

Μελέτη κίνησης φυσαλίδας αέρα σε υγρό

Ιωάννης Σφαέλος¹, Γεώργιος Φύττας², Αγγελική Ευσταθίου³

Περίληψη: Η θεωρητική μελέτη της κίνησης φυσαλίδας αέρα σε υγρό, που περιέχεται σε κυλινδρικό σωλήνα, είναι ένα πολύπλοκο θέμα, με το οποίο έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές σε θεωρητικό και πειραματικό επίπεδο ώστε να περιγράψουν ποιοτικά και ποσοτικά την κίνηση. Στην παρούσα εργασία, με την ενεργή συμμετοχή μαθητών σε όλα τα επίπεδα, μελετήσαμε αυτή την κίνηση στο σχολικό εργαστήριο, γεμίζοντας έναν λεπτό, μακρύ, διαφανή σωλήνα με νερό αρχικά και κατόπιν με οινόπνευμα, εγκλωβίζοντας σ' αυτόν μια μικρή φυσαλίδα αέρα. Όταν δίνουμε μια μικρή κλίση στον κλειστό σωλήνα, παρατηρούμε ότι η φυσαλίδα του αέρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Δίνοντας διαφορετική κλίση στο σωλήνα, η ταχύτητα της φυσαλίδας αλλάζει. Η μαθηματική επεξεργασία των μετρήσεων έγινε με αξιοποίηση του λογισμικού Geogebra.

Λέξεις κλειδιά: Φυσαλίδα αέρα, ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, Geogebra

Study of the motion of an air bubble on liquid

Ioannis Sfaelos, Georgios Fytas & Angeliki Efstathiou

Abstract: The theoretical study of moving air bubble in liquid contained in a cylindrical pipe is a complicated issue, with which they have dealt with many researchers in theoretical and experimental level to describe qualitatively and quantitatively. In this work, with the active participation of students at all levels, we approached this movement in the school laboratory, filling a thin, long, transparent tube with water first and then with alcohol, trapping him a small air bubble. When we give a slight inclination in the closed tube, we can observe that the air bubble is running straight smooth motion. Giving different inclination in tube, bubble speed changes. The mathematical treatment of measurement was done by taking advantage of software Geogebra.

Keywords: motion, bubble, Geogebra

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τα χαρακτηριστικά της κίνησης μιας φυσαλίδας αέρα, η οποία εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μέσα σε κλειστό και στα δύο άκρα σωλήνα με υγρό. Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει στο χώρο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ΕΚΦΕ Νίκαιας; ΕΚΦΕ Πειραιά; Νέζης, 2014). Στην πειραματική επικύρωση της πρόβλεψης αυτής του θεωρητικού πλαισίου ενεπλάκη ομάδα μαθητών του Λυκείου ώστε να συμμετέχουν ενεργά στην επιστημονική διαδικασία ανακάλυψης της γνώσης. Τα υγρά που χρησιμοποιήσαμε στη συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία είναι το νερό και το οινόπνευμα. Λόγω του μεγάλου ιξώδους αυτών των υγρών (με το νερό να έχει μεγαλύτερη τιμή), η φυσαλίδα αποκτά γρήγορα σταθερή (οριακή) ταχύτητα, καθώς η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται μηδενίζεται λίγο μετά την έναρξη της κίνησης. Οι δυνάμεις αυτές είναι η άνωση και η τριβή με το σωλήνα (ή η αντίσταση από το νερό αν η διάμετρος της φυσαλίδας είναι μικρότερη από τη διάμετρο του σωλήνα). Το βάρος της φυσαλίδας θεωρείται αμελητέο. Από τη θεωρία προκύπτει ότι οι

¹ **Ιωάννης Σφαέλος:** Φυσικός του Π.Π.Α.Π.Π., ioasfaelos@sch.gr

² **Γεώργιος Φύττας:** Φυσικός του Π.Π.Α.Π.Π., georgefyttas@gmail.com

³ **Αγγελική Ευσταθίου:** Μαθηματικός του Π.Π.Α.Π.Π., aefstath@sch.gr

μεγάλες φυσαλίδες κινούνται γρηγορότερα και δεν είναι σφαιρικές έναντι των μικρών που είναι σφαιρικές και κινούνται αργότερα.

Εκτελώντας μετωπικά το πείραμα σε μαθητές για διάφορες γωνίες κλίσης του σωλήνα, παρατηρήθηκε ότι η ταχύτητα της φυσαλίδας μεταβάλλεται. Στη συνέχεια τέθηκε στους μαθητές το εξής ερώτημα: “σε ποια κλίση του σωλήνα θα έχουμε τη μέγιστη ταχύτητα της φυσαλίδας”. Η απάντησή τους ήταν “όταν ο σωλήνας είναι κατακόρυφος”. Η εκτέλεση του πειράματος όμως κατ’ επανάληψη και για τα δύο υγρά και για διάφορα μεγέθη φυσαλίδας έδειξε ότι αυτή στην κατακόρυφη θέση κινείται υπερβολικά αργά, διαψεύδοντας ριζικά την απάντηση των μαθητών. Για να μελετηθεί πληρέστερα το φαινόμενο και να διερευνηθεί διεξοδικά η επίδραση της γωνίας κλίσης του σωλήνα στην τιμή της ταχύτητας της φυσαλίδας, οι μαθητές ενεπλάκησαν στην κατασκευή μιας πειραματικής διάταξης που θα περιγράψουμε παρακάτω.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η ταχύτητα με την οποία κινείται μια φυσαλίδα μέσα σε ένα σωλήνα με υγρό έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές (Barr, 1926; Davies et al., 1950; Dumitrescu, 1943; Goldsmith et al., 1962) και τα γενικά χαρακτηριστικά της ροής είναι γνωστά.

