

Πτώση σωμάτων σε διαφορετικά περιβάλλοντα – Θεμελιώδες θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Ευσταθίου Αγγελική¹, Σφαέλος Ιωάννης², Φύττας Γεώργιος³

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Σημαντική εκπαιδευτική έρευνα έχει αφιερωθεί σχετικά με το πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές την πτώση διαφόρων σωμάτων στο κενό, στον αέρα και σε υγρό. Η μελέτη αυτών των κινήσεων με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας δεν οδηγεί σε ικανοποιητικά μαθησιακά αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία αξιοποιήσαμε τη δυνατότητα κατασκευής προσομοιώσεων με το λογισμικό *Interactive Physics*, το Σύστημα Σύγχρονης Λήψης και Απεικόνισης της *Vernier, Lab Pro* και την ανάλυση βίντεο με το λογισμικό *Tracker*, δημιουργώντας κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον για την απόκτηση άμεσης και έμμεσης εμπειρίας μέσα από την ενεργό εμπλοκή των μαθητών, που είναι απαραίτητη για την οικοδόμηση της επιστημονικής άποψης και γνώσης. Επίσης, αξιοποιήσαμε τα λογισμικά *Geogebra, Excel*, προκειμένου να συνδέσουμε τους αλγεβρικούς συμβολισμούς με πραγματικές καταστάσεις. Ο σχεδιασμός και υλοποίηση δραστηριοτήτων που θα διεξαχθούν στο υπολογιστικό περιβάλλον *Geogebra*, θα οδηγήσει στην απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ Πτώση, λογισμικό, Θεμελιώδες θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Falling of objects in different environments-Fundamental theorem of integral calculus

Efstathiou Angeliki, Sfaelos Ioannis & Fyttas Georgios

ABSTRACT: Important educational research has been devoted on how students perceive the fall of various bodies in a vacuum, in the air and in liquid. The study of these movements with the traditional way of teaching does not lead to satisfactory learning outcomes. In this paper we use the possibility of building simulation with the software *Interactive Physics*, *System Contemporary Reception and Display of Vernier, Lab Pro* and video analysis with the software *Tracker*, creating an appropriate learning environment for the acquisition of direct and indirect experience through the active involvement of students which is essential for building the scientific opinion and knowledge. Also, use the software *Geogebra, Excel*, to connect algebraic notation with real situations. The design and implementation of activities to be carried out computing environment *Geogebra*, will lead to the proof of Fundamental theorem of Integral Calculus.

KEY WORDS: fall, software, fundamental theorem of integral calculus

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γνωρίζουμε σήμερα ότι ο πραγματικός κόσμος πάντα προχωρούσε με ένα συνδυασμό Μαθηματικών και Φυσικής. Πρώτα αναπτύσσεται η απαιτούμενη Μαθηματική Λογική, μετά θέτουμε τα αξιώματα των Μαθηματικών και αναπτύσσεται η αντίστοιχη Μαθηματική θεωρία. Τέλος αναπτύσσονται οι Φυσικές επιστήμες, όπου σ' αυτές θέτουμε αξιώματα που

¹ Ευσταθίου Αγγελική, Μαθηματικός του Π.Π.Λ.Π.Π., aefstath@sch.gr

² Σφαέλος Ιωάννης, Φυσικός του Π.Π.Λ.Π.Π., ioasfaelos@sch.gr

³ Φύττας Γεώργιος, Φυσικός του Π.Π.Λ.Π.Π., georgefyttas@gmail.com

είναι συμβατά με τη φύση και ταυτόχρονα αναπτύσσεται η σχετική θεωρητική ανάλυση για τη περιγραφή της φύσης. Χρησιμοποιώντας τις Φυσικές επιστήμες γίνεται επέκταση των Μαθηματικών, δημιουργώντας έτσι κύκλους. Οι σχέσεις μαθηματικών και φυσικών επιστημών είναι πολύπλοκες και στην ιστορική τους εξέλιξη – από τον Αρχιμήδη μέχρι τον Αϊνστάιν – μαθηματικές δομές και θεωρίες των φυσικών επιστημών συμπλέκονται παράγοντας αναπάντεχα, πολλές φορές, αποτελέσματα ή και νέες επιστημονικές περιοχές.

Οι πολλαπλές σχέσεις Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών συμπλέκονται παράγοντας περιοχές που μπορούν να αξιοποιηθούν δημιουργικά στην ανάπτυξη δραστηριοτήτων μάθησης και διδασκαλίας. Τα προβλήματα που διατυπώνονται στην Φυσική πολλές φορές αποτελούν αφορμή για επέκταση των μαθηματικών εργαλείων, εννοιών και θεωριών καθώς και διατύπωση νέων. Η Φυσική αποτελεί μια από τις σπουδαιότερες πηγές πολιτιστικής πίεσης πάνω στα Μαθηματικά, «η αναγκαιότητα είναι μητέρα κάθε εφεύρεσης». Πολλοί Μαθηματικοί βλέπουν τη Φυσική ως πηγή νέων ερωτημάτων για την επέκταση του ερευνητικού πεδίου που δουλεύουν (Θεοχάρης, 2012). Προκειμένου οι εκπαιδευτικοί να βοηθήσουν τους μαθητές να καταλάβουν τη σημασία των Μαθηματικών και τη στενή διασύνδεσή τους με τη Φυσική θα πρέπει να υιοθετήσουν την ενσωμάτωση προβλημάτων στη διδασκαλία τους καθώς αποτελεί αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι τα Μαθηματικά είναι ουσιωδώς απαραίτητα στην εξερεύνηση, περιγραφή και εξήγηση της φυσικής πραγματικότητας.

Σκοπός της παρούσας εργασίας στα πλαίσια της εποικοδομητικής προσέγγισης για τη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών και των Μαθηματικών είναι η διατύπωση μιας διδακτικής πρότασης για τη μελέτη της πτώσης διαφόρων σωμάτων σε διαφορετικά περιβάλλοντα με χρήση ΤΠΕ. Οι ΤΠΕ προσφέρουν νέες προσεγγίσεις που ενισχύουν την υπάρχουσα διδακτική πράξη για μια πιο ενεργητική και επικοινωνιακή μάθηση. Η οικοδόμηση της γνώσης είναι μια δυναμική διαδικασία που απαιτεί την ενεργό συμμετοχή του υποκειμένου (Phillips, 1997; Widolo et al. 2002). Φιλοδοξία της εργασίας αυτής είναι η συμβολή στην αλλαγή-βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και τη Φυσική, μέσα από μια καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση. Τα πειράματα που προτείνονται πέραν της κριτικής σκέψης και συνδυαστικής ικανότητας που απαιτεί από τους μαθητές, δίνει τη δυνατότητα μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης με τη βοήθεια λογισμικών, να συνδέσουν οι μαθητές ένα φυσικό φαινόμενο με τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό (Orfanos et al. 2003). Η συλλογή, επεξεργασία και παρουσίαση των πειραματικών δεδομένων, καθώς και ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων, αυξάνουν την δυνατότητα κατανόησης του φυσικού φαινομένου και αποτελούν ως εκ τούτου μια ιδιαίτερα χρήσιμη εκπαιδευτική διαδικασία. Εξάλλου πολλοί ερευνητές της Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών αποδέχονται ότι η γνώση δεν μεταφέρεται, αλλά συγκροτείται στη σκέψη, στα πλαίσια ειδικά οργανωμένων διδακτικών πρωτοβουλιών, μέσω των οποίων οι μαθητές οδηγούνται στην οικοδόμηση συστημάτων σημασιών και νοητικών / γνωστικών εργαλείων προσέγγισης του φυσικού κόσμου (Παπαμιχαήλ, 1988).

