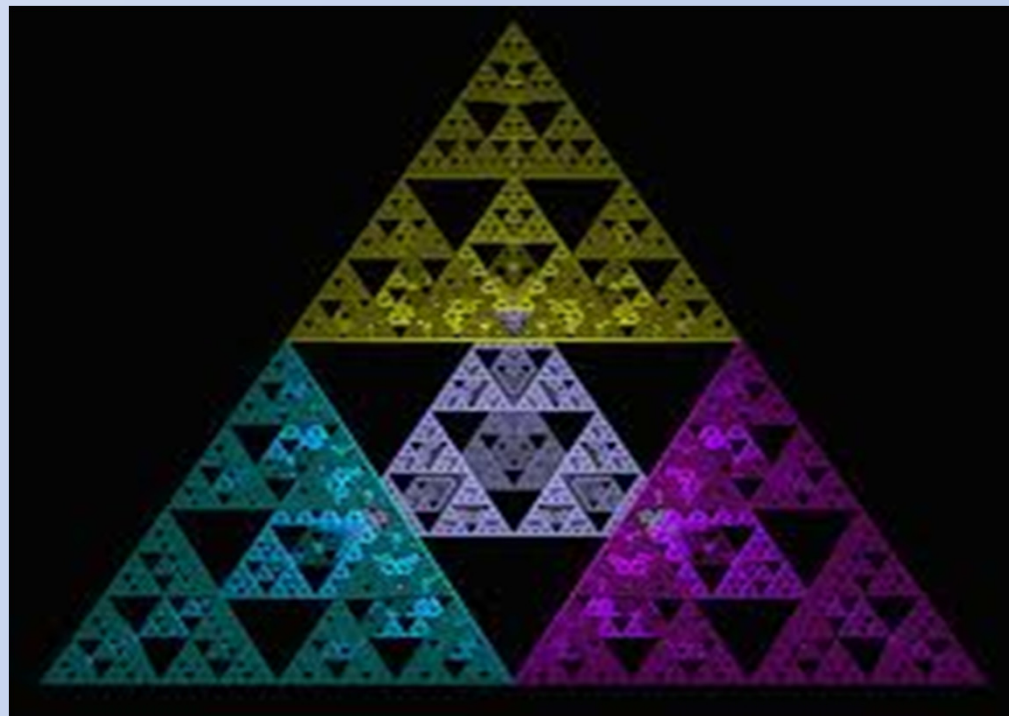


# *Κατασκευή μαθηματικών fractals*



**ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ – ΣΦΑΕΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**

# 1. Η καμπύλη του Koch

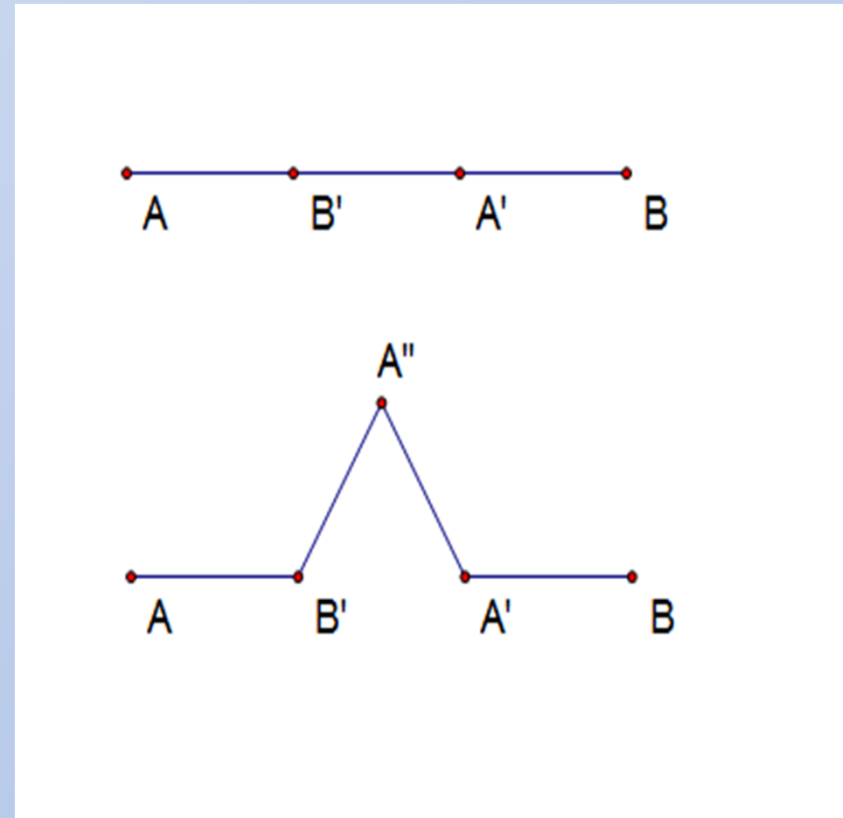
Η καμπύλη του **Koch** ή **Νησί του Koch** ή **χιονονιφάδα του Koch** περιγράφηκε για πρώτη φορά από το Σουηδό μαθηματικό *Helge von Koch* το 1904, πολύ πριν την ύπαρξη του κλάδου των μαθηματικών που ονομάζεται «γεωμετρία των φράκταλ». Ο Koch μελέτησε την καμπύλη αποδεικνύοντας ότι:

**«Μια καμπύλη που καταλαμβάνει πεπερασμένο χώρο μπορεί να έχει άπειρο μήκος»**

# Κατανόηση της καμπύλης του Koch.

Η λειτουργία της έχει ως εξής:

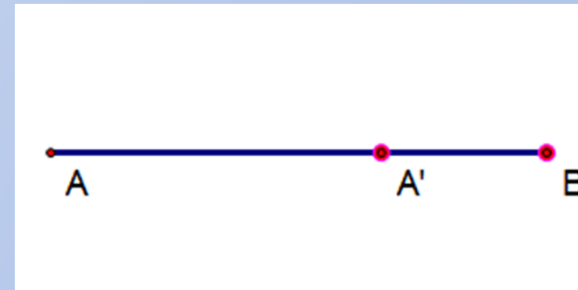
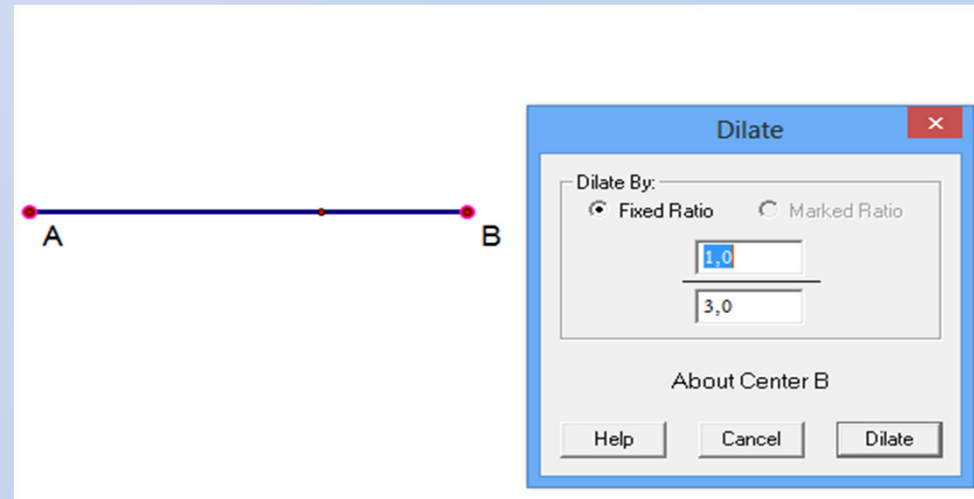
- Αρχίζουμε με δύο σημεία
- Ενώνουμε τα σημεία αυτά με ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο το χωρίζουμε σε τρία ίσα μέρη.
- Αφαιρούμε το μεσαίο **1/3** και
- Κατασκευάζουμε τις επάνω δύο πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου πάνω από το τμήμα που αφαιρέθηκε.
- Κάνουμε το ίδιο για καθένα από τα τέσσερα τμήματα που δημιουργήθηκαν.



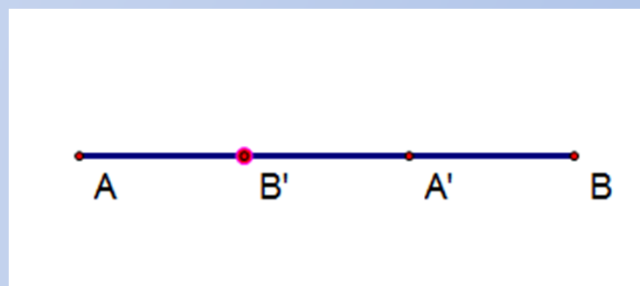
## Βήματα κατασκευής του γεννήτορα της νιφάδας του Koch

- Με το εργαλείο **σχεδίασης τμήματος** και πατημένο το πλήκτρο *Shift* κατασκευάζουμε ένα οριζόντιο τμήμα **AB** από αριστερά προς τα δεξιά.
- Επιλέγουμε το σημείο **B** και χρησιμοποιούμε την εντολή **Επιλογή κέντρου** από το μενού **Μετασχηματισμός**.
- Επιλέγουμε το σημείο **A** και με την εντολή **Αυξομείωση** από το μενού **Μετασχηματισμός**, συμπληρώνουμε το παράθυρο διαλόγου όπως φαίνεται ακολούθως:

*Κατασκευή του σημείου **A'** που απέχει από το **B** το  $\frac{1}{3}$  της απόστασης του **B** από το **A**.*