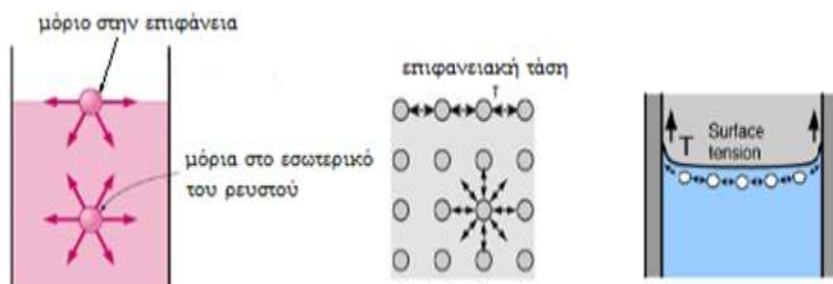
Δύο είναι οι βασικοί τύποι ροής, η στρωτή και τυρβώδης. Αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης εξαρτάται π.χ. από τη χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής, τη γεωμετρία της και το ιξώδες. Οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν με τον αριθμό Reynolds (Re) (Miksis et al., 1981; Chen et al., 1999; DeBisschop et al., 2002). Ο αριθμός Reynolds παριστά το λόγο της τριβής που υφίσταται ένα σώμα στην τυρβώδη ροή προς την τριβή που υφίσταται το ίδιο σώμα στη στρωτή ροή και προκύπτει από τις λεγόμενες εξισώσεις Navier-Stokes, που είναι η εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για τα ρευστά. Ο αριθμός Reynolds είναι το κριτήριο για το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Ο αριθμός Re δίνεται από τον τύπο: $Re = (v \cdot D) / \eta$, όπου v , η ταχύτητα του ρευστού, D η διάμετρος του σωλήνα μέσα στον οποίο βρίσκεται το ρευστό και η , το ιξώδες (Harmathy, 1960; Hattori, 1935). Για αριθμό $Re < 2000$, η ροή είναι στρωτή ενώ για αριθμό $Re > 4000$, είναι τυρβώδης. Για $2000 < Re < 4000$ έχουμε μεταβατική ροή. Αν $\eta = 0$ (ιδανικό ρευστό), ο αριθμός Reynolds γίνεται άπειρος και ως εκ τούτου η ροή είναι τυρβώδης. Το νερό είναι μία πολύ καλή προσέγγιση του ιδανικού ρευστού, αφού το ιξώδες του είναι της τάξης του 10^{-6} , οπότε ο αριθμός Re δύσκολο να είναι μικρότερος του 2000.

Η ταχύτητα της φυσαλίδας σε σωλήνες πολύ μεγάλης διαμέτρου έχει αποδειχθεί ότι είναι ανάλογη της ποσότητας $(gr)^{1/2}$, όπου g , η βαρυτική επιτάχυνση και r , η ακτίνα της διατομής του σωλήνα (Mc Laughlin, 1996). Όταν το μέγεθος του σωλήνα μειώνεται επαρκώς, η ταχύτητα της φυσαλίδας αρχίζει να μειώνεται ταχύτερα από τον παράγοντα $(r)^{1/2}$, και για σωλήνες αρκετά μικρής διαμέτρου, η κίνηση της φυσαλίδας παύει εντελώς. Γενικά σε σωλήνες μικρής διατομής η επιφανειακή τάση παίζει σημαντικό ρόλο και ειδικά τα τριχοειδή φαινόμενα στην περίπτωση που η φυσαλίδα παύει να κινείται. Επίσης, σημαντικό ρόλο στη μείωση της ταχύτητας της φυσαλίδας όσο μειώνεται η διατομή του σωλήνα παίζει και το ιξώδες του υγρού (Levich, 1949).

Το ιξώδες είναι η ιδιότητα που έχει ένα ρευστό να παρουσιάζει αντίσταση κατά τη ροή του, ως αποτέλεσμα της εσωτερικής τριβής των μορίων του. Υψηλό ιξώδες και μικρή ρευστότητα παρουσιάζουν τα παχύρρευστα υγρά. Αντίθετα, τα λεπτόρρευστα υγρά έχουν μικρό ιξώδες και μεγάλη ρευστότητα (Bretherton, 1961; Glauser et al., 2009).

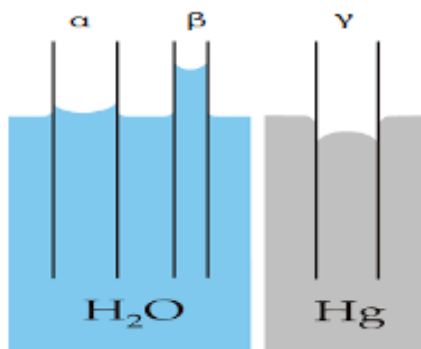
Τα μόρια που βρίσκονται στο εσωτερικό ενός υγρού και σε αρκετή απόσταση από την επιφάνεια υφίστανται την επίδραση ενδομοριακών δυνάμεων απ’ όλες τις πλευρές, η συνισταμένη των οποίων είναι μηδενική. Αντίθετα στα μόρια που βρίσκονται στην επιφάνεια του υγρού, οι διαμοριακές δυνάμεις ασκούνται μόνο από τα υποκείμενα μόρια

ενώ δεν υπάρχουν υπερκείμενα, με αποτέλεσμα τα μόρια της επιφάνειας υφίστανται ελκτικές δυνάμεις, που τείνουν να τα μετακινήσουν προς το εσωτερικό του υγρού, δηλαδή, κάθε μόριο που βρίσκεται στην επιφάνεια έχει δυναμική ενέργεια. Συνεπώς, για να φθάσει ένα μόριο από το εσωτερικό του υγρού στην επιφάνεια του πρέπει να καταναλωθεί έργο.



Σχήμα: 1. Επιφανειακή τάση των μορίων υγρού.