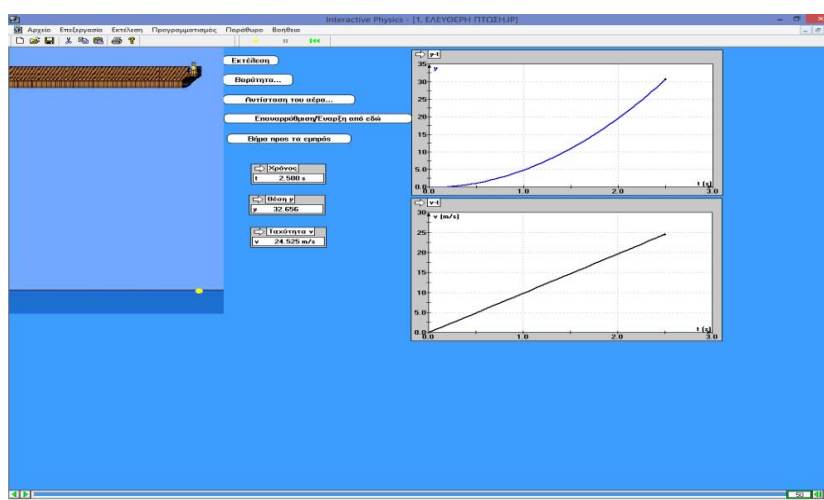
Οι διδακτικοί στόχοι που έχουμε θέσει είναι:

- Να εισάγουμε τους μαθητές σε διαδικασίες επιστημονικής έρευνας.
- Να εμπλέξουμε τους μαθητές σε επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
- Να εξοικειωθούν οι μαθητές με την επιλογή των κατάλληλων μεταβλητών.
- Να αναδείξουμε τη συνεισφορά των ΤΠΕ στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών και Μαθηματικών τρόπο (Doerr, 1997; Μπαρκάτσας, 2004; Dubinsky, E. & Tall, D., 1991).
- Να καλλιεργήσουν το πνεύμα συνεργασίας στη διαδικασία κατάρκτησης της γνώσης.
- Να αναδειχθεί η στενή σχέση Φυσικής και Μαθηματικών.

1η Δραστηριότητα: Μελέτη της πτώσης ενός σώματος στο κενό και στον αέρα

Ο βασικός διδακτικός στόχος είναι το να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι το φαινόμενο “πτώση σώματος στον αέρα”, δεν είναι και τόσο απλό όσο πιστεύουν. Η απάντηση στο ερώτημα: “Τελικά, ποια σώματα πέφτουν πιο γρήγορα; Τα βαρύτερα ή τα ελαφρύτερα;” είναι: “Δεν υπάρχει νόμος με βάση τον οποίο να μπορούμε να προβλέψουμε τι θα συμβεί κατά την πτώση δύο οποιωνδήποτε αντικειμένων στον αέρα”.

Μια λανθασμένη αντίληψη που επηρεάζει άμεσα τις ιδέες για την πτώση των σωμάτων και το βάρος τους είναι ότι στο κενό δεν υπάρχουν δυνάμεις, συνεπώς τα σώματα δεν έχουν βάρος και για τη βαρύτητα ευθύνεται ο αέρας. Στην πραγματικότητα όλα τα σώματα καθώς πέφτουν από ένα ορισμένο ύψος στο κενό και δέχονται την επίδραση του βαρυτικού πεδίου φτάνουν συγχρόνως στο έδαφος. Όταν πρόκειται όμως για σώματα που πέφτουν από ορισμένο ύψος όχι στο κενό αλλά στον αέρα, ο χρόνος πτώσης επηρεάζεται από την αντίσταση του αέρα και εξαρτάται από το σχήμα και την πυκνότητα του σώματος (Βαλασιάδης κ.ά., 2011; Μουρούζης, 2005).



Σχήμα 1. Προσομοίωση ελεύθερης πτώσης

Οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών, αποτελούν ισχυρά εργαλεία για τη βελτίωση της ποιότητας και τη διευκόλυνση της διδασκαλίας. Οι δραστηριότητες που προτείνουμε αποσκοπούν στο να βοηθήσουν τους μαθητές να εκφράσουν τις παρανοήσεις που πιθανώς έχουν για την πτώση των σωμάτων και στη συνέχεια να αλλάξουν τις αντιλήψεις τους. Τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε είναι:

1. Software, Hardware
2. Interactive Physics 2005
3. Tracker και κάμερα
4. Logger Pro, Lab Pro και Motion Detector
5. Geogebra
6. Excel

Σε πρώτη φάση ξεκινήσαμε με προσομοιώσεις στο περιβάλλον του Interactive Physics. Με το εκπαιδευτικό λογισμικό Interactive Physics (I.P.), δημιουργήσαμε κατάλληλες προσομοιώσεις για να μελετήσουμε:

- Την ελεύθερη πτώση σώματος.
- Την πτώση σώματος με «υψηλή» αντίσταση.

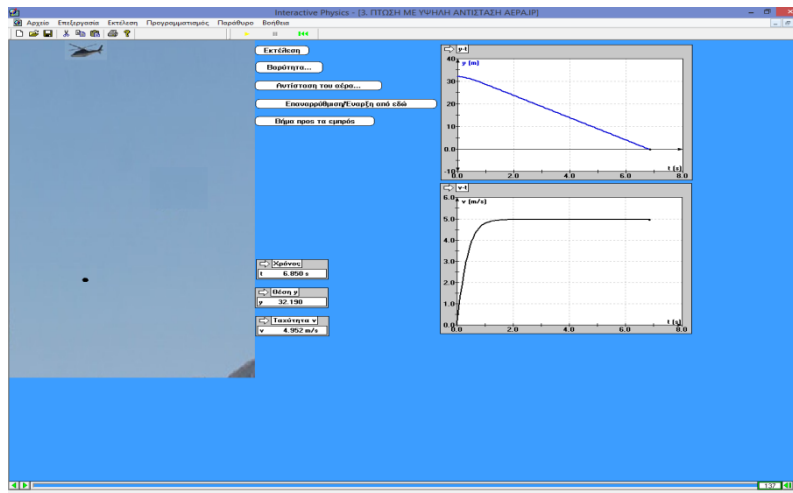
Αυτό που διαπιστώθηκε από τους μαθητές εκτελώντας την προσομοίωση (Σχήμα 1) είναι ότι η ελεύθερη πτώση είναι μια κίνηση κατακόρυφη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, όπου η ταχύτητα είναι ανάλογη με το χρόνο.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την απόσταση y που διάνυσε το σώμα, καθώς και την ταχύτητά του v σε κάποια χρονική στιγμή t , είναι: $v = gt$ (1) και $y = \frac{1}{2}gt^2$ (2).

Αντίστοιχα σε μια ρεαλιστική πτώση (κίνηση στον αέρα), τα σώματα αρχικά κάνουν μια κίνηση που μοιάζει με ελεύθερη πτώση, αλλά σύντομα η ταχύτητα παύει να αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο και τείνει σε μια σταθερή τιμή, δηλαδή μια οριακή ταχύτητα (Σιανούδης, 2001). Σ' αυτή την περίπτωση λαμβάνοντας υπ' όψη και την επίδραση της άνωσης A και της αντίστασης F_D , ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$B - A - F_D = ma \quad (3)$$

Στα σώματα που μελετήσαμε την κίνησή τους, αποδεικνύεται ότι η άνωση είναι αμελητέα σε σύγκριση με το βάρος τους, $\frac{A}{B} = \frac{d_a g V}{d_\sigma g V} = \frac{d_a}{d_\sigma} \ll 1$, οπότε μπορούμε να την αγνοήσουμε χωρίς να έχουμε σημαντικό σφάλμα στους υπολογισμούς μας, όπου d_a και d_σ είναι η πυκνότητα του αέρα και του σώματος αντίστοιχα.