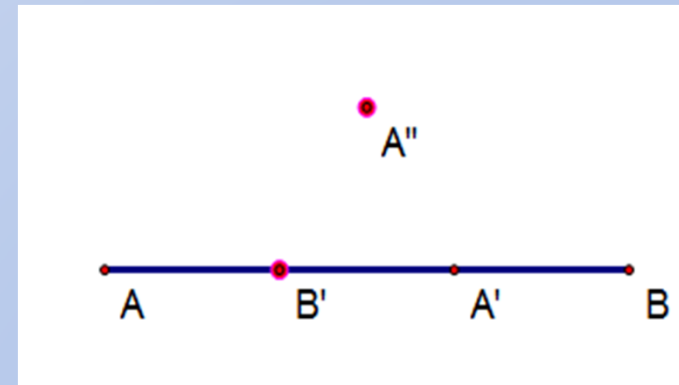


- Επιλέγουμε το σημείο **A** ως κέντρο ως προς το οποίο θα γίνει η αυξομείωση με αποτέλεσμα τη δημιουργία του σημείου **B'** που απέχει το **1/3** της απόστασης του **B** από το **A**, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται παρακάτω:

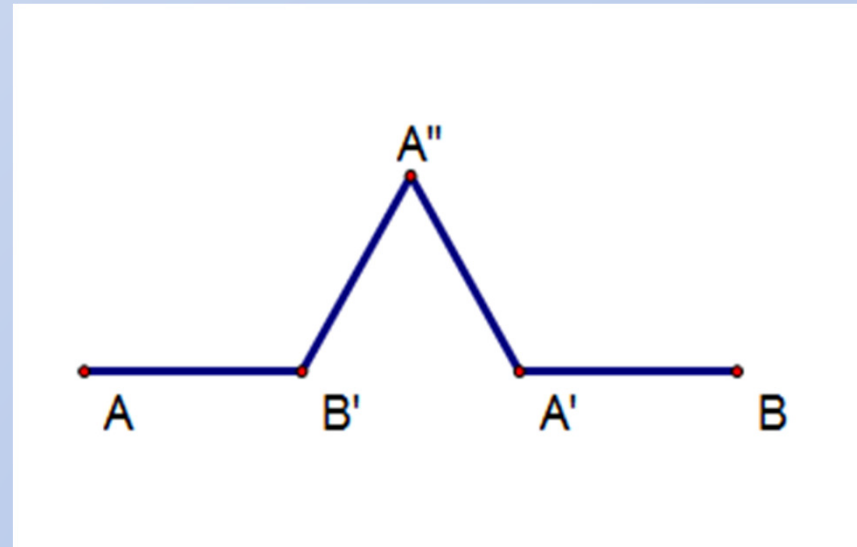


## Αφαίρεση του ενδιάμεσου τμήματος $B'A'$

- Αρχικά επιλέγουμε το σημείο  $B'$  ως κέντρο.
- Διατηρώντας επιλεγμένο το  $B'$ , επιλέγουμε το σημείο  $A'$  και χρησιμοποιούμε την εντολή **Περιστροφή** από το μενού **Μετασχηματισμός**.
- Στο πλαίσιο διαλόγου πληκτρολογούμε τη γωνία **60,0 μοίρες**.



- Αποκρύπτουμε το τμήμα **AB** και με το εργαλείο σχεδίασης τμήματος ενώνουμε τα πέντε σημεία που έχουν δημιουργηθεί, κατασκευάζοντας έτσι το γεννήτορα της νιφάδας του **Koch**.





## Κάποιες παρατηρήσεις πριν προχωρήσουμε περισσότερο:

- Ισχύει ότι  $\mathbf{AB}' = \mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{1/3 AB}$  και  $\mathbf{B}'\mathbf{A}'' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$  (προέκυψε από περιστροφή).  
Επομένως το τρίγωνο  $\mathbf{B}'\mathbf{A}''\mathbf{A}'$  είναι ισόπλευρο.
- Το μήκος της γραμμής είναι  $\mathbf{4 \cdot AB/3}$ .

## Εκτέλεση επαναληπτικής διαδικασίας

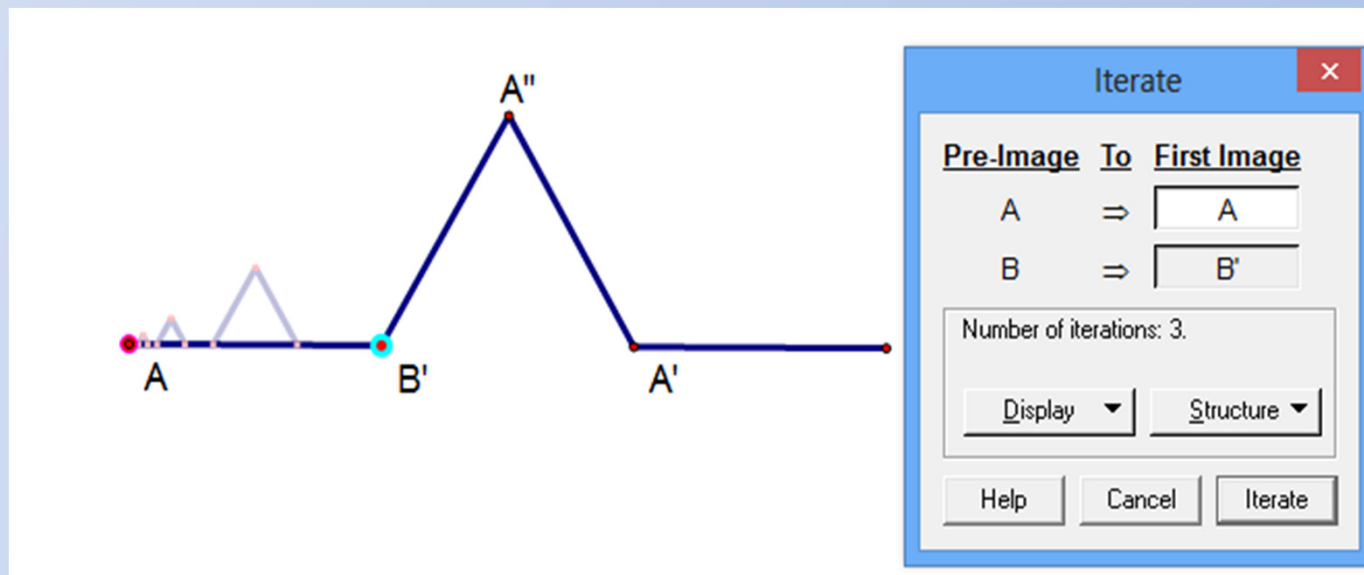
Το **Skecthrad** δεν μπορεί να εκτελεί μια επαναληπτική διαδικασία άπειρες φορές, αλλά μπορεί να την εφαρμόσει σε αρκετό βάθος ώστε να επιτευχθεί μια λεπτομερής προσέγγιση της καμπύλης **Koch**.

Τη διαδικασία που εφαρμόσαμε στο **AB** θα εφαρμόσουμε και στα **AB'**, **B'A''**, **A''A'**, **A'B**.

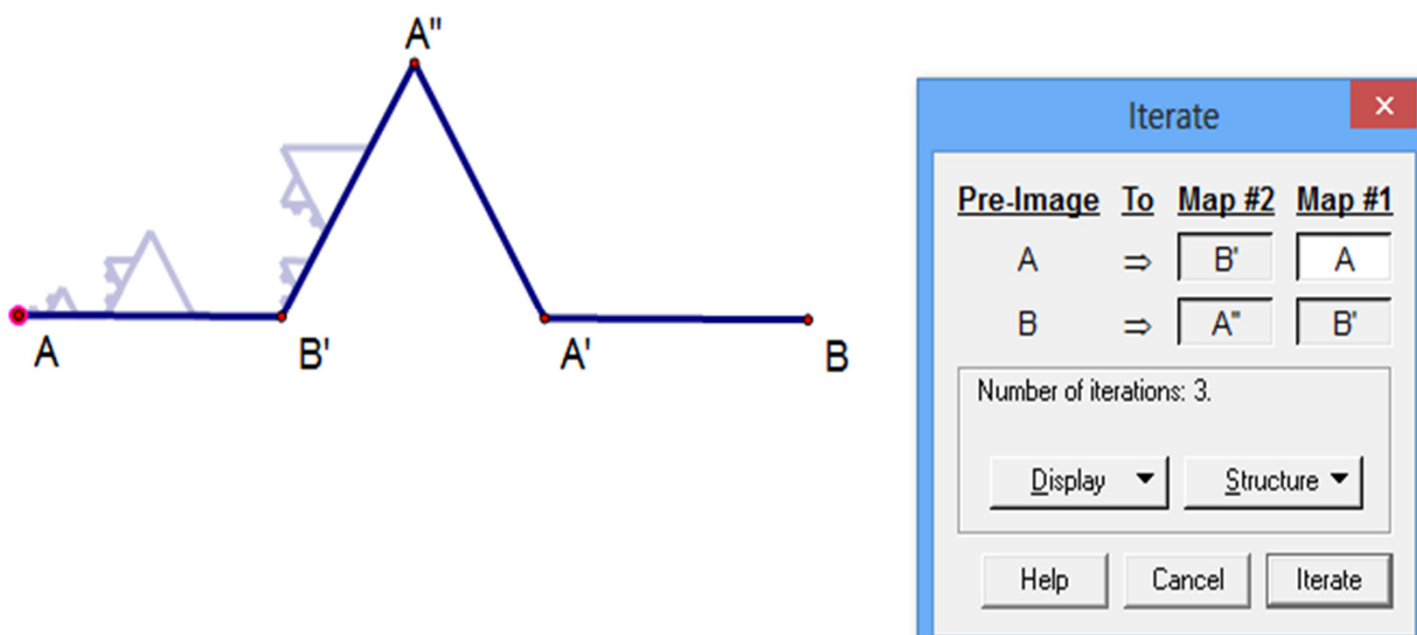
# Βήματα εκτέλεσης

- Επιλέγουμε τα σημεία **A** και **B** και την εντολή **Επανάληψη** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

Συμπληρώνουμε το πλαίσιο διαλόγου που αναδύεται όπως φαίνεται παρακάτω.