Η δυναμική ενέργεια μιας ποσότητας υγρού που οφείλεται σε αυτές τις διαμοριακές δυνάμεις είναι ανάλογη με το πλήθος των μορίων που βρίσκονται στην επιφάνεια, άρα με το εμβαδόν της επιφάνειας. Στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας η δυναμική ενέργεια ελαχιστοποιείται, με αποτέλεσμα να έχουμε τη μικρότερη δυνατή επιφάνεια για δεδομένο όγκο. Επομένως, η επιφάνεια συστέλλεται, καμπυλώνεται και σχηματίζεται κοίλος ή κυρτός μηνίσκος (Σχ. 1). Το φαινόμενο κατά το οποίο τα υγρά τείνουν να ελαχιστοποιήσουν την επιφάνειά τους ονομάζουμε επιφανειακή τάση (εξαρτώμενη από την φύση του υγρού και τη θερμοκρασία). Οι σταγόνες ενός υγρού όταν δημιουργούνται έχουν αρχικά σφαιρικό σχήμα λόγω της επιφανειακής τάσης που τείνει πάντα να ελαχιστοποιήσει την επιφάνεια του υγρού και για δεδομένο όγκο η επιφάνεια ελαχιστοποιείται όταν το σχήμα είναι σφαιρικό. Αν οι σταγόνες πέφτουν κατακόρυφα επιμηκύνονται λόγω της βαρύτητας.



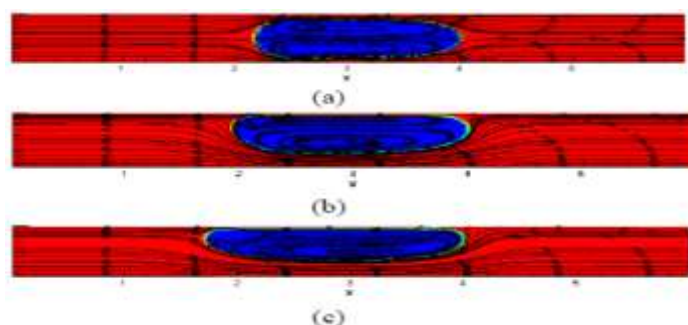
Σχήμα 2: Επιφανειακή τάση και τριχοειδείς δυνάμεις. Στους σωλήνες α και β έχουμε συνάφεια μεγαλύτερη της συνοχής, ενώ στο σωλήνα γ, έχουμε συνοχή μεγαλύτερη της συνάφειας.

Όταν ένα υγρό βρίσκεται μέσα σε ένα δοχείο τα μόρια της επιφάνειας που είναι κοντά στα τοιχώματα υφίστανται δυνάμεις συνάφειας και συνοχής. Οι δυνάμεις συνάφειας εμφανίζονται μεταξύ διαφορετικών μορίων και ασκούνται ανάμεσα στο υγρό και τα τοιχώματα του δοχείου. Οι δυνάμεις συνοχής εμφανίζονται μεταξύ ομοίων μορίων και ασκούνται μεταξύ των μορίων του υγρού. Ως αποτέλεσμα των δυνάμεων συνάφειας και συνοχής, η επιφάνεια του υγρού καμπυλώνεται και γίνεται κοίλη ή κυρτή ανάλογα με το εάν τα μόρια έλκονται ισχυρότερα από τα τοιχώματα ή από τα μόρια του υγρού, αντίστοιχα. Οι σταγόνες είναι σφαιρικές λόγω της επιφανειακής τάσης ενώ οι δυνάμεις συνάφειας συγκρατούν τις σταγόνες επάνω στα αντικείμενα.

Το φαινόμενο της καμπύλωσης της επιφάνειας του υγρού γίνεται ιδιαίτερα έντονο σε σωλήνες πολύ μικρής διατομής (της τάξεως του χιλιοστού και μικρότερο) και διαφοροποιεί τη στάθμη του υγρού, με αποτέλεσμα να παύει να ισχύει η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων (τριχοειδή φαινόμενα). Τα τριχοειδή φαινόμενα είναι αποτέλεσμα της ικανότητας του υγρού να διαβρέχει ένα συγκεκριμένο υλικό (Σχ. 2).

Σε πειράματα που έχουν διεξαχθεί σε εργαστήρια Πανεπιστημίων οι μετρήσεις έδειξαν ότι η ταχύτητα της φυσαλίδας φτάνει σε μια σταθερή τιμή (οριακή ταχύτητα), μέσα σε διανυθέν διάστημα 5-10 ακτίνες της διατομής του σωλήνα. Η μόνη εξαίρεση σε αυτό το αποτέλεσμα εμφανίστηκε όταν οι σωλήνες ήταν οριζόντια ή σχεδόν οριζόντια. Αν η φυσαλίδα καταλαμβάνει όλη τη διάμετρο του σωλήνα, τότε θα έμενε ακίνητη, εκτός αν υπάρχει μία πολύ λεπτή επιφάνεια (στρώμα υγρού), η οποία παρεμβάλλεται μεταξύ των τοιχωμάτων του σωλήνα και της φυσαλίδας. Σ' αυτή την περίπτωση θα παρατηρούμε κίνηση της φυσαλίδας (Bozzano et al., 2001).

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη φυσαλίδα είναι η άνωση (η οποία εκδηλώνεται τώρα αφού η πίεση του νερού γίνεται αισθητή στο κάτω μέρος της φυσαλίδας μέσω του λεπτού στρώματος υγρού στα πλάγια τοιχώματα) και η τριβή με τα τοιχώματα. Αποδεικνύεται ότι αν το υγρό έχει μεγάλο ιξώδες, ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή της ανάπτυξης των δύο αυτών δυνάμεων μέχρι τη στιγμή που η φυσαλίδα αποκτά σταθερή (οριακή) ταχύτητα (οι δύο δυνάμεις γίνονται ίσες), είναι αμελητέος. Συνεπώς, μπορούμε να δεχθούμε ότι η φυσαλίδα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (Chen et al., 1999; Clanet et al., 2004; Zukoski, 1966).



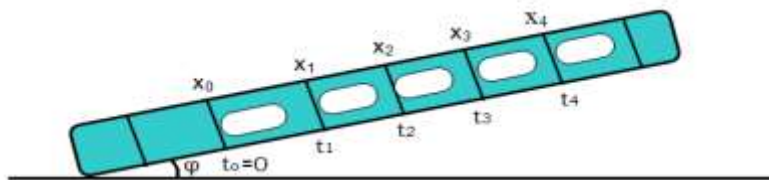
Σχήμα 3: Σχήμα και μέγεθος φυσαλίδας με $Re=20$ για κλίσεις (a) $\varphi=90^\circ$, (b) $\varphi=40^\circ$, (c) $\varphi=5^\circ$.