Σχήμα 2. Προσομοίωση πτώσης σώματος στον αέρα

Ακόμα και με δύο δυνάμεις όμως (B και F_D), στη γενική περίπτωση, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται πολύπλοκες και μόνο μια αριθμητική επίλυση είναι δυνατή (Benaca, 2010) εκτός αν γίνουν κάποιες παραδοχές-προσεγγίσεις, που καθιστούν την αναλυτική λύση δυνατή. Μια τέτοια παραδοχή είναι η αντίσταση του αέρα να παρουσιάζει γραμμική ($F_D = -bv$) ή παραβολική συμπεριφορά ($F_D = -bv^2$), όπου b μια σταθερά, που εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου εντός του οποίου κινείται το σώμα καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος. Και οι δύο αυτές περιπτώσεις μπορούν να λυθούν αναλυτικά, έχουν φυσική σημασία και είναι αυτές που μπορούμε να συναντήσουμε σε μια ρεαλιστική πτώση. Η πρώτη περίπτωση αφορά την αντίσταση στην κίνηση σώματος σε υγρό όπως θα περιγράψουμε παρακάτω, ενώ η δεύτερη περίπτωση αφορά την αντίσταση στην κίνηση σώματος στον αέρα (Timmerman, 1999).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω η σχέση (3) γίνεται: $mg - bv^2 = m \frac{dv}{dt}$ (4). Αυτή η εξίσωση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) του προβλήματος. Η λύση αυτής της Δ.Ε. που προκύπτει είναι: $v = v_{op} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\Lambda t}} \right)$ (5), όπου $\Lambda = 2\sqrt{\frac{bg}{m}}$. Όταν το σώμα αποκτήσει οριακή ταχύτητα v_{op} , η επιτάχυνση μηδενίζεται οπότε από τη σχέση (4) μπορούμε να την υπολογίσουμε: $v_{op} = \sqrt{\frac{mg}{b}}$ (6).

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6) τις τιμές: $m=2\text{Kg}$ (μάζα σφαίρας), $g=9.81\text{m/s}^2$, οριακή ταχύτητα $u_{op}=4.95\text{m/s}$, που πήραμε από την εκτέλεση της προσομοίωσης (Σχήμα 2), μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά b :

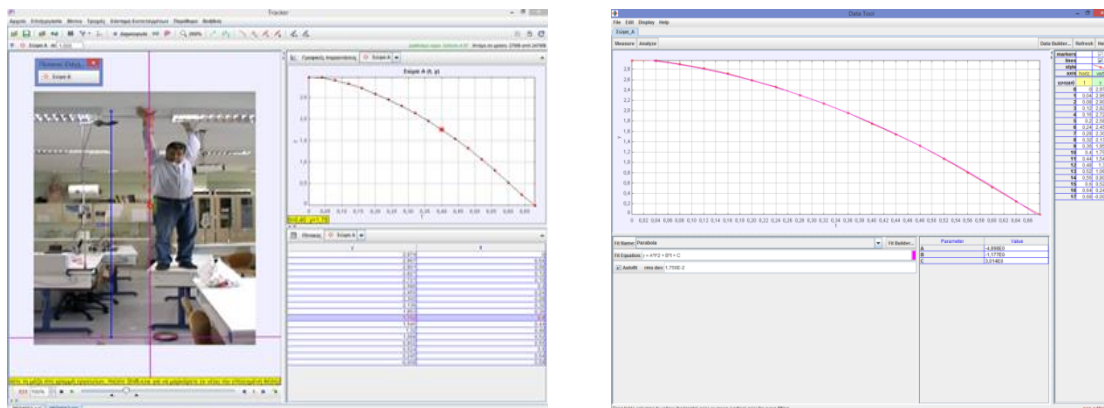
$$b = \frac{mg}{u_{op}^2} = 0.8\text{Kg/m}$$

Σε δεύτερη φάση κάναμε χρήση των λογισμικών Tracker και Logger Pro. Η συνεχής προσπάθεια για εκσυγχρονισμό των μέσων, εργαλείων και μεθόδων που χρησιμοποιούνται έχει ήδη ένα θετικό αντίκτυπο και στο εργαστήριο Φυσικών Επιστημών (Φ.Ε.), στην αναβάθμιση του ρόλου και της συμβολής του στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τα σημερινά εργαστήρια Φ.Ε. έχουν εισαγάγει και υιοθετήσει τις τεχνολογίες της πληροφόρησης, εξελιγμένα εποπτικά μέσα και νέες παιδαγωγικές απόψεις, ώστε να καταστήσουν αυτά πιο ελκυστικά στους μαθητές, αποδοτικά στην κατανόηση και εμπέδωση της επιστημονικής γνώσης και τεχνολογίας.

Σ' αυτό το πλαίσιο στην παρούσα εργασία, προτείνονται κάποια πειράματα, ως παραδείγματα εφαρμογής σύγχρονων τεχνολογιών της πληροφόρησης στη διδασκαλία της Φυσικής. Συγκεκριμένα, στα πειράματα όπως έχουν σχεδιαστεί επιτρέπουν στο μαθητή να παρακολουθήσει και να καταγράψει το φαινόμενο της πτώσης σώματος στον αέρα και σε υγρό, προσδιορίζοντας τα χαρακτηριστικά της κίνησης του σώματος, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην διερευνητική διάσταση των πειραμάτων. Ο μαθητής εμπλέκεται με τις διατάξεις που χρησιμοποιούνται, κατανοεί και εξοικειώνεται με την χρησιμοποιούμενη τεχνολογία των μετρήσεων, την επεξεργασία των δεδομένων και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και τέλος οδηγείται σε ασφαλή συμπεράσματα για την ερμηνεία του φαινομένου.

1. Μελέτη πτώσης σώματος στον αέρα με τη βοήθεια του λογισμικού ανάλυσης video Tracker

Από ύψος 3m αφήνουμε να πέσει μια μπάλα του τένις. Με τη βοήθεια μιας βιντεοκάμερας ή κινητού τηλεφώνου που διαθέτει βιντεοκάμερα, βιντεοσκοπούμε την κίνηση της μπάλας μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Φορτώνουμε το βίντεο που πήραμε στο λογισμικό Tracker και για κάθε καρέ του βίντεο υπολογίζουμε τη θέση y για κάθε χρονική στιγμή t . Τέλος παράγουμε το αντίστοιχο γράφημα $y-t$ (Σχήμα 3, αριστερά).



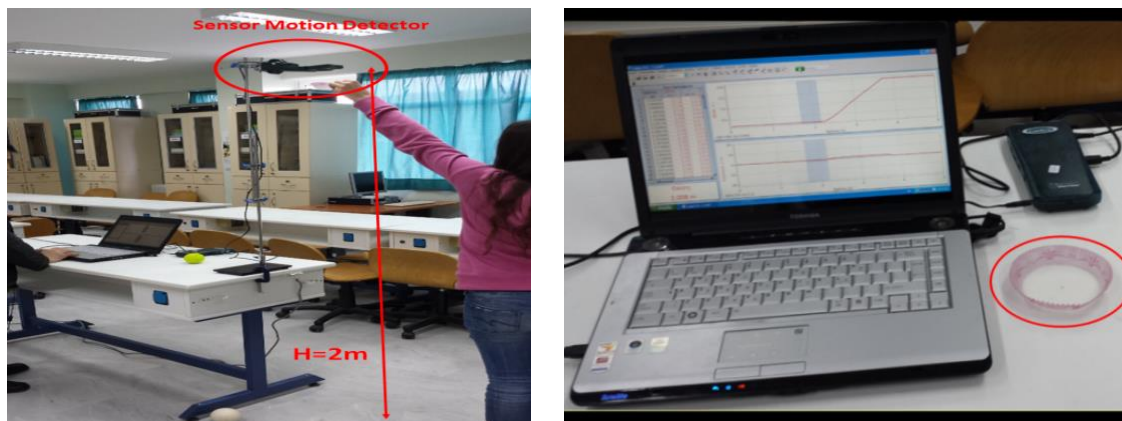
Σχήμα 3. Επεξεργασία video με την πτώση σώματος στον αέρα

Το Tracker, είναι ένα ελεύθερο λογισμικό, δηλαδή προσφέρεται δωρεάν (Brown, 2009). Το λογισμικό Tracker είναι λογισμικό ανάλυσης βίντεο με δυνατότητες ανίχνευσης αντικειμένων και επεξεργασία δεδομένων για την γραφική απεικόνιση της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης των αντικειμένων. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση φασμάτων και εικόνων συμβολής φωτός. Επίσης με το Tracker, υπάρχει η

δυνατότητα μοντελοποίησης της κίνησης σωματιδίων. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν το video σε πραγματικό χρόνο ή καρέ-καρέ, με αποτέλεσμα να τους δίνεται ο απαραίτητος χρόνος για να έχουν μια σαφή άποψη για την εξέλιξη της κίνησης αλλά και για τα κρίσιμα σημεία της (Escalada et al., 1996).