- Επιλέγουμε την εντολή **Προσθήκη νέου χάρτη αντιστοίχισης** από το μενού **Δομή** στο πλαίσιο διαλόγου **Επανάληψη**.



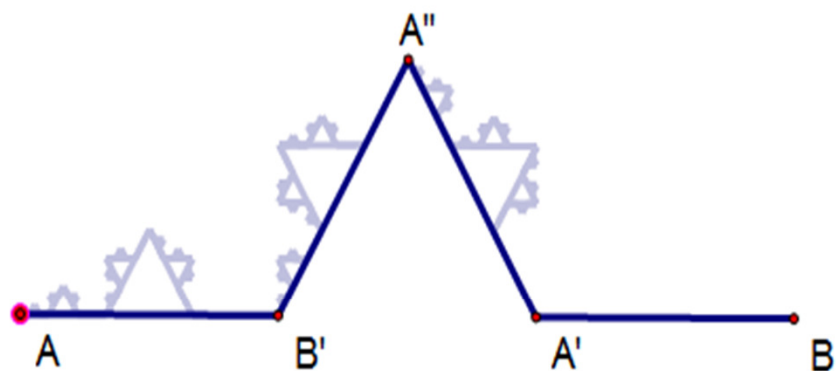
The diagram shows a path starting at point A, moving to B', then to A'', and finally to B. A triangle is formed by points A'', B', and A'. The path is shown in blue, and the triangle is shown in light blue. The dialog box 'Iterate' is open, showing the mapping of points A and B to B' and A'' respectively. The dialog box also shows the number of iterations (3) and buttons for Display, Structure, Help, Cancel, and Iterate.

Pre-Image	To	Map #2	Map #1
A	=>	B'	A
B	=>	A''	B'

Number of iterations: 3.

Display Structure

Help Cancel Iterate



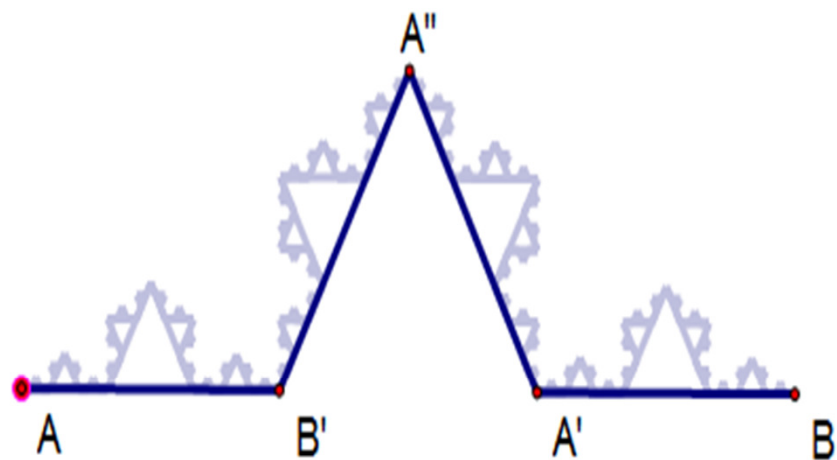
Iterate ×

Pre-Image	To	Map #3	Map #2	Map #1
A	⇒	A''	B'	A
B	⇒	A'	A''	B'

Number of iterations: 3.

Display ▼
Structure ▼

Help
Cancel
Iterate



Iterate ✕

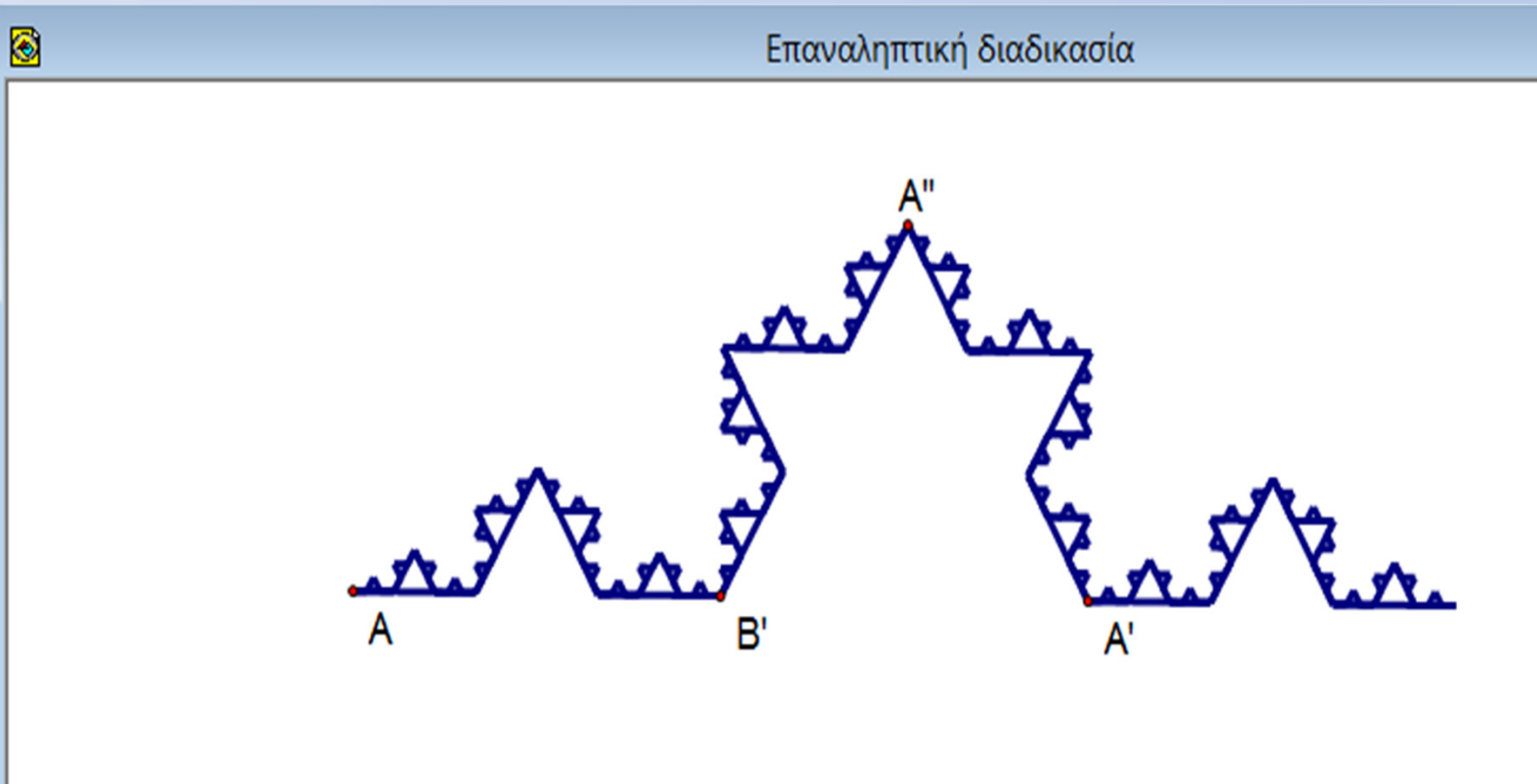
Pre-Image	To	Map #4	Map #3	Map #2	Map #1
A	⇒	A'	A''	B'	A
B	⇒	B	A'	A''	B'

Number of iterations: 3.

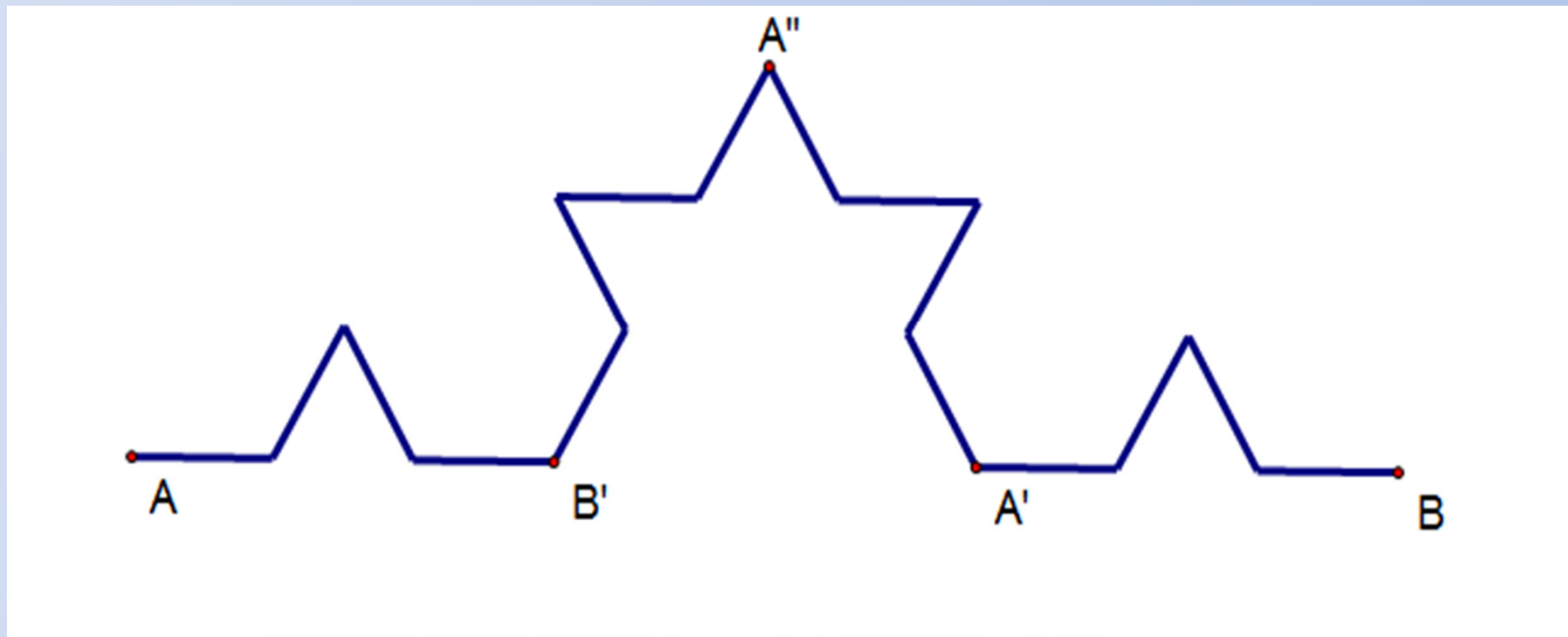
Display ▾
Structure ▾

Help
Cancel
Iterate

- *Αποκρύπτουμε τα τέσσερα αρχικά τμήματα και έχουμε μια προσέγγιση της καμπύλης με επαναληπτική διαδικασία.*