Στο σχήμα 3, βλέπουμε το σχήμα που παίρνει και το μέγεθος μια φυσαλίδα σε διαφορετικές κλίσεις του σωλήνα. Στις μεγάλες κλίσεις (Εικ. a), η φυσαλίδα έχει το μικρότερο μήκος της, καθώς καταλαμβάνει σε διατομή όλη τη διαθέσιμη διατομή του σωλήνα και η ροή του υγρού γίνεται από τα πλάγια με μεγάλη δυσκολία. Σε μεσαίες κλίσεις (Εικ. b), παίρνει ένα “σφηνοειδές” σχήμα και παρατηρείται γρήγορη ροή του υγρού στο κάτω μέρος της. Σε μικρές κλίσεις (Εικ. c), η φυσαλίδα είναι μακρόστενη και αφήνει αρκετό υγρό να ρέει από κάτω της (Hua et al., 2008; Hor et al., 2011).

Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος, το μέγεθος που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι να γνωρίζουμε την ταχύτητά του, δηλαδή όσο πιο γρήγορα μετατοπίζεται από μια θέση σε μια άλλη θέση.

Η τιμή της μέσης ταχύτητας v ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή, μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά από το πηλίκο της μετατόπισής του Δx , προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt , $v=\Delta x/\Delta t$. Όταν το χρονικό διάστημα Δt είναι πολύ μικρό, η μέση ταχύτητα ισούται με τη στιγμιαία. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η μέση ταχύτητα έχει πάντοτε σταθερή τιμή. Ο λόγος οποιασδήποτε μετατόπισης του σώματος προς τον αντίστοιχο χρόνο είναι πάντοτε ο ίδιος. Συνεπώς, η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος είναι και αυτή σταθερή

και ίση με τη μέση ταχύτητα. Όταν το χρονικό διάστημα Δt , είναι πολύ μικρό, η μέση ταχύτητα ισούται με τη στιγμιαία. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η μέση ταχύτητα έχει πάντοτε σταθερή τιμή. Ο λόγος οποιασδήποτε μετατόπισης του σώματος προς τον αντίστοιχο χρόνο είναι πάντοτε ο ίδιος. Έτσι, η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος είναι και αυτή σταθερή και ίση με τη μέση ταχύτητα.



Σχήμα 4: Διαδοχικές θέσεις της φυσαλίδας.

Στην παρούσα εργασία μετράμε τις χρονικές στιγμές διέλευσης της φυσαλίδας από κάποια συγκεκριμένα σημεία του σωλήνα και ακολούθως σχεδιάζουμε το διάγραμμα θέσης-χρόνου ($x-t$). Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την κλίση αυτής της ευθείας και άρα την ταχύτητα κίνησης της φυσαλίδας. Το συγκεκριμένο πείραμα εκτελέστηκε με διαφορετικές κλίσεις του σωλήνα (Σχ. 4), ώστε να διερευνηθεί η επίδραση της γωνίας κλίσης στη τιμή της ταχύτητας της φυσαλίδας. Ακολούθως, βρίσκουμε τη γωνία κλίσης του σωλήνα στην οποία αντιστοιχεί η μέγιστη ταχύτητα της φυσαλίδας. Όλη αυτή η διαδικασία επαναλήφθηκε χρησιμοποιώντας οινόπνευμα αντί για νερό, ώστε να ελεγχθεί η επίδραση του είδους του υγρού στην τιμή της μέγιστης ταχύτητας της φυσαλίδας.

Πειραματική διαδικασία



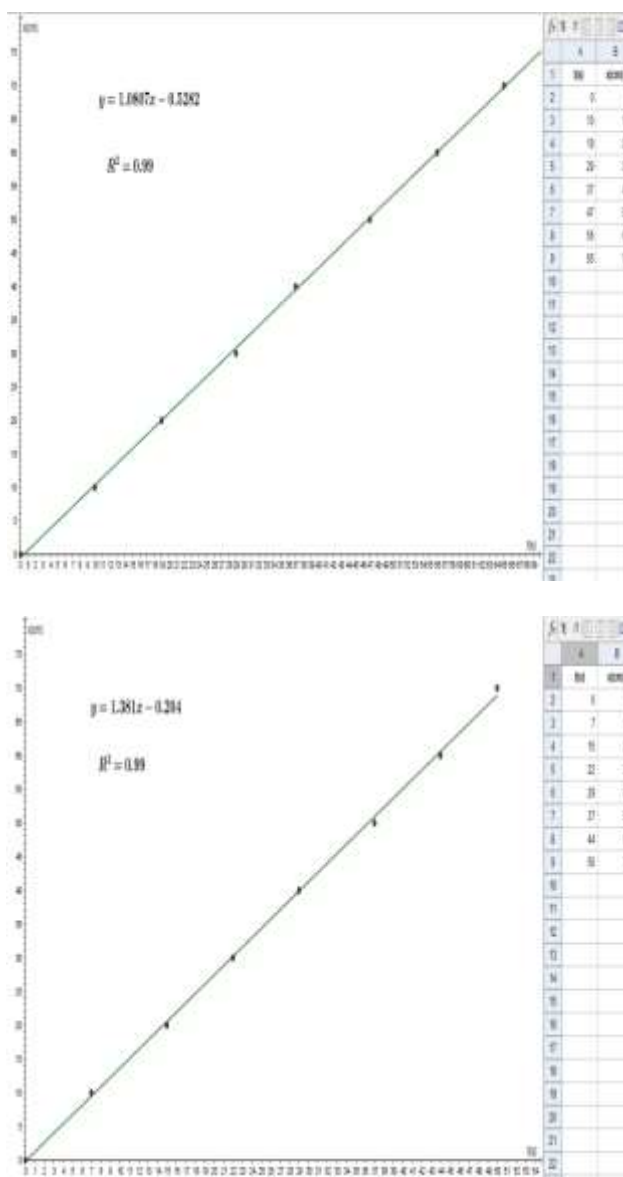
Σχήμα 5: Διαδοχικές κλίσεις του σωλήνα.