Αν επεξεργαστούμε περαιτέρω τη γραφική παράσταση $y-t$, με τη διαδικασία προσαρμογής (Σχήμα 3, δεξιά), επιλέγουμε καμπύλες προσέγγισης, καταλήγοντας στην παραβολή $y = At^2 + Bt + C$, που προσεγγίζει τα πειραματικά μας δεδομένα και η ταύτιση είναι σχεδόν πλήρης, οπότε συμπεραίνουμε ότι στον άξονα y , η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Διαβάζουμε το συντελεστή $A=-4.898$ της παραβολής. Ο συντελεστής αυτός είναι ίσος κατ' απόλυτη τιμή με το $\frac{g}{2}$ (σχέση 2), οπότε καταλήγουμε ότι $g=9.796\text{m/s}^2$, μια τιμή πολύ κοντά στη θεωρητική τιμή $g=9.81\text{m/s}^2$. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι η κίνηση της μπάλας του τένις είναι προσεγγιστικά μια ελεύθερη πτώση.

2. Μελέτη πτώσης σώματος στον αέρα με τη βοήθεια του λογισμικού συλλογής και ανάλυσης δεδομένων Logger Pro 3.8.2



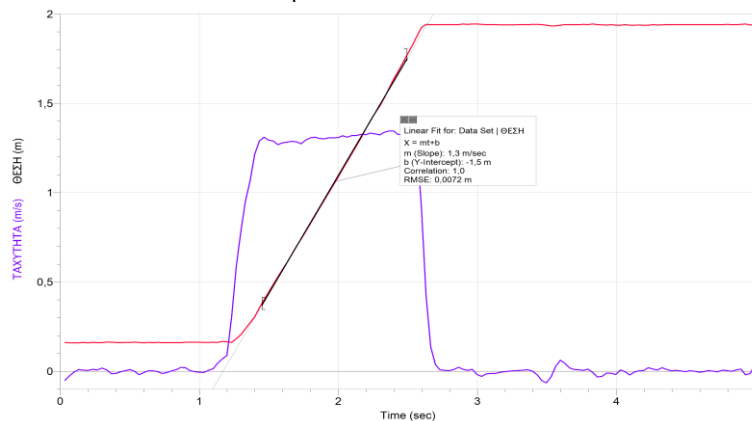
Σχήμα 4. Πείραμα πτώσης σώματος. Περιβάλλον του Logger Pro

Για το συγκεκριμένο πείραμα οι μαθητές συναρμολόγησαν μια διάταξη που αποτελείται από τον αισθητήρα Motion Detector τοποθετημένο σε ύψος 2 μέτρων και συνδεδεμένο με το Σύστημα Σύγχρονης Λήψης και Απεικόνισης Lab Pro (Vernier) και το interface Logger Pro 3.8.6. Η πολλαπλή απεικόνιση αλλά και η επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων γίνεται μέσα από το ίδιο το interface του συστήματος στην οθόνη ενός υπολογιστή. Το ίδιο ή ανάλογο σύστημα περιέχεται στο βασικό εξοπλισμό των Εργαστηρίων Φυσικών Επιστημών των Λυκείων της χώρας. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα αξιοποιήσαμε το εργαλείο ταυτόχρονης απεικόνισης των γραφικών παραστάσεων (Run Store) με σκοπό την άμεση σύγκριση των πειραματικών δεδομένων.

Στο πείραμα αυτό χρησιμοποιούμε ένα χαρτάκι τάρτας (Σχήμα 4, δεξιά), του οποίου μετράμε τη μάζα του με ηλεκτρονικό ζυγό ($m=0,6\text{g}$) και το αφήνουμε να πέσει ελεύθερα από ύψος $H=2\text{m}$. Εκτελούμε τη συλλογή δεδομένων στο περιβάλλον του Logger Pro, οπότε παράγονται τα διαγράμματα θέσης-χρόνου ($y-t$) και ταχύτητας-χρόνου ($v-t$) (Σχήμα 5). Εκτελούμε στη συνέχεια γραμμική προσαρμογή στο διάγραμμα $y-t$, από το μενού του Logger Pro και υπολογίζουμε από την κλίση της ευθείας, την οριακή ταχύτητα $v_{op}=1.3\text{m/s}$ του σώματος.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6) αυτές τις τιμές με δεδομένο ότι $g=9.81\text{m/s}^2$, υπολογίζουμε τη σταθερά b :

$$b = \frac{mg}{v_{op}^2} = 3.5 \times 10^{-3} \text{ Kg/m}$$



Σχήμα 5. Διαγράμματα θέσης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου

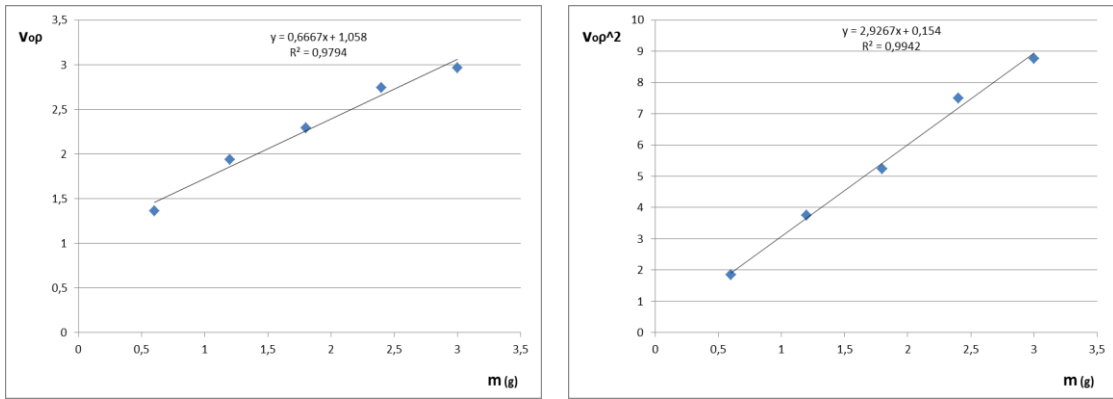


Σχήμα 6. Διαγράμματα θέσης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου για διάφορες μάζες σωμάτων

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία αυξάνοντας τη μάζα του σώματος, προσθέτοντας από 1-4 χαρτάκια τάρτας μέσα στο αρχικό, οπότε υπολογίζουμε την οριακή ταχύτητα v_{op} σε κάθε περίπτωση. Στο Σχήμα 6, έχουμε τα διαγράμματα $y-t$ και $v-t$, που παίρνουμε για κάθε περίπτωση. Στον πίνακα 1, στις δύο πρώτες στήλες του βλέπουμε τις τιμές για τη μάζα του σώματος και την οριακή του ταχύτητα αντίστοιχα. Στην τρίτη στήλη του πίνακα 1, υπολογίσαμε το τετράγωνο της οριακής ταχύτητας. Με τη βοήθεια του Excel, πήραμε τα διαγράμματα $v_{op} - m$ και $v_{op}^2 - m$ (Σχήμα 7), μέσω των οποίων επιβεβαιώνουμε την εξάρτηση της αντίστασης του αέρα από το τετράγωνο της ταχύτητας.

m (g)	v_{op} (m/s)	v_{op}^2 (m/s) ²
0,6	1,36	1,85
1,2	1,94	3,76
1,8	2,29	5,24
2,4	2,74	7,50
3,0	2,96	8,76

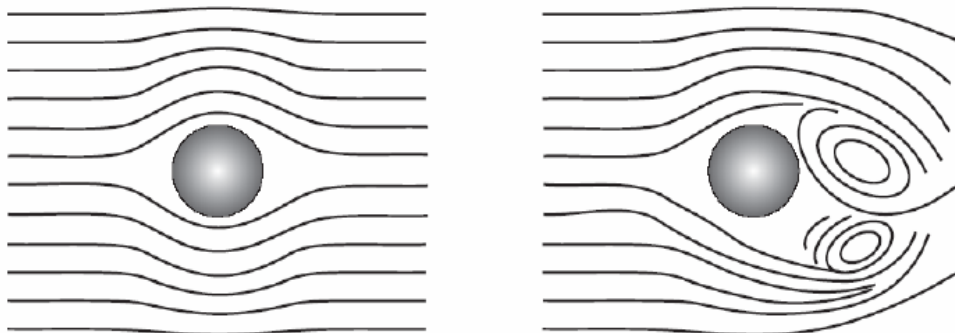
Πίνακας 1.