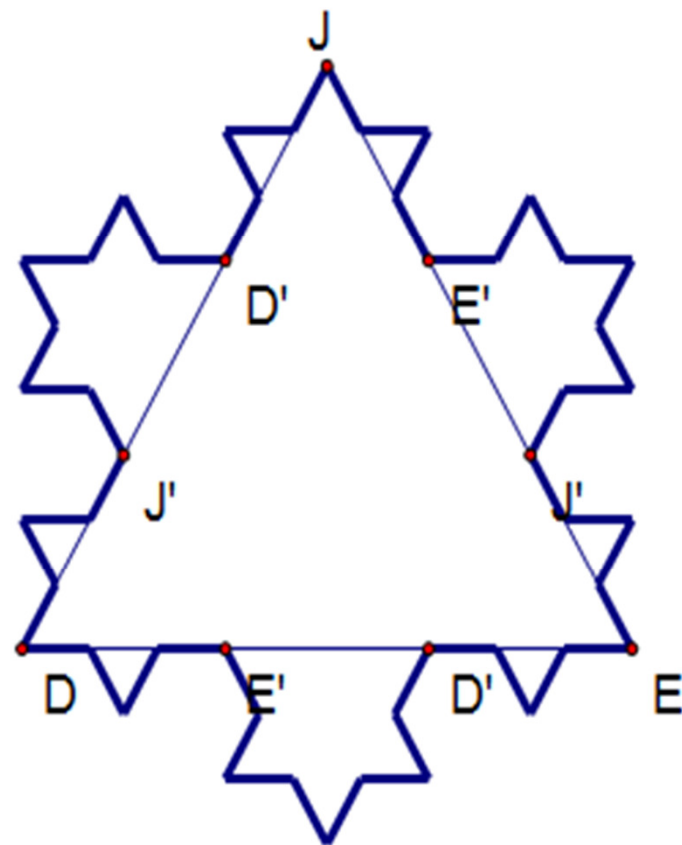
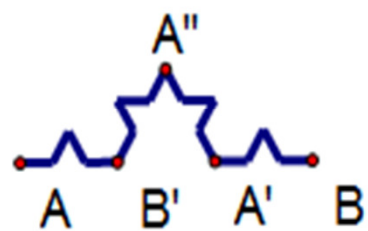


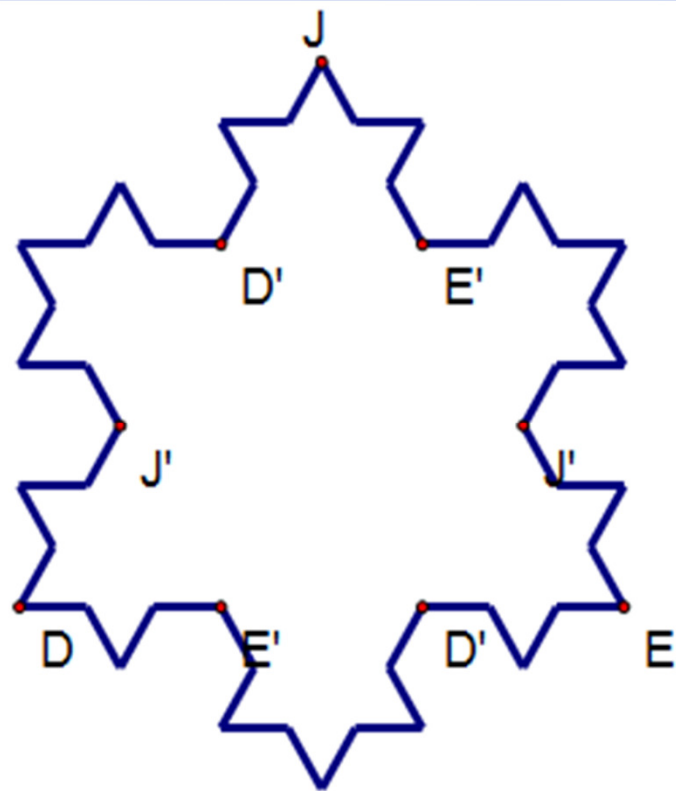
Επιλέγουμε ολόκληρο το σχήμα και με τα πλήκτρα +/- αυξάνουμε ή μειώνουμε τον αριθμό των επαναλήψεων αντίστοιχα. Κατά τη μείωση θα φτάσουμε σε ένα επίπεδο που δεν μπορούμε να μειώσουμε άλλο (**Βάθος 1**), όπως φαίνεται ακολούθως:





Επαναληπτική διαδικασία



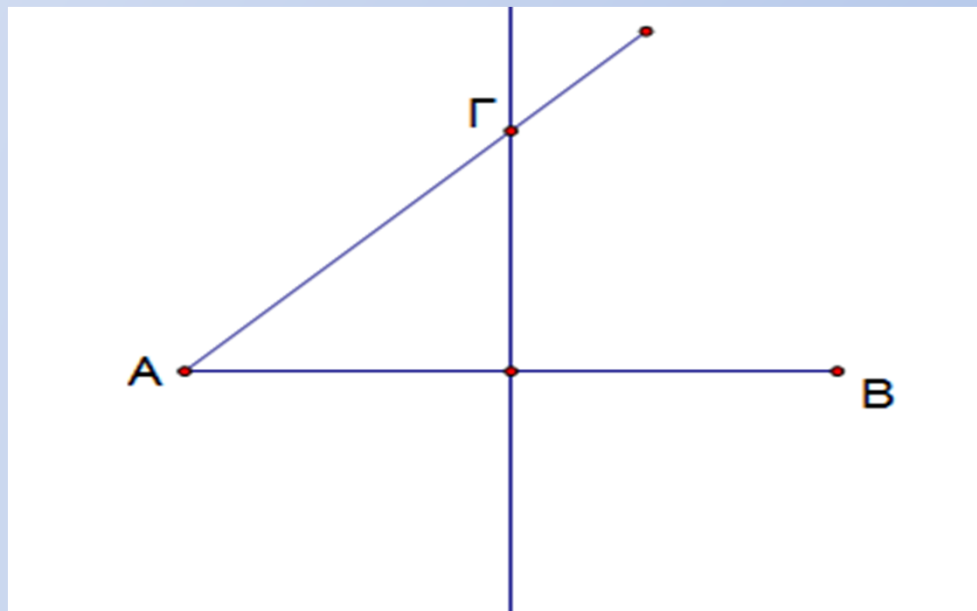


## 2. Η καμπύλη του Levy

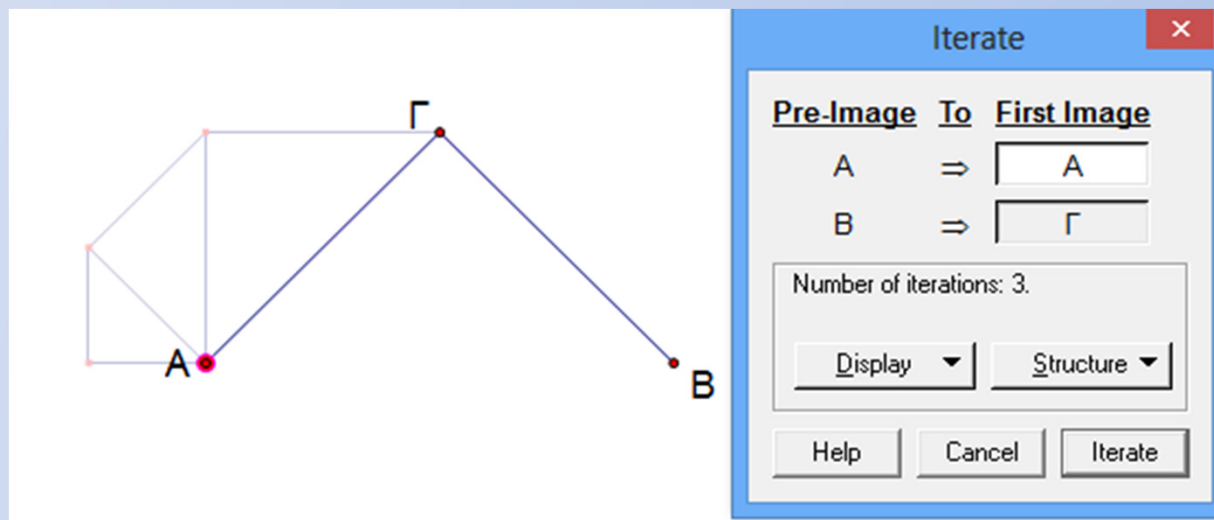
Η καμπύλη του **Levy** ανακαλύφθηκε  
από τον **Emesto Cesaro** το 1906,  
αλλά έχει το όνομα του Γάλλου  
μαθηματικού **Paul Pierre Levy**  
επειδή ήταν ο πρώτος που περιέγραψε  
τις αυτοόμοιες ιδιότητές του.