Χρησιμοποιούμε ένα γυάλινο βαθμολογημένο ανά 10cm σωλήνα, μέσα στον οποίο ρίχνουμε μια ποσότητα νερού, τόση ώστε να μείνει ένας μικρός κενός χώρος που θα λειτουργήσει ως “φυσαλίδα”. Ακολούθως κλείνουμε το ανοικτό μέρος του σωλήνα με λίγη πλαστελίνη (ή ακόμη καλύτερα με λίγη σιλικόνη). Οι μαθητές με τη βοήθειά μας έχουν τοποθετήσει σε κατάλληλες θέσεις στηρίγματα ώστε ο σωλήνας να λαμβάνει τις κλίσεις που μας ενδιαφέρουν (Σχ. 5). Το 1^ο πείραμα εκτελείται σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου $D=0,525\text{cm}$, τοποθετημένο αρχικά σε γωνία κλίσης 5°. Το αρχικό μήκος της φυσαλίδας στο σωλήνα το ρυθμίζουμε στα 3cm. Μετράμε με ηλεκτρονικό χρονόμετρο τις χρονικές στιγμές

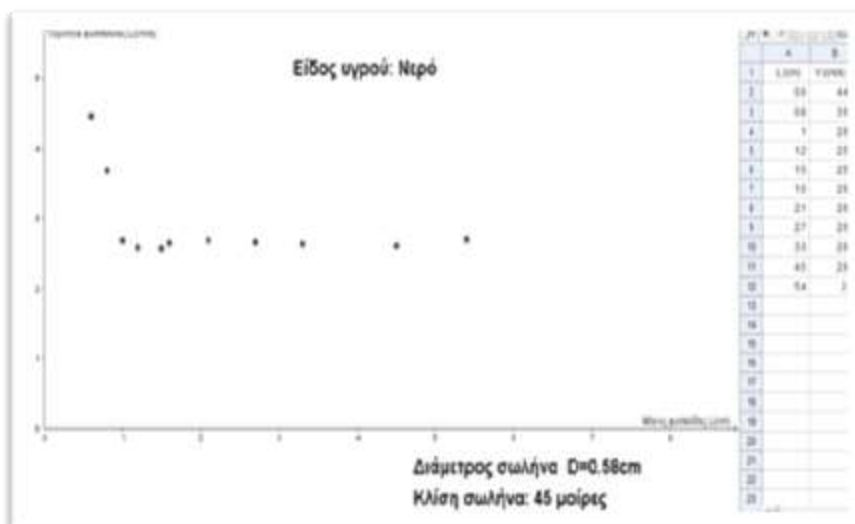
διέλευσης της φυσαλίδας από κάθε σημάδι που βρίσκεται ανά 10cm. Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών θέσης-χρόνου και ακολούθως παίρνουμε το διάγραμμα $x-t$. Από την κλίση της ευθείας που προκύπτει υπολογίζουμε την ταχύτητα της σταγόνας (Σχ. 6).

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αυξάνοντας κάθε φορά την γωνία κλίσης κατά 5° μέχρι να φτάσουμε στις 90° .

Στη συνέχεια εκτελούμε το 2^ο πείραμα με νερό σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου $D=0,58\text{cm}$ τοποθετημένο σε γωνία κλίσης 45° , αλλά με μεταβαλλόμενο αρχικό μήκος φυσαλίδας. Υπολογίζοντας την ταχύτητα της φυσαλίδας όπως περιγράψαμε προηγουμένως, παίρνουμε το διάγραμμα ταχύτητας-μήκους φυσαλίδας (Σχ. 7). Παρατηρούμε ότι κατά προσέγγιση, η ταχύτητα της φυσαλίδας παραμένει σταθερή ($2,5\text{cm/s}$), για αρχικά επιλεγμένα μήκη φυσαλίδας από 1-5,4cm.



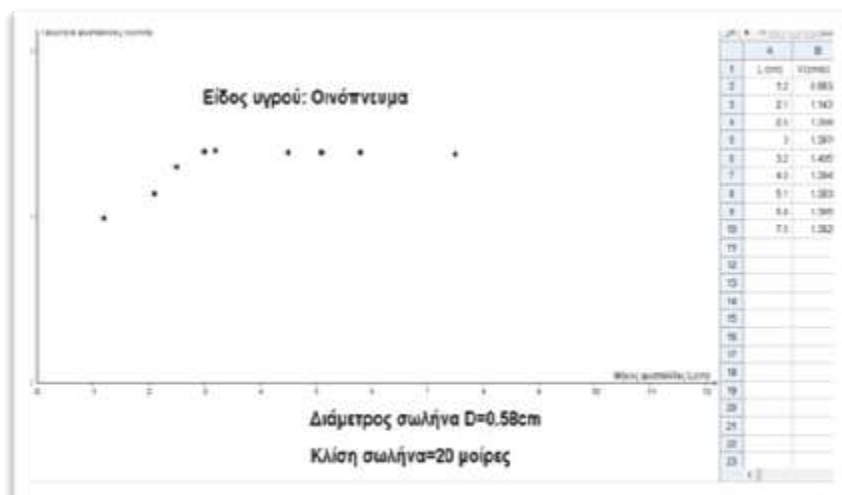
Σχήμα 6: Διαγράμματα $x-t$ για γωνίες κλίσης σωλήνα $\varphi=45^\circ$ και $\varphi=65^\circ$ αντίστοιχα.



Σχήμα 7: Πίνακας τιμών ταχύτητας-μήκους φυσαλίδας. Διάγραμμα v-L (για νερό).

Στο 3^ο πείραμα επαναλαμβάνεται όλη η διαδικασία που προαναφέραμε στο 1^ο πείραμα με σωλήνα διαμέτρου $D=0,525\text{cm}$ και αρχικό μήκος φυσαλίδας στα 3cm, χρησιμοποιώντας ως υγρό το οινόπνευμα.

Στο 4^ο πείραμα, σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου $D=0,58\text{cm}$ τοποθετημένο σε γωνία κλίσης 20^ο, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που προαναφέραμε στο 2^ο πείραμα, όπου χρησιμοποιούμε τώρα οινόπνευμα αντί για νερό. Τα αποτελέσματα του πειράματος φαίνονται στο σχήμα 8. Παρατηρούμε ότι κατά προσέγγιση, η ταχύτητα της φυσαλίδας παραμένει σταθερή (1,4cm/s), για αρχικά επιλεγμένα μήκη φυσαλίδας από 3-7,5cm.