Σχήμα 7. Διαγράμματα $v_{ορ} - m$ και $v_{ορ}^2 - m$

2η Δραστηριότητα: Μελέτη της πτώσης ενός σώματος σε υγρό

Στα πειράματα αυτά εφαρμόζουμε τη μέθοδο πτώσης μικρών σφαιρών. Αφήνουμε να πέσει στην επιφάνεια του υγρού, χωρίς αρχική ταχύτητα, μια σφαίρα, η οποία αρχικά και μετά την είσοδό της στο υγρό, κινείται επιταχυνόμενη. Θεωρώντας τη ροή του υγρού γύρω από τη σφαίρα στρωτή, ισχύει ο νόμος του Stokes, σύμφωνα με τον οποίο, για σχετικά μικρές ταχύτητες, η δύναμη της τριβής F_D , που δυσχεραίνει την κίνηση του σώματος, είναι ανάλογη της ταχύτητας κίνησης v και ισχύει: $F_D = -bv$, όπου b είναι ένας συντελεστής που εξαρτάται από το ιξώδες η του υγρού και την ακτίνα r της σφαίρας ($b = 6\pi\eta r$).



Σχήμα 8. Στρωτή και τυρβώδης ροή

Στρωτή ροή έχουμε στην περίπτωση κατά την οποία το ρευστό περιβάλλει και ρέει συμμετρικά γύρω από τη σφαίρα. Τα μεμονωμένα στρώματα του ρευστού γλιστρούν το ένα ως προς το άλλο χωρίς να αναμειγνύονται μεταξύ τους. Τυρβώδης ροή έχουμε σε μεγάλες ταχύτητες. Εξαιτίας του σχηματισμού στροβιλισμών το ρευστό αναμειγνύεται (Σχήμα 8).

Όταν ένα σφαιρίδιο τοποθετηθεί εντός ενός υγρού τότε επ’ αυτού ασκούνται τρεις δυνάμεις: η άνωση A , η δύναμη της βαρύτητας B και η οπισθέλκουσα δύναμη τριβής F_D . Το σφαιρίδιο επιταχυνόμενο αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη ταχύτητα όμως παράλληλα αυξάνεται και η τριβή. Κάποια στιγμή επέρχεται ισορροπία των δυνάμεων και το σφαιρίδιο πλέον συνεχίζει την κίνησή του με σταθερή ταχύτητα που ονομάζεται οριακή ταχύτητα, που είναι χαρακτηριστική τόσο για το σώμα όσο και για το ρευστό. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$mg - A - bv = ma \rightarrow (d_\sigma - d_\nu)gV - bv = m \frac{dv}{dt} \rightarrow mg \left(1 - \frac{d_\nu}{d_\sigma}\right) - bv = m \frac{dv}{dt} \quad (7)$$

όπου d_σ, d_ν , οι πυκνότητες της σφαίρας και του υγρού αντίστοιχα. Αν στη σχέση (7) θέσουμε: $g_\varphi = g \left(1 - \frac{d_\nu}{d_\sigma}\right)$, όπου g_φ , η φαινόμενη επιτάχυνση βαρύτητας, παίρνουμε:

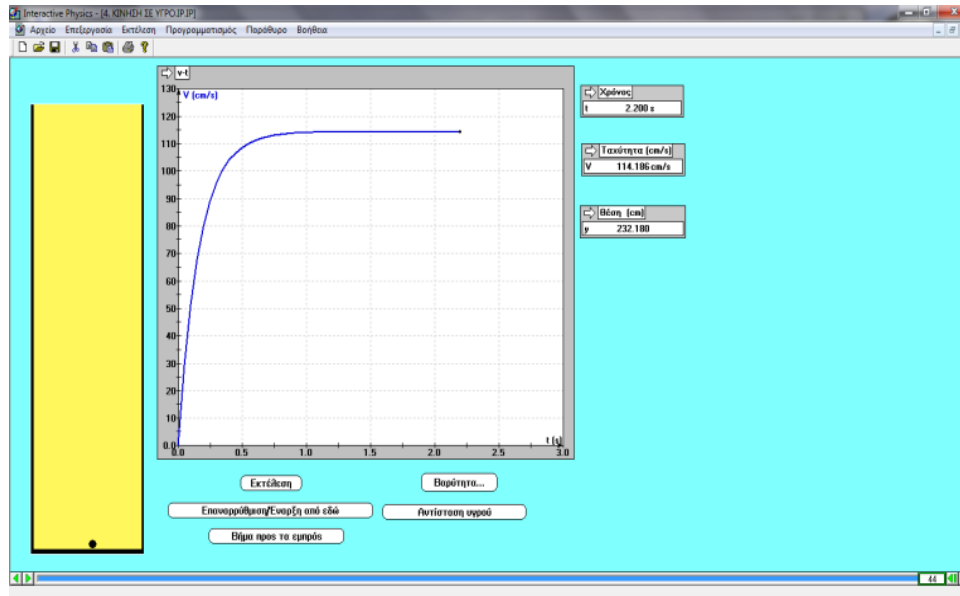
$$mg_{\varphi} - bu = m \frac{dv}{dt} \quad (8)$$

που είναι η Δ.Ε. του προβλήματος. Η λύση αυτής της Δ.Ε. που προκύπτει είναι:

$$v = v_{op}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (9)$$

όπου ο συντελεστής $\tau = m/b$, έχει διαστάσεις χρόνου και καλείται χρόνος αποκατάστασης, κατά τον οποίον η ταχύτητα έχει αποκτήσει περίπου το 60% της τελικής, οριακής της τιμής. Όταν το σώμα αποκτήσει οριακή ταχύτητα v_{op} , η επιτάχυνση μηδενίζεται οπότε από τη σχέση (7) μπορούμε να την υπολογίσουμε:

$$v_{op} = \frac{(d_{\sigma} - d_{\nu})gV}{b} \quad (10)$$



Σχήμα 9. Προσομοίωση κίνησης σφαίρας σε υγρό

Με τη βοήθεια της προσομοίωσης που δημιουργήθηκε με χρήση του λογισμικού I.P. (Σχήμα 9), παίρνουμε τις τιμές: $m=0,1\text{Kg}$ (μάζα σφαιριδίου), $r=2\text{cm}$ (ακτίνα σφαιριδίου), $g=9,81\text{m/s}^2$, $v_{op} = 1,14\text{m/s}$, $d_{\nu} = 900 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ (πυκνότητα λαδιού).

Υπολογίζουμε αρχικά τον όγκο του σφαιριδίου: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 33,51 \cdot 10^{-6}\text{m}^3$

και ακολούθως την πυκνότητα του σφαιριδίου: $d_{\sigma} = \frac{m}{V} = 2984 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ (αλουμίνιο).

Αντικαθιστώντας στη σχέση (10), υπολογίζουμε το συντελεστή b :

$$b = \frac{(d_{\sigma} - d_{\nu})gV}{v_{op}} = 0,6\text{Kg/m}$$

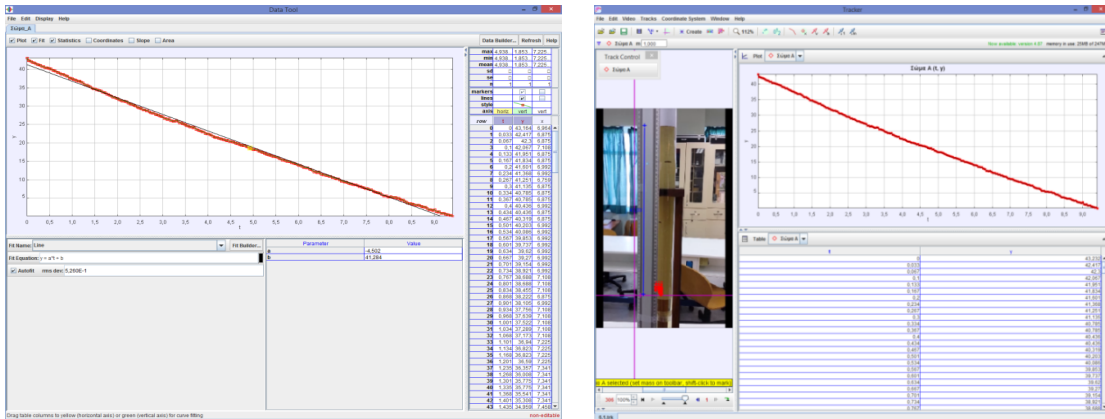
Πειράματα κίνησης σφαιριδίου σε παραφινέλαιο και νερό