## Βήματα κατασκευής της καμπύλης Levy

- Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα **AB**, το μέσο του και μια ευθεία κάθετη στο μέσο του.
- Επιλέγουμε το **A** ως κέντρο περιστροφής και επιλέγοντας το τμήμα και το σημείο **B** το περιστρέφουμε κατά **45** μοίρες.



- Από το μενού **Προβολή** επιλέγουμε την εντολή **Απόκρυψη αντικειμένων** διατηρώντας στην οθόνη μόνο τα τρία σημεία **A**, **B**, **Γ** ενώ συγχρόνως κατασκευάζουμε τα τμήματα **ΑΓ**, **ΒΓ**.
- Με την εντολή **Επανάληψη** από το μενού **Μετασχηματισμός** συμπληρώνουμε το πλαίσιο διαλόγου όπως φαίνεται παρακάτω:



- *Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και για τα σημεία  $\Gamma$ ,  $B$ .*

The diagram shows a grid of squares with a path from point A to point B. Point A is at the bottom left, point B is at the bottom right, and point  $\Gamma$  is at the top center. The path consists of a vertical line from A to the top edge, a horizontal line from the top edge to  $\Gamma$ , and a diagonal line from  $\Gamma$  to B.

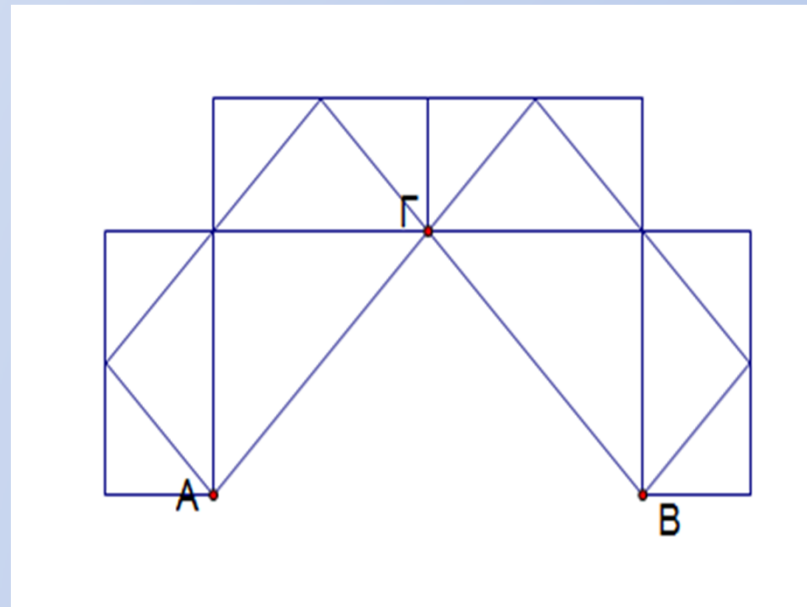
The dialog box titled "Iterate" contains the following information:

<u>Pre-Image</u>	<u>To</u>	<u>Map #2</u>	<u>Map #1</u>
A	$\Rightarrow$	$\Gamma$	A
B	$\Rightarrow$	B	$\Gamma$

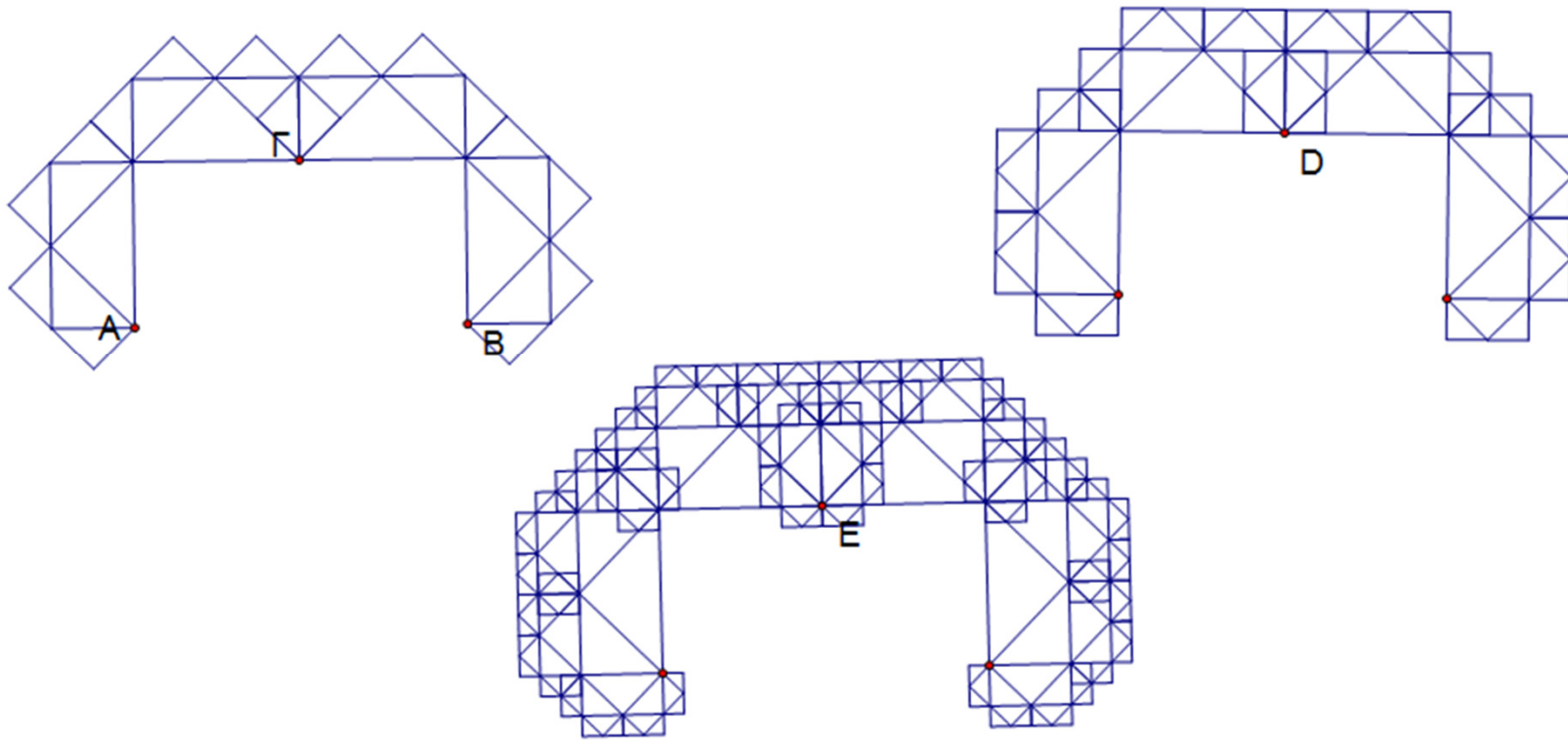
Number of iterations: 3.

Buttons: Display Structure, Help, Cancel, Iterate

- Επιλέγουμε τελική **Επανάληψη** στο χάρτη αντιστοίχισης και παίρνουμε την παρακάτω εικόνα.



- Παρακάτω φαίνονται ορισμένες εικόνες διαδοχικών επαναλήψεων της καμπύλης.





### 3. Τρίγωνο Sierpinski

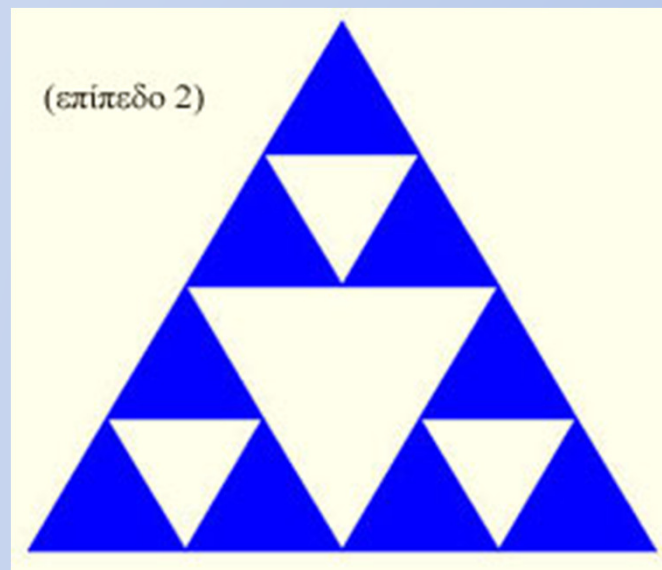
Ο Πολωνός μαθηματικός

**Waclaw Sierpinski** (1882-1969),

το 1915 εισήγαγε το παρακάτω φράκταλ,

που φέρει το όνομά του

και είναι ένα από τα πιο διάσημα φράκταλ.



Για την κατασκευή  
του τριγώνου του **Sierpinski**  
ακολουθούμε τα εξής βήματα.

Αρχικά παίρνουμε  
ένα ισόπλευρο τρίγωνο (**επίπεδο 0**),  
ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του,  
αφαιρούμε το μεσαίο τρίγωνο  
που σχηματίζεται και έτσι προκύπτει  
το σχήμα στο (**επίπεδο 1**),  
το οποίο αποτελεί το βασικό μοτίβο.