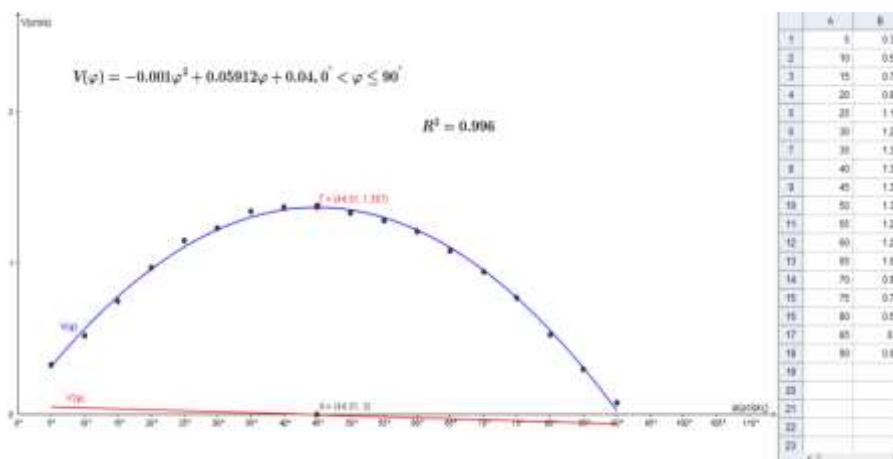
Σχήμα 8: Πίνακας τιμών ταχύτητας-μήκους φυσαλίδας. Διάγραμμα v-L (για οινόπνευμα).

Μαθηματική επεξεργασία

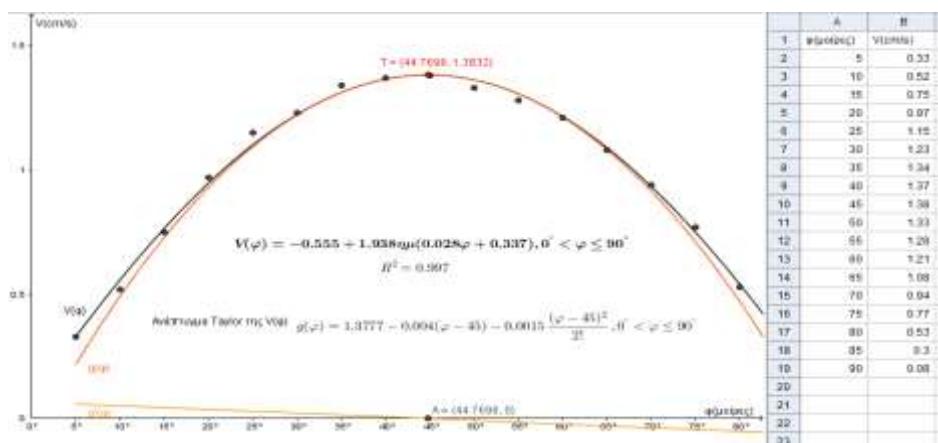
Για την εύρεση της γωνίας ϕ για την οποία η φυσαλίδα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα, κατά την κίνησή της, προσπαθήσαμε, αρχικά, να βρούμε την καμπύλη που προσαρμόζεται καλύτερα στο διάγραμμα διασποράς των πειραματικών σημείων (ϕ , v) και στη συνέχεια να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της. Η διάταξη των σημείων στο επίπεδο οδήγησε μερικούς μαθητές να υποθέσουν τη γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής συνάρτησης ως την

καμπύλη με την καλύτερη προσαρμογή, ενώ κάποιιοι άλλοι υπέθεσαν πως και η ημιτονοειδής καμπύλη μπορεί να είναι επίσης κατάλληλη.

Σε μια αντίστοιχη με τη δική μας εργασία (Νέζης, 2014), κατέληξε ότι η καταλληλότερη γραφική αναπαράσταση των σημείων (ϕ , v) είναι η καμπύλη δευτέρου βαθμού (παραβολή).



Σχήμα 9: Πίνακας τιμών ταχύτητας-γωνίας κλίσης σωλήνα. Διάγραμμα v - ϕ (για νερό).

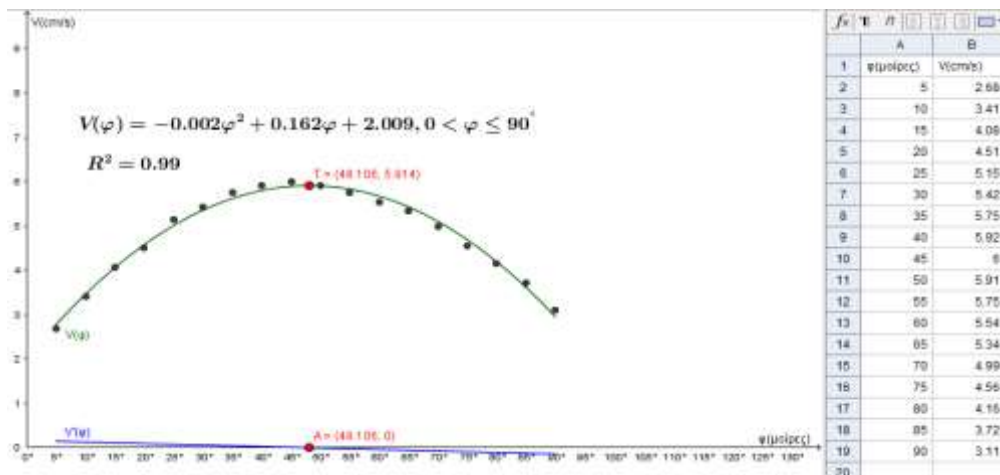


Σχήμα 10: Πίνακας τιμών - Διάγραμμα v - ϕ (ανάπτυγμα κατά Taylor), για το νερό.