Με τη βοήθεια του λογισμικού ανάλυσης video Tracker μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός σφαιριδίου σε παραφινέλαιο. Με ηλεκτρονικό ζυγό και παχύμετρο μετρήσαμε τη μάζα και τη διάμετρο του σφαιριδίου αντίστοιχα:

$$m = 0,26 \text{ g} \quad \text{και} \quad \delta = 3,85\text{mm}.$$

Υπολογίζουμε τον όγκο και την πυκνότητά του σφαιριδίου:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi \delta^3}{6} = 29,88 \cdot 10^{-9}\text{m}^3, \quad d_{\sigma} = \frac{m}{V} = 8701 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \quad (\text{χαλκός})$$



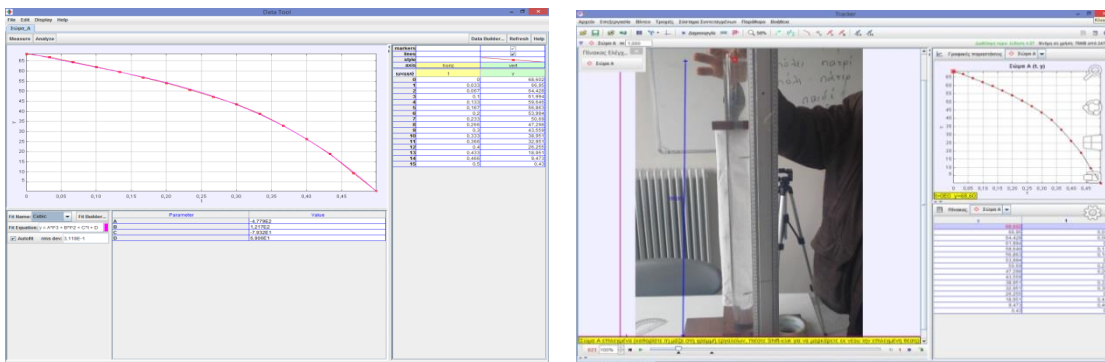
Σχήμα 10. Επεξεργασία video με την κίνηση σφαίρας σε παραφινέλαιο

Η πυκνότητα του παραφινέλαιου είναι: $d_v = 800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

Στο Σχήμα 10 (αριστερά), βλέπουμε τον πίνακα με τις πειραματικές τιμές και το διάγραμμα y-t που παίρνουμε, αφήνοντας το σφαιρίδιο ελεύθερο να κινηθεί από την επιφάνεια του υγρού στο σωλήνα. Με περαιτέρω επεξεργασία της γραφικής παράστασης y-t, με τη διαδικασία προσαρμογής (Σχήμα 10, δεξιά), καταλήγουμε στην ευθεία $y = At + B$, που προσεγγίζει τα πειραματικά μας δεδομένα. Διαβάζουμε το συντελεστή $A = -4.502$, που αντιστοιχεί κατ' απόλυτη τιμή στην οριακή ταχύτητα v_{op} . Αντικαθιστώντας στη σχέση (10), υπολογίζουμε το συντελεστή b:

$$b = \frac{(d_\sigma - d_v)gV}{v_{op}} = 5,15 \cdot 10^{-2} \text{Kg/m}$$

Τέλος, εκτελούμε το προηγούμενο πείραμα μόνο που το σωλήνα γεμίζουμε με νερό αντί για παραφινέλαιο, οπότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία (Σχήμα 11), παρατηρούμε ότι το σφαιρίδιο δεν προλαβαίνει να αποκτήσει οριακή ταχύτητα στο συγκεκριμένο ύψος της στήλης του νερού. Αυτό οφείλεται στη μικρή τιμή του ιξώδους που έχει το νερό σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή του παραφινέλαιου.



Σχήμα 11. Επεξεργασία video με την κίνηση σφαίρας σε νερό

Υπολογισμός εμβαδού χωρίου κάτω από καμπύλη-Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

Το καθεστώς των απεικονίσεων στα μαθηματικά ποικίλει από καιρό σε καιρό. Ο Mancosu επισημαίνει ότι κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα η οπτική σκέψη απαξιώθηκε. Ο λόγος ήταν ότι μαθηματικοί ισχυρισμοί που φαίνονταν προφανείς από την άποψη της διαισθητικής και άμεσης απεικόνισης αποδείχτηκαν εσφαλμένοι όταν χρησιμοποιήθηκαν νέες μαθηματικές μέθοδοι. Παρόλα αυτά, η ανάπτυξη των τεχνικών απεικόνισης στην επιστήμη των υπολογιστών, στα μέσα του 20ου αιώνα, βοήθησε στην αποκατάσταση της οπτικής σκέψης στην επιστημολογία των Μαθηματικών (Mancosu, 2005).

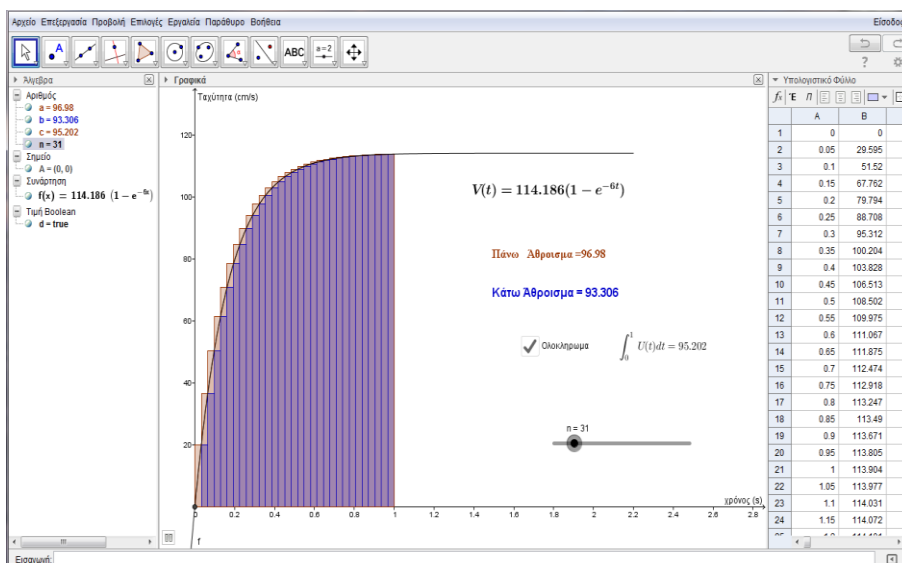
Η ερευνητική βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι η έννοια του ολοκληρώματος είναι μια δύσκολη προς κατανόηση έννοια από τους μαθητές (Paschos et al., 2006). Ειδικότερα, δυσκολεύονται στη σύνδεση της έννοιας του ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος γεγονός που επιφέρει έλλειψη της κατανόησης των θεωρημάτων του ολοκληρωτικού λογισμού (Tall et al., 1981; Schwingendorf et al., 1990; Drijvers et al., 2010; Dubinsky et al., 1991).

Με την εκπόνηση κατάλληλα σχεδιασμένων δραστηριοτήτων στο περιβάλλον Geogebra, προτείνεται μια άλλη προσέγγιση της έννοιας του ολοκληρώματος με σκοπό την υπέρβαση των δυσκολιών που αναπόφευκτα επιφέρει ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας. Οι δραστηριότητες θα εκτελεστούν από τους μαθητές, οι οποίοι θα στοχαστούν πάνω στις μετρήσεις και φαινόμενα που ο εκπαιδευτής δημιουργεί, καθώς χειρίζεται τα αρχεία λογισμικού που έχει προετοιμάσει. Οι μαθητές θα ενθαρρυνθούν από το διδάσκοντα να ακολουθήσουν τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων, προκρινόμενοι να έχουν και μια αίσθηση της σημασίας των αποτελεσμάτων της διερεύνησής τους (Borasi, 1992).