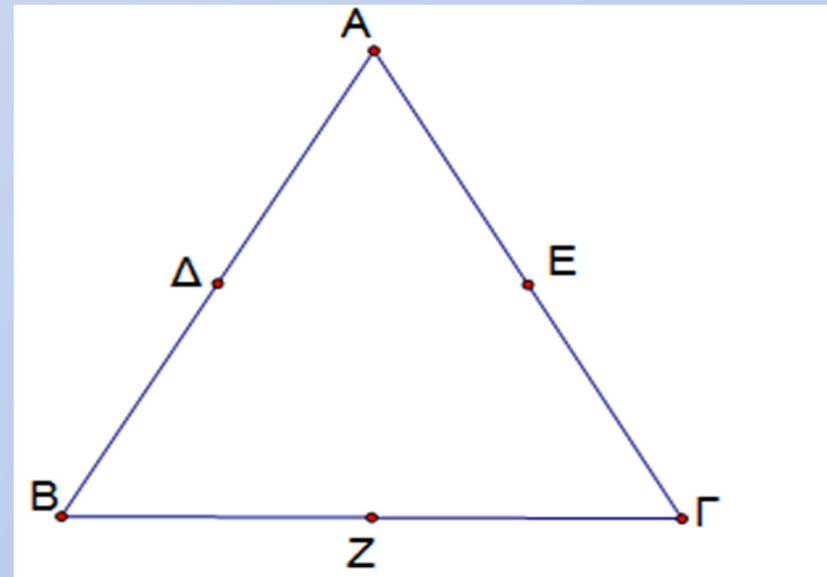
Στη συνέχεια σε κάθε ένα  
από τα τρία τρίγωνα  
που σχηματίζονται  
κάνουμε το ίδιο  
και παίρνουμε το  
επόμενο σχήμα (**επίπεδο 2**).

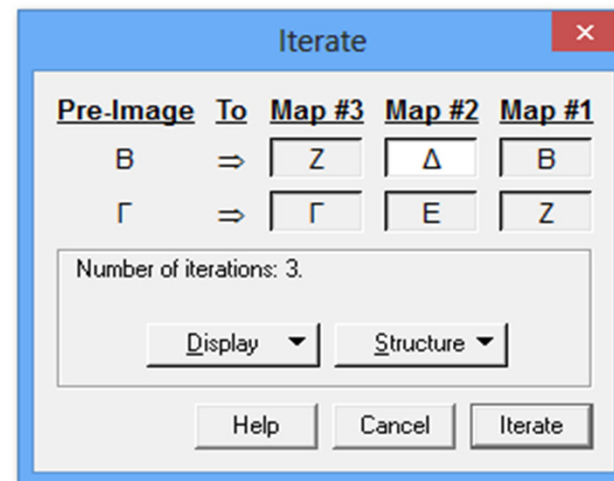
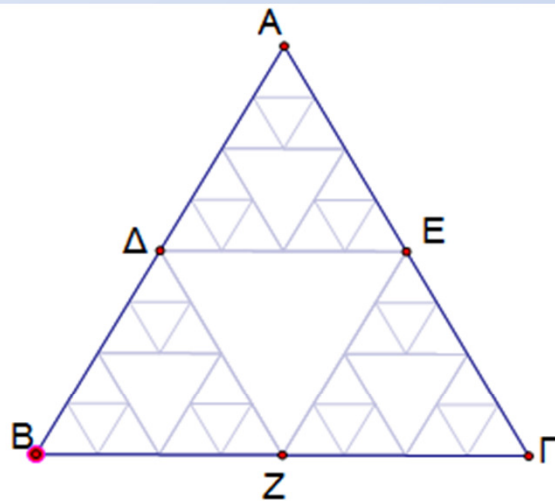
Σε κάθε τρίγωνο τώρα  
του **επιπέδου 2**  
κάνουμε το ίδιο.

*Πιο αναλυτικά η παραπάνω κατασκευή περιγράφεται ακολούθως:*

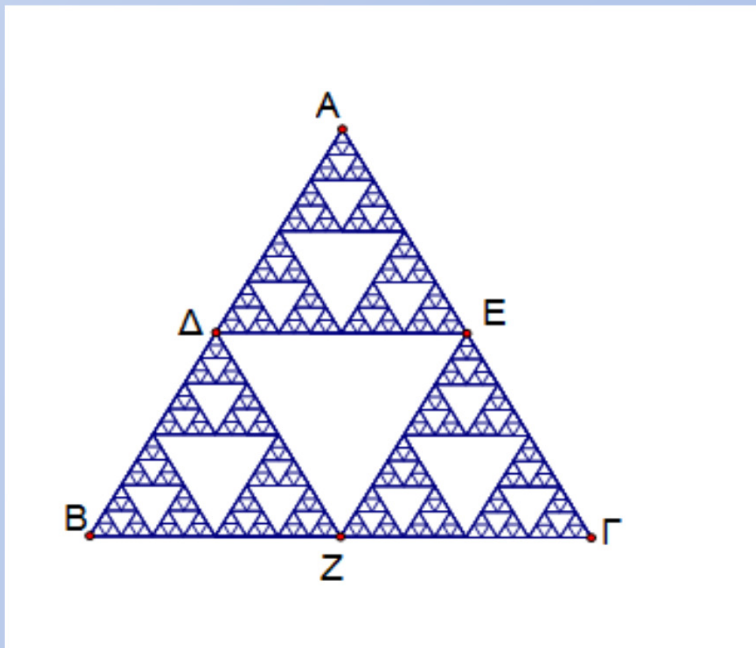
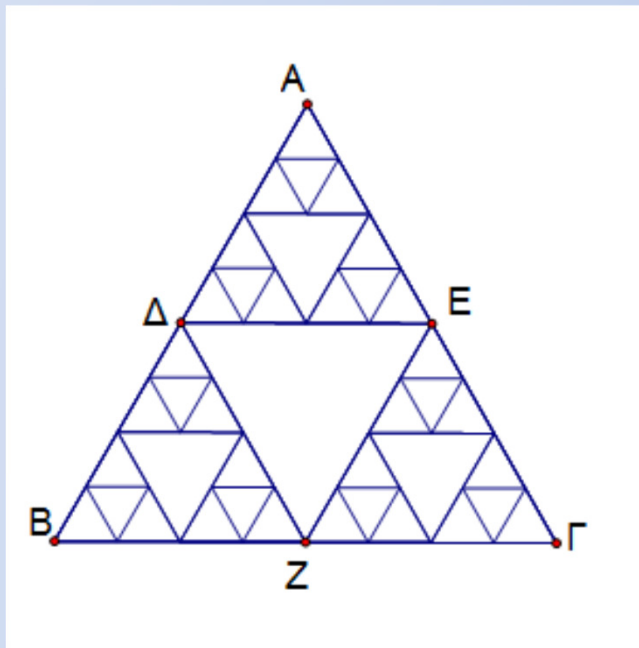
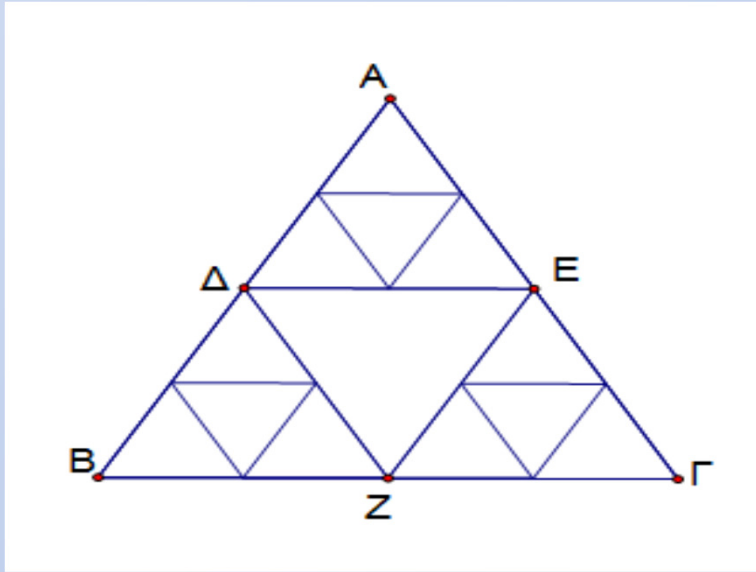
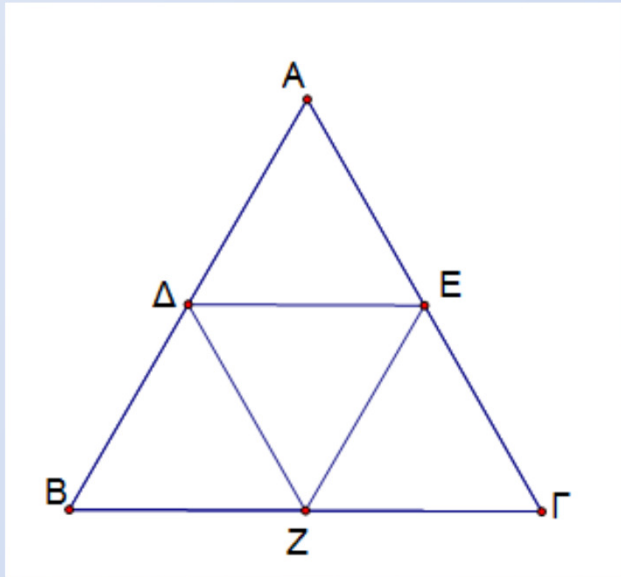
- *Κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, επιλέγουμε το εσωτερικό του και το διαγράφουμε.*
- *Επιλέγουμε τις τρεις πλευρές του και από το μενού **Κατασκευή** επιλέγουμε την εντολή **Κατασκευή μέσω σημείων**, οπότε προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:*

Επιλέγουμε τα σημεία  
**B** και **Γ** και  
από το μενού  
**Μετασχηματισμός**  
εκτελούμε την εντολή  
**Επανάληψη**  
συμπληρώνοντας το  
χάρτη αντιστοίχισης  
όπως φαίνεται  
παρακάτω.