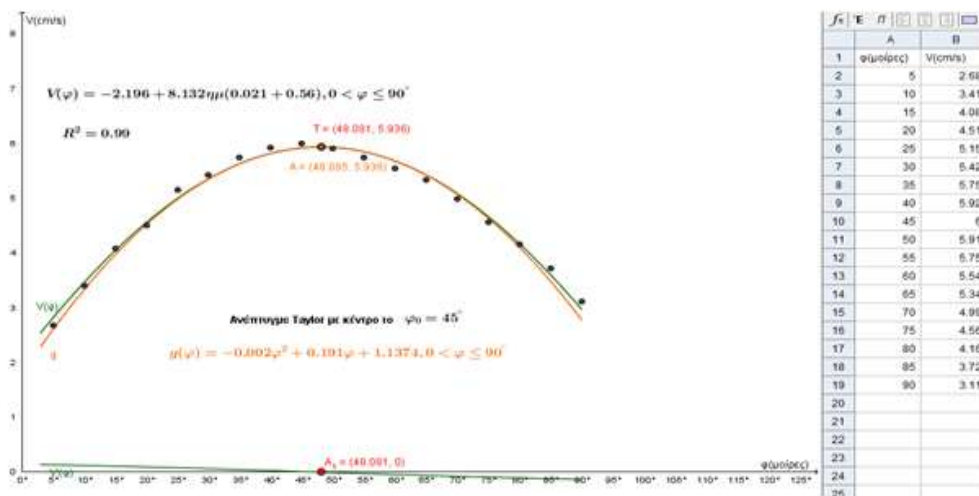
Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra η προσαρμογή με τετραγωνική συνάρτηση στη λίστα των πειραματικών μας σημείων έδωσε τη συνάρτηση: $\gamma = -0,001\phi^2 + 0,059\phi + 0,04$ (1), ενώ η προσαρμογή με ημιτονοειδή καμπύλη είχε σαν αποτέλεσμα τη συνάρτηση: $\gamma = 1,938\eta\mu(0,028\phi + 0,3337) - 0,555$ (2), με τον ίδιο συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,99$ (σχήματα 9 και 10 αντίστοιχα). Η καταλληλότητα και των δύο καμπυλών επαληθεύτηκε αναπτύσσοντας κατά Taylor με κέντρο $\phi_0 = 45^\circ$ την ημιτονοειδή καμπύλη της οποίας το ανάπτυγμα οδήγησε στην τετραγωνική συνάρτηση: $\gamma = -0,001\phi^2 + 0,063\phi + 0,04$, εξίσωση που σχεδόν ταυτίζεται με την εξίσωση (1). Για λόγους όμως ευκολίας ως προς την επεξεργασία των δύο γραμμών και εξαγωγής των συμπερασμάτων μας επιλέξαμε την εξίσωση (1). Στη συνέχεια οι μαθητές με τη βοήθεια των παραγώγων κατέληξαν ότι για γωνία $\phi = 44,7^\circ$, η φυσαλίδα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά της $v = 1,4 \text{ cm/s}$. Τα αποτελέσματά τους επιβεβαιώθηκαν και γραφικά όπου με τη δυνατότητα του λογισμικού Geogebra υπολογίστηκε το σημείο $T(45, 1,4)$ ως το μέγιστο της τετραγωνικής συνάρτησης η τετμημένη του οποίου αποτελεί και ρίζα της εξίσωσης $v'(\phi) = 0$, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο σχήμα 9.

Η μελέτη της ημιτονοειδούς καμπύλης (2) και της παραγώγου της απέδωσε τα ίδια αποτελέσματα (Σχ. 10).

Η προηγούμενη μαθηματική επεξεργασία επαναλήφθηκε και στην περίπτωση του οινόπνευματος. Έτσι δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να παρατηρήσουν την αλλαγή στην τιμή της γωνίας ($\phi=48^\circ$), για την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ν, γεγονός που αποδίδεται στο διαφορετικό ιξώδες των δύο υγρών (Σχ. 11, 12).



Σχήμα 11: Πίνακας τιμών ταχύτητας-γωνίας κλίσης σωλήνα. Διάγραμμα ν-φ (για οινόπνευμα).



Σχήμα 12: Πίνακας τιμών - Διάγραμμα ν-φ (ανάπτυγμα κατά Taylor), για το οινόπνευμα.

Συμπεράσματα

Ως εκπαιδευτικοί γνωρίζουμε ότι η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι δύσκολο να μελετηθεί πειραματικά στο εργαστήριο. Με τα πειράματα που περιγράψαμε, πετύχαμε την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην εκτέλεση των πειραμάτων και κατόπιν στη διατύπωση συμπερασμάτων. Επιπλέον, με την παρότρυνση των μαθητών να ανατρέξουν στο διαδίκτυο σε βιβλιογραφία και δημοσιεύσεις σχετικές με το φαινόμενο που μελετούν ώστε να αντλήσουν επιπλέον πληροφορίες, απέδωσε τα αναμενόμενα. Στη συνέχεια των μαθημάτων της Φυσικής και των Μαθηματικών, διαπιστώσαμε ότι η διεπιστημονική ενεργή σύνδεση των δύο αυτών επιστημών στη συγκεκριμένη ομάδα μαθητών αξιοποιεί τη σφαιρικότητα της

γνώσης, αλλά και την αναδεικνύει. Οι μαθητές κατανόησαν ότι για να πάρουν αποφάσεις ή να καταλήξουν σε συμπεράσματα θα χρειαστεί τα μέλη της ομάδας να επικοινωνήσουν, να μοιραστούν ιδέες, απόψεις, πληροφορίες, να μελετήσουν τα δεδομένα.

