες 7)**

**Γ2.** α) Να αποδείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x στο διάστημα $[0,2\pi]$ είναι οι αριθμοί $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ και $x_2 = \frac{7\pi}{4}$.(μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα $(-\infty,2\pi]$. (μονάδες 4)

**(Μονάδες 7)**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{\pi} |f(x)|\,dx$.

**(Μονάδες 5)**

**Γ4.** Έστω ότι το σημείο $M(x,f(x))$, με $0 \le x < \frac{3\pi}{4}$, κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω ακόμη τα σημεία $A(-1,f(-1))$ και $B\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Να βρείτε τη θέση του σημείου M στην οποία το εμβαδόν του τριγώνου AMB γίνεται μέγιστο.

(**Μονάδες6)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\cdot \ln x,\ x>0$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή (μονάδες 3) και ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$. (μονάδες 3)

**(Μονάδες 6)**

**Δ2.** Έστω η συνάρτηση $h(x) = x^x,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = x\cdot e^{2024},\ x>0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $x_1,\ x_2$, με $0<x_1<x_2$. (μονάδες 3).

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $M(\xi,h(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = e^{2024}\cdot x$ (μονάδες 4).

**(Μονάδες 7)**

**Δ3.** Έστω οι συναρτήσεις $g(x)=\ln x$, $x>0$ και $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x>1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των φ και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη $x_o$ βρίσκεται στο διάστημα $(2,e)$.(μονάδες 3)

β) Αν $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_g$ και $C_\varphi$, τον άξονα x’x και την ευθεία $x=\alpha$, με $\alpha>x_o$, να αποδείξετε ότι $E(\alpha)=\ln\dfrac{x_o(\alpha-1)}{x_o-1}-x_o+2$.(μονάδες 4)

**(Μονάδες 7)**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\geq 1$ ισχύει $\int_\alpha^{\alpha^2} e^x f\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)dx \geq \int_1^\alpha f(x)\left(\alpha^2 x+\alpha\right)dx$.

**(Μονάδες 5)**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρηση σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco), χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : ενενήντα (90΄) λεπτά μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**