*Παρακάτω φαίνονται ορισμένες εικόνες  
διαδοχικών επαναλήψεων  
της κατασκευής.*



## 4. Το Πυθαγόρειο Δέντρο

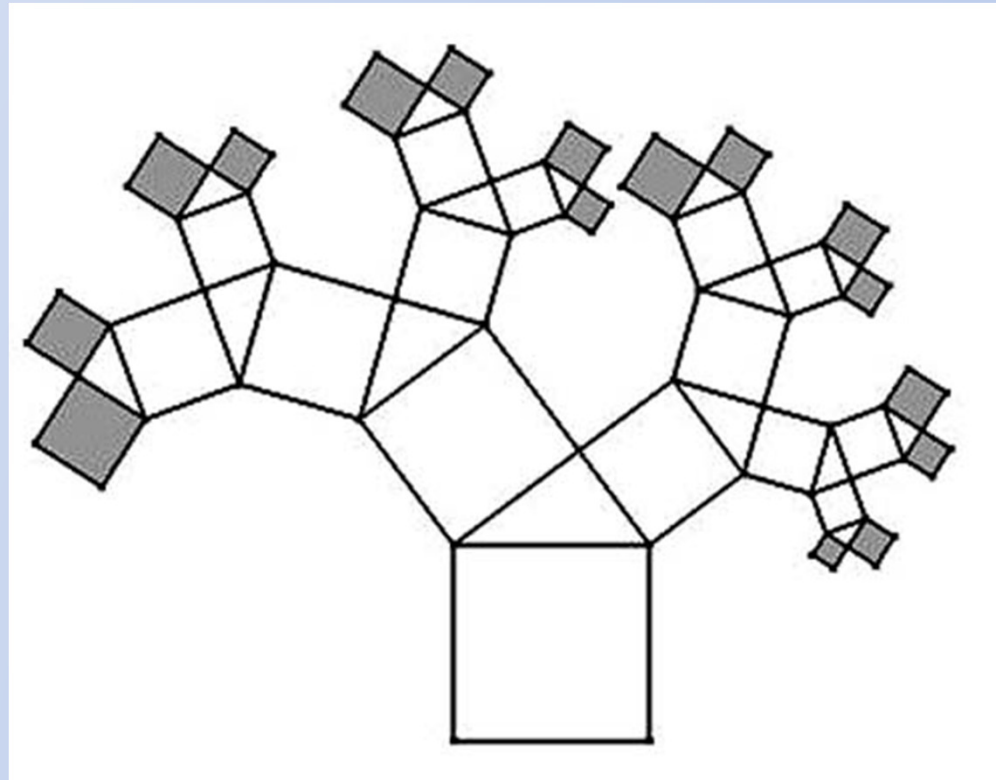
*Το Πυθαγόρειο δέντρο είναι ένα fractal το οποίο ανακάλυψε ο Ολλανδός μαθηματικός Albert E. Bosman το 1942.*

*Πήρε το όνομά του από τον αρχαίο Έλληνα μαθηματικό Πυθαγόρα γιατί κάθε φορά που δημιουργούμε μια νέα τριάδα τετραγώνων, ανάμεσά τους σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο και αυτός ο σχηματισμός χρησιμοποιείται όταν επεξηγούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα.*



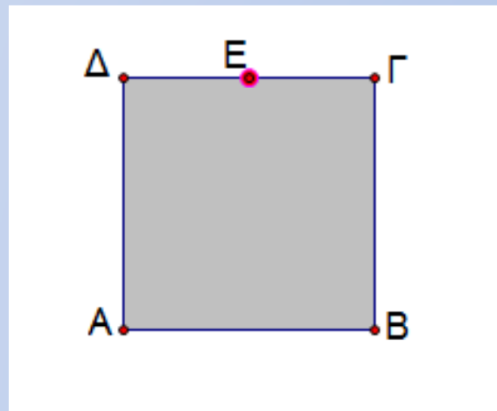
- **Το δένδρο του Πυθαγόρα είναι ένα σπάνιο φυτό που φυτρώνει στο Ευκλείδειο επίπεδο.**
- Ο κορμός του είναι ένα τετράγωνο, του οποίου η επάνω πλευρά είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου και στις κάθετες πλευρές αυτού του τριγώνου μεγαλώνουν τα κλαδιά, που είναι τετράγωνα τα οποία αντιστοιχούν σε αυτές.
- Κάθε ένα από τα δύο τετράγωνα με τη σειρά του αναπτύσσεται όπως ένα νέο δένδρο στο οποίο αναπτύσσεται ένα άλλο όμοια με την παραπάνω περιγραφή. Η διαδικασία αυτή είναι προφανές ότι μπορεί να συνεχιστεί άπειρες φορές...

Στο σχήμα που ακολουθεί το **δένδρο του Πυθαγόρα**  
είναι ένα δένδρο "**επιπέδου 4**".  
Τα τελευταία τετράγωνα που είναι γκρι χρώματος  
ονομάζονται **φύλλα**.

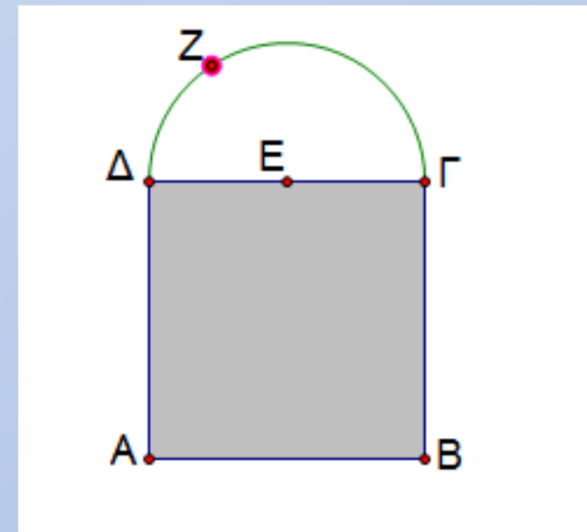


**Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα  
για την κατασκευή  
του πυθαγόρειου δέντρου.**

Ξεκινάμε με την κατασκευή ενός τετραγώνου **ΑΒΓΔ**, στο οποίο επιλέγουμε τις τέσσερις κορυφές του και από το μενού **Κατασκευή** επιλέγουμε το **εσωτερικό** του δίνοντας το χρώμα που επιθυμούμε.



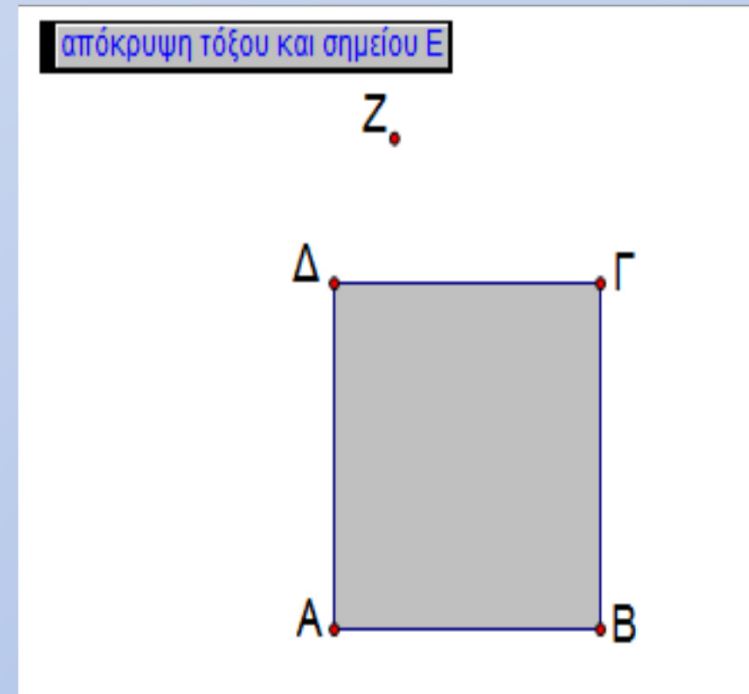
Επιλέγουμε με τη σειρά το μέσο **E** του τμήματος **ΓΔ**, το **Γ** και το **Δ** και από το μενού **Κατασκευή** εκτελούμε την εντολή **Τόξου σε κύκλο**, παίρνοντας το διπλανό σχήμα. Επιπλέον επιλέγουμε και ένα τυχαίο σημείο **Z** στο τόξο που κατασκευάσαμε.



Κατασκευάζουμε ένα **κουμπί**  
**απόκρυψης/εμφάνισης** του  
τόξου και του σημείου **E**.