Από την εκτέλεση των παραπάνω πειραμάτων προέκυψαν από τους μαθητές τα εξής συμπεράσματα. Η συμπεριφορά όλων των φυσαλίδων ορισμένου μήκους είναι παρόμοια για το νερό και το οινόπνευμα. Η ταχύτητά τους αυξάνεται μέχρι μια ορισμένη κρίσιμη γωνία κλίσης του σωλήνα. Η μέγιστη τιμή της παρατηρείται να λαμβάνεται για γωνίες από 45° – 50° ενώ στη συνέχεια η ταχύτητα των φυσαλίδων μειώνεται με την αύξηση της γωνίας κλίσης του σωλήνα. Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας διαφοροποιείται αισθητά για διαφορετικά υγρά, παρουσιάζοντας μεγαλύτερη τιμή στο οινόπνευμα σε σχέση με το νερό, λόγω του μεγαλύτερου ιξώδους που παρουσιάζει το δεύτερο υγρό. Η επίδραση της κλίσης του σωλήνα για την τελική ταχύτητα είναι πολύπλοκη λόγω της αλλαγής της γεωμετρίας της φυσαλίδας. Η ισορροπία της άνωσης και της τριβής αλλάζει με το σχήμα της φυσαλίδας. Η κίνηση της φυσαλίδας είναι γενικά ένα πολύπλοκο φαινόμενο και εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η σχέση της διαμέτρου του σωλήνα με το μήκος της φυσαλίδας, του υλικού του σωλήνα με το είδος του υγρού, το ιξώδες την επιφανειακή τάση, το σχήμα της διατομής του σωλήνα και φυσικά την κλίση του σωλήνα.

Τέλος πρέπει να επισημανθεί ότι η συνεργατική μάθηση στο μάθημα των Φυσικών Επιστημών εξασφαλίζει αυθεντικές συνθήκες εξοικείωσης των μαθητών στην επιστημονική νοοτροπία, δημιουργεί το ιδανικό περιβάλλον για άσκηση των μαθητών στις επιστημονικές διαδικασίες και εξασφαλίζει με φυσικό και αβίαστο τρόπο την ενεργό συμμετοχή και αυτενέργειά τους. Απλά καθημερινά φαινόμενα μπορούμε να τα αναγάγουμε σε σημαντικούς διδακτικούς στόχους μέσα από τους οποίους αναδεικνύεται και η άμεση σχέση Φυσικής, Μαθηματικών και καθημερινότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΕΣ

- Barr, G. (1926). The Air Bubble Viscometer. *Philosophical Magazine*. Series 7, (No 1), pp. 395. Doi: 10.1080/14786442608633640
- Batchelor, G.K. (1970). *An Introduction to Fluid-dynamics*. Cambridge University Press.
- Bozzano, G., Dente, M. (2001). Shape and terminal velocity of single bubble motion: a novel approach, *Computer and Chemical Engineering*, 25, pp. 571-576. Doi: 10.1016/S0098-1354(01)00636-6
- Bretherton, F. P. (1961). The motion of long bubbles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 10, pp.166-188. Doi: 10.1017/S0022112061000160
- Chen, L., Garimella, S., Reizes, J., Leonardi, E. (1999). The development of a bubble rising in a viscous liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 387, pp. 61-96.
- Clanet, C., Heraud, P., Searby, G. (2004). On the motion of bubbles in vertical tubes of arbitrary cross-sections: some complements to the Dumitrescu -Taylor problem, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 519, pp. 359–376. Doi: 10.1017/S0022112004001296
- Davies, R. M. & Taylor, G. I. (1950). The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, Vol 200, pp. 375-390. Doi: 10.1098/rspa.1950.0023
- DeBisschop, K. M., Miksis, M. J., Eckmann, D. M. (2002). "Bubble rising in an inclined channel" *Physics of Fluids*, 14, pp 93-107. Doi: 10.1063/1.1425842

- Dumitrescu, D. T. (1943). Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol 23, (No 3), pp 139–149. Doi: 10.1002/zamm.19430230303
- Glauser, S., Wickenhauser, M. (2009). Bubble Movement in Downward-inclined Pipes, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol 135, (No 11), pp 1012-1015. Doi: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000093
- Goldsmith, H. L. & Mason, S. G. (1960). *Private Communication*. McGill University, Montreal.
- Hor, N., Hua, J., Lawrence, C., Spelt, P. (2011). Numerical simulation of large bubbles in channels using a front-tracking method, *8th Inter. Conference on CFD in Oil & Gas, Metallurgical and Process Industries*, 21-23 June 2011, SINTEF/NTNU, Trondheim Norway.
- Hua, J., Stwene, J.F., Lin, P. (2008). Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method. *Journal of Computational Physics*, Vol 227, pp 3358-3382. Doi: 10.1016/j.jcp.2007.12.002
- Levich, V. G. (1949). The motion of bubbles at high Reynolds numbers, *Zh. Eksperim. & Teor. Fiz.* 19, 18.
- Mc Laughlin, J. B. (1996). Numerical Simulation of Bubble Motion in Water. *Journal of colloid and interface science*, Vol 184, (No 2), pp 614-625. Doi: 10.1006/jcis.1996.0659
- Miksis, M., Vandenbroeck, J.M., Keller, J.B., (1981). Axisymmetric bubble or drop in a uniform-flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 108, pp 89-100. Doi: 10.1017/S0022112081002000
- Zukoski, E.E. (1966). Influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 25 (No 4), pp 821-837. Doi: 10.1017/S0022112066000442

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΕΣ

- Εργαστηριακό Κέντρο Φυσικών Επιστημών Πειραιά – ΕΚΦΕ Νίκαιας.
Θάνος, Γ. (χ.η). ΕΚΦΕ Πειραιά – Καλλιπολης. Ανακτήθηκε από <http://ekfe-a-peiraia.att.sch.gr/indexNew.html>
- Κουλαϊδής, Β. (2001). Διδακτική των Φυσικών Επιστημών: αντικείμενο και αναγκαιότητα, Στο Β. Κουλαϊδής (επιστ. ευθ.), *Διδακτική των Φυσικών Επιστημών*, (τόμος Α, σελ. 25-50), Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.
- Νέζης, Α. (2014). Παίζοντας με τις φυσαλίδες: εμπάθυση σε ένα “απλό” πείραμα μελέτης της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. *Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση*, Τεύχος 3. Θεσσαλονίκη.

Σφαέλος, Ι., Φύττας, Γ., Ευσταθίου, Α. (2016). Μελέτη κίνησης φυσαλίδας αέρα σε υγρό. *Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών: Έρευνα και Πράξη*, (56-57). Ανακτήθηκε από <http://www.lib.uoi.gr/serp/>