Η γεωμετρική ερμηνεία του $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ μια συνεχούς και μη αρνητικής συνάρτησης f σε διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, μας επιτρέπει την οπτικοποίηση θεωρημάτων πετυχαίνοντας τη βαθύτερη κατανόηση τους βασισμένη στην οπτική σκέψη (Τουμάσης, 2005).

1η Δραστηριότητα: Υπολογισμός διανυθείσας απόστασης

Αρχικά διατυπώνεται στους μαθητές το πρόβλημα υπολογισμού του διαστήματος που διανύει ένα σώμα κατά την κίνησή του σε υγρό μέχρι να αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα.



Σχήμα 12. Άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων

Αντιλαμβάνονται ότι η λύση βασίζεται στη μέτρηση του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χρόνων και τις κατακόρυφες ευθείες $t=0$ και $t=\alpha$ (Σχήμα 10).

Με τη βοήθεια του αρχείου "Άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων" του Geogebra (Σχήμα 12), οι μαθητές θα:

- γνωρίσουν και θα εφαρμόσουν τη μέθοδο «εξάντλησης» (Εύδοξος 408-355 π.Χ.) για τον υπολογισμό εμβαδών επιπέδων χωρίων,
- έχουν τη δυνατότητα να ασχοληθούν με διαδικασίες μοντελοποίησης και να συνδέσουν ένα φυσικό φαινόμενο με τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό,
- κατανοήσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα ως μια οριακή διαδικασία.

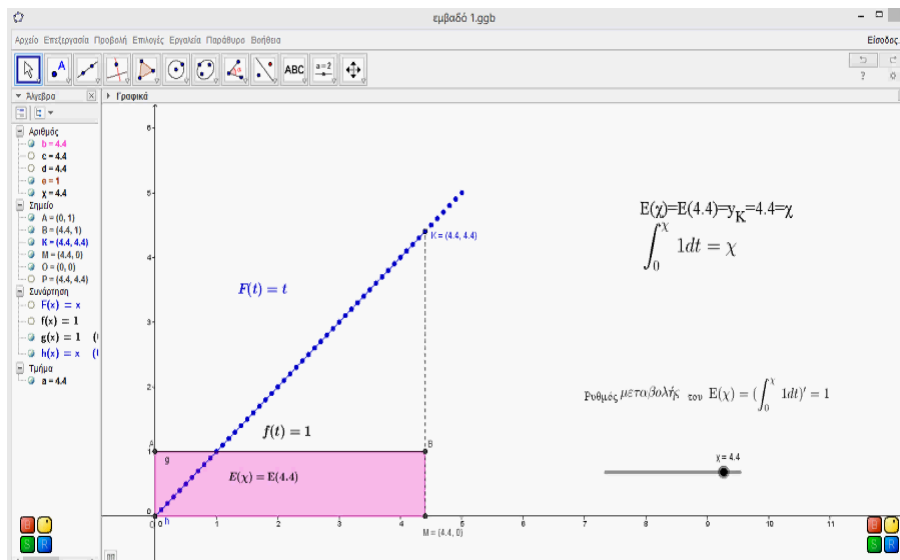
2η Δραστηριότητα: Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Επισημαίνοντας στους μαθητές την επίπονη, χρονοβόρα και ανιαρή διαδικασία υπολογισμού πάνω και κάτω μερικών αθροισμάτων εμβαδών ορθογωνίων αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα εύρεσης ενός εργαλείου που μας απαλλάσσει από αυτή.

Για την επίτευξη του στόχου μας, οι μαθητές καθοδηγούμενοι θα εμπλακούν σε δραστηριότητες διερεύνησης σχεδιασμένες στο δυναμικό περιβάλλον του Geogebra. Όπως φαίνεται στα σχήματα 13, 14 και 15 γίνεται παράλληλη χάραξη των γραφικών παραστάσεων των ζευγών των συναρτήσεων :

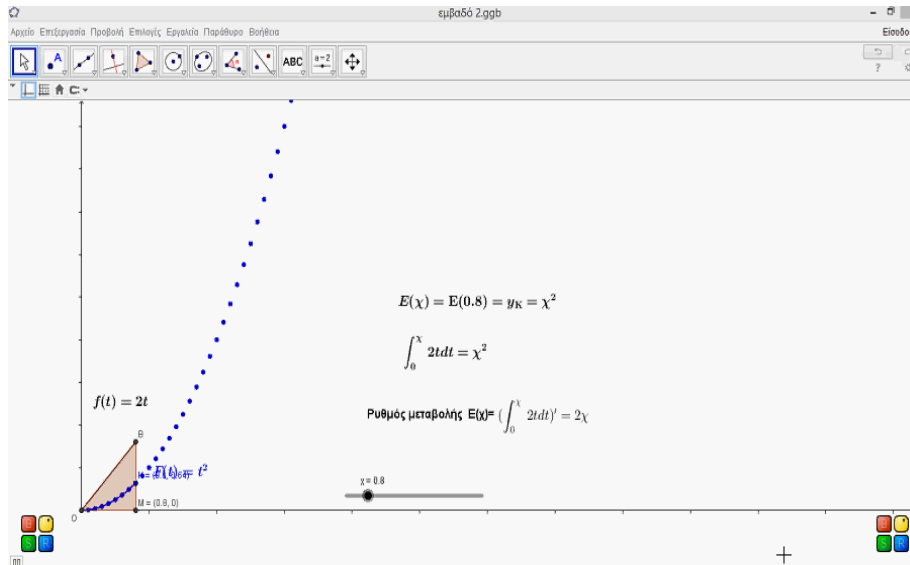
- $f(t) = 1, F(x) = \int_a^x 1dt$
- $f(t) = 2t, F(x) = \int_a^x 2tdt$
- $f(t) = t^2, F(x) = \int_a^x t^2dt$

καθώς και της γραμμής που κινείται το σημείο K με τετμημένη το δεξιό άκρο του χωρίου και τεταγμένη το αντίστοιχο εμβαδόν του. Προς διευκόλυνση της παραπάνω διερεύνησης υποθέτουμε ότι η f είναι μη αρνητική συνάρτηση.

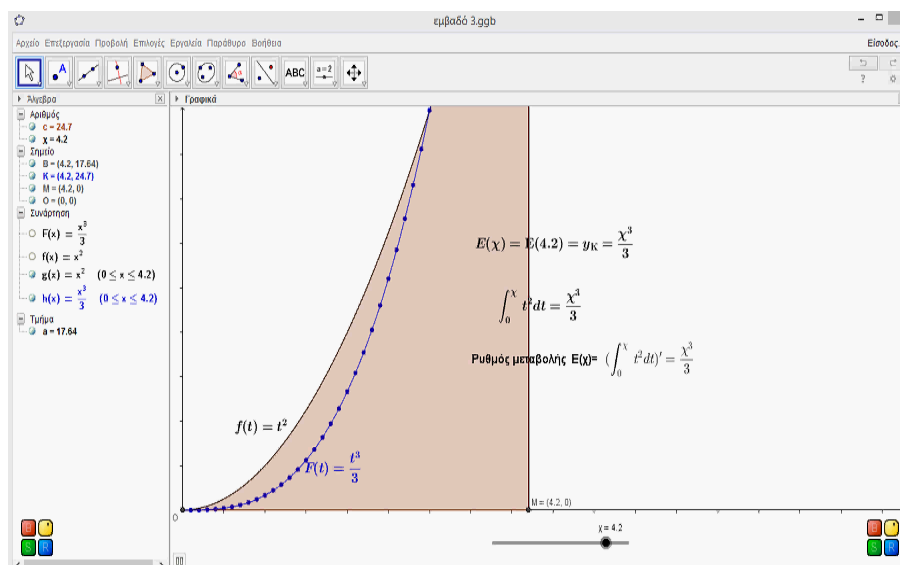


Σχήμα 13. Οι συναρτήσεις $f(t) = 1, F(x) = \int_a^x 1dt$

Με τη διεξαγωγή των παραπάνω δραστηριοτήτων επιχειρείται:



Σχήμα 14. Οι συναρτήσεις $f(t) = 2t$, $F(x) = \int_a^x 2tdt$



Σχήμα 15. Οι συναρτήσεις $f(t) = t^2$, $F(x) = \int_a^x t^2 dt$

1. Διερεύνηση της γεωμετρικής διασύνδεσης μεταξύ των συναρτήσεων $f(t)$ και $F(x)$ προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν ότι:

- η $F(x)$ εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της $f(t)$, του άξονα x' και των ευθειών $t=a$ και $t=x$,
- κάθε συνεχής συνάρτηση είναι η παράγωγος μιας άλλης, δηλαδή της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,
- οι διαδικασίες παραγωγίσισης και ολοκλήρωσης είναι αντίστροφες η μία της άλλης.