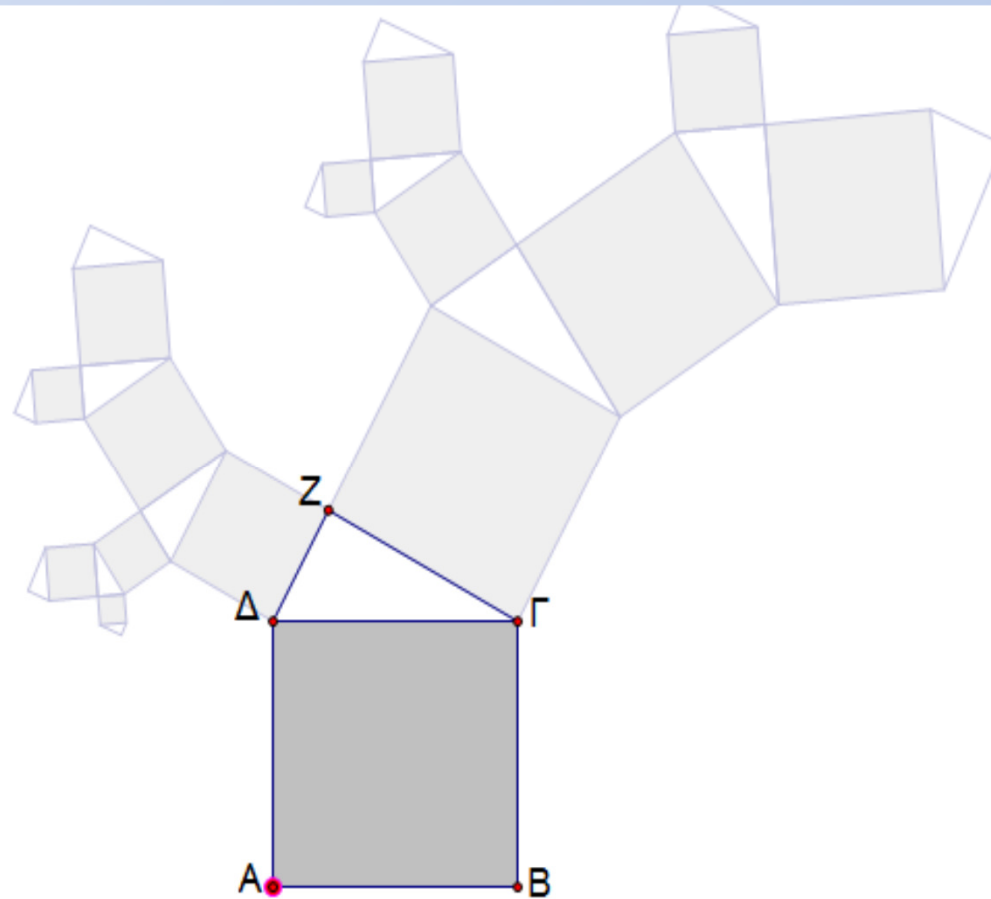
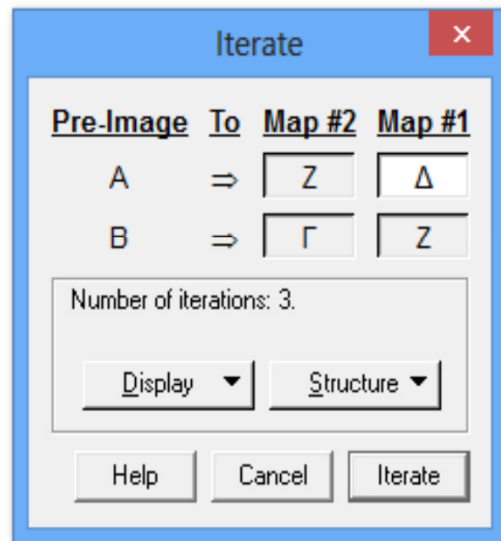
Θα το καταφέρετε επιλέγοντας  
τα παραπάνω αντικείμενα και  
από μενού **Επεξεργασία**  
εκτελέσετε τις εντολές

**Κουμπίά ενεργειών >>**  
**Απόκρυψη/Εμφάνιση**

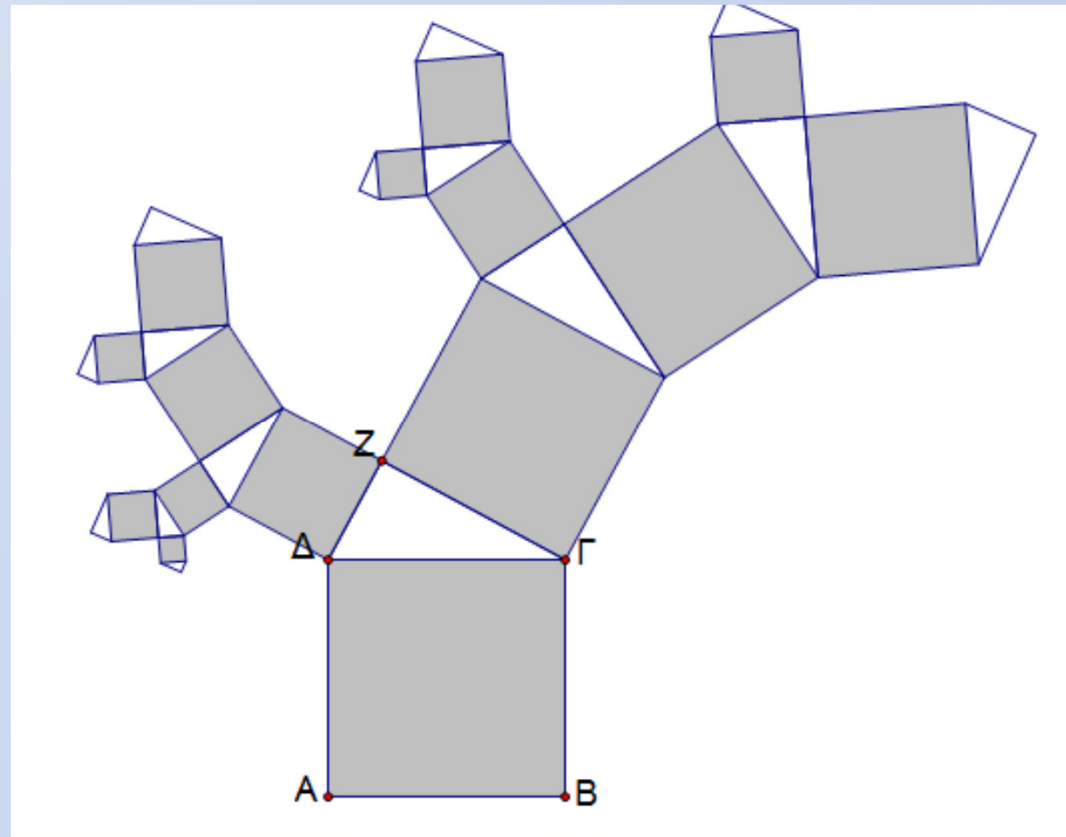


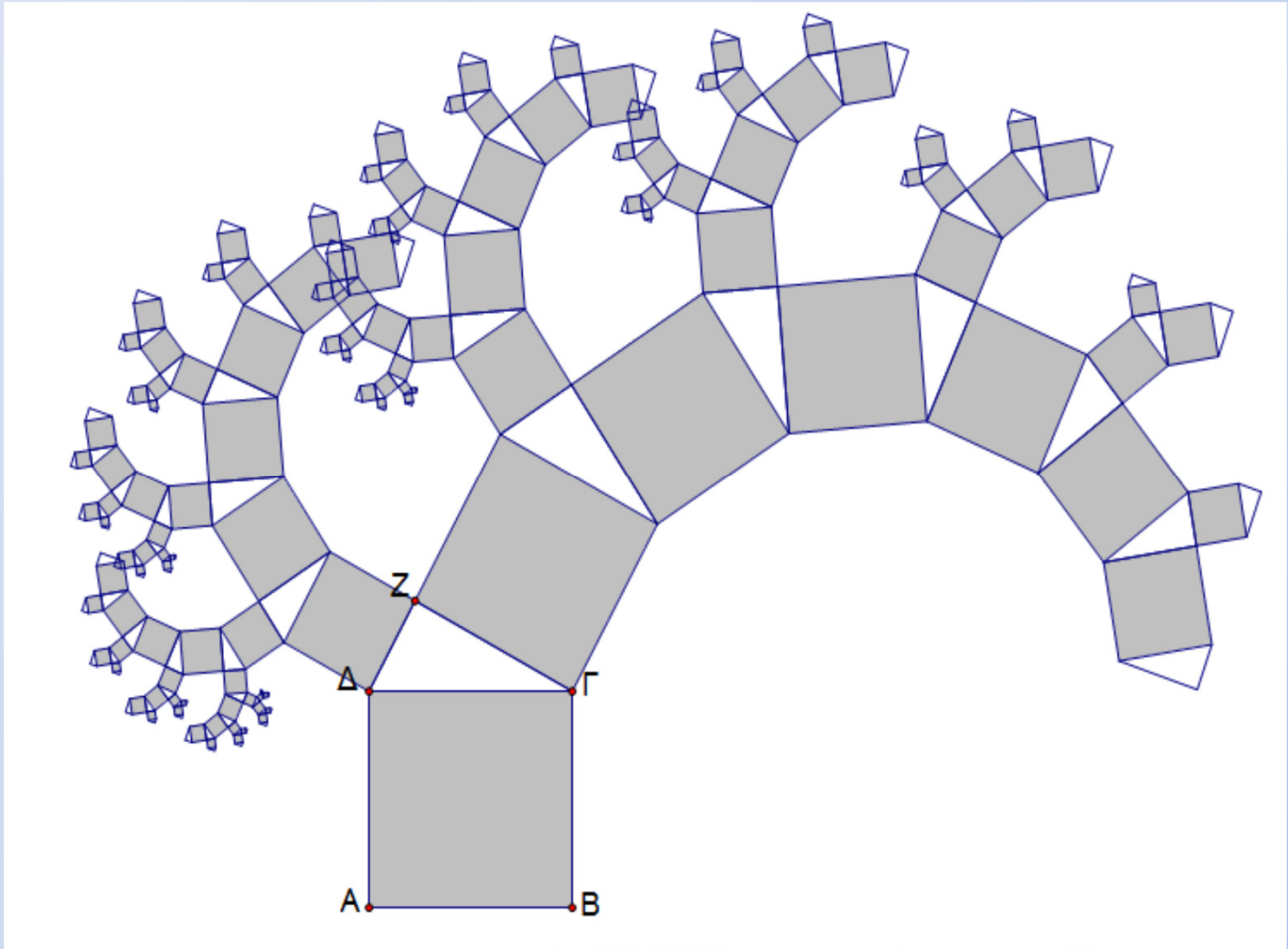
Την παραπάνω διαδικασία την εφαρμόζουμε σταδιακά στα τμήματα  $\Delta Z$  και  $\Gamma Z$ .

απόκρυψη τόξου και σημείου E