2. Διαισθητική θεμελίωση της σχέσης: $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x)$, η οποία με τη σειρά της θα οδηγήσει στην αυστηρή απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Συμπεράσματα

Κατά την υλοποίηση των παραπάνω δραστηριοτήτων, στα πλαίσια διερευνητικής εργασίας αλλά και κατά τη διδασκαλία στην τάξη, δόθηκε στους μαθητές η δυνατότητα να εργαστούν σε ένα διερευνητικό περιβάλλον πετυχαίνοντας ένα συνδυασμό στόχων, μεταξύ των οποίων είναι αξιοσημείωτη η ενεργοποίηση, εμπλοκή και συμβολή των μαθητών στην οικοδόμηση και κατανόηση βασικών εννοιών, το πέρασμα από το αρχικό διαισθητικό πλαίσιο, στο οργανωμένο επιστημονικά, η ερμηνεία των φαινομένων της καθημερινής ζωής με τη βοήθεια των επιστημονικών μοντέλων καθώς και το κλίμα συνεργασίας που δημιουργήθηκε, τόσο μεταξύ των μαθητών, όσο και μεταξύ των καθηγητών.

Βάσει των αποτελεσμάτων στα οποία κατέληξαν οι μαθητές με τις πειραματικές μετρήσεις που έλαβαν καθώς και με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η χρήση της παραβολικής σχέσης $F_D = -bv^2$, για τη μελέτη της κίνησης σωμάτων στον αέρα και της γραμμικής $F_D = -bv$ (νόμος του Stokes), για τη μελέτη της κίνησης πολύ μικρών σωμάτων σε υγρό επαληθεύονται σε μεγάλο βαθμό. Οι μαθητές κατανόησαν πληρέστερα το φαινόμενο της πτώσης σώματος, όπως επίσης αναδείχθηκε και η απόκλιση που παρουσιάζεται στις πειραματικές μετρήσεις, όπου οι συνθήκες δεν είναι ιδανικές, σε σχέση με τη θεωρία.

Στα πλαίσια της διδακτικής πρότασης διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών αποδεικνύεται η δύναμη των γεωμετρικών αναπαραστάσεων (Al-Fedaghi, 2013) για την αισθητοποίηση της διασύνδεσης μεταξύ των διαδικασιών παραγωγής και ολοκλήρωσης και εισαγωγής νέων εννοιών και προτάσεων. Επιπλέον, αναδεικνύεται η συμβολή των εργαλείων, που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους, στη διαμόρφωση από τους μαθητές υψηλότερου επιπέδου γνωστικών λειτουργιών συλλογισμού (Schwarz et al 1998) δίνοντάς τους τη δυνατότητα να κάνουν πειράματα, να διερευνούν με τη βοήθεια των μεταβολών, να επαναπροσδιορίζουν, να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις και να διατυπώνουν υποθέσεις με χρήση επιστημονικών όρων.

Από την εργασία αυτή, ενισχύεται η άποψη ότι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσω φαινομένων της Φυσικής είναι πληρέστερη και δίνει καλύτερη γνώση. Επίσης, κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική η δυνατότητα εφαρμογής τέτοιων διεπιστημονικών προσεγγίσεων, στα πλαίσια του σχολικού προγράμματος σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, και η διευκόλυνση μέσα από το ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου. Ευχόμαστε να συνεχιστούν αυτές οι πρωτοβουλίες, ώστε να δημιουργηθούν ευνοϊκότερες συνθήκες μάθησης.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Orfanos S. & Dimitracopoulou A. (2003). Technology based modelling activities in learning concepts relations in kinematics.
- Benaca, J. (2010). High-altitude free fall revised, *Am. J. Phys.*, 78 (6), 616-619.
- Borasi, R. (1991). *Learning mathematics through enquiry*. Heinemann Educational Books.
- Timmerman, P., & van der Weele, J. (1999). On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag. *Am. J. Phys.*, 67 (6), 538-546.
- Escalada L. T., Grabhorn, R. & Zollman D. (1996), Applications of interactive digital video in a physics classroom, *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia* 5, 73-97.
- Douglas Brown (29 July 2009), Video Modeling with Tracker.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition. Published in *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169, (1981).
- Schwingendorf, K., & Dubinsky, E. (1990). Calculus, concepts and computers Innovations for learning calculus. In T. Tucker (Ed.), *Priming the Pump: Innovations and Resources*(MAA

- Notes Series, No. 17) (pp. 175–198). Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Paul Drijvers, Carolyn Kieran, and Maria-Alessandra Mariotti (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. Springer Science + Business Media, LLC 2010.
- Dubinsky, E. & Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. Published in Tall D. O. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, 231–248 (1991).
- Phillips, R. (1997). The developer's handbook to interactive multimedia. London: Kogan Page.
- Mancosu, P. (2005). Visualization in logic and Mathematics. *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, 13-30. © 2005 Springer.
- Al-Fedaghi, S. (2013). Enriched Diagrammatic Representation for Resolution, © 2013 Published by Elsevier B.V. Selection and/or peer-review under responsibility of the Program Committee of IES20.
- Doerr H., (1997). Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force. *Int. Journal of science Education* 19, 3, 265 . 282.
- Paschos, T. & Farmaki, V. (2006). The Reflective abstraction in the construction of the concept of the Definite Integral. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 337-344. Prague: PME. 4 - 337
- Widolo, A., Duit, R. & Muller, C. (2002). Constructivist views of teaching and learning in practice: teachers' views and classroom behavior, Paper presented at the Annual meeting of the national Association for Research in Science Teaching, New Orleans.
- Ιωάννης Σιανούδης (2001), Πειράματα Φυσικής με χρήση PC: «Πτώση σώματος: Προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας», *Φυσικός Κόσμος*, τεύχος 3, σ. 45.
- Βαλασιάδης, Ο., Δημητρακόπουλος, Γ., Δημητριάδης, Χ., Ευαγγελινός, Ι., Παλούρα, Ε., Πολάτογλου, Χ., Σαμαράς, Ι., Χατζηκρανιώτης, Ε., Χρυσάφης, Κ., & Ψύλλος, Ι. (2011). Σημειώσεις Μεθοδολογίας Μετρήσεων και Εφαρμογών της Πειραματικής Φυσικής, Α.Π.Θ., 107-109.
- Παπαμιχαήλ, Γ. (1988). Μάθηση και κοινωνία. Η εκπαίδευση στις θεωρίες της μάθησης. Οδυσσέας, Αθήνα.
- Μπαρκάτσας, Αν. (2004). Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας.
- Μουρούζης, Π. (1999). Εργαστηριακές Δραστηριότητες Φυσικής, Κέρκυρα.
- Ντρίζος, Δ. (2007). Δοκίμια Διδακτικής με Θέματα Ανάλυσης.
- Μαθηματικά με το Geogebra. ΥΠΕΠΘ/Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Επιχειρησιακό πρόγραμμα "Κοινωνία της Πληροφορίας".
- Τουμάσης, Μ. (2005). Πως να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών.
- Θεοχάρης, Δ. (2012). Η σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ της φυσικής και των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, Αθήνα.
- Vernier LabPro User's Manual
Introduction to Geogebra Version 4.4
www.design-simulation.com/documents/ip/ipnewfeatures.pdf

Ευσταθίου, Α., Σφαέλος, Ι., Φύττας, Γ., (2014). Πτώση σωμάτων σε διαφορετικά περιβάλλοντα – Θεμελιώδες θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού. *Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών: Έρευνα και Πράξη*, (50-51). Ανακτήθηκε από <http://www.lib.uoi.gr/serp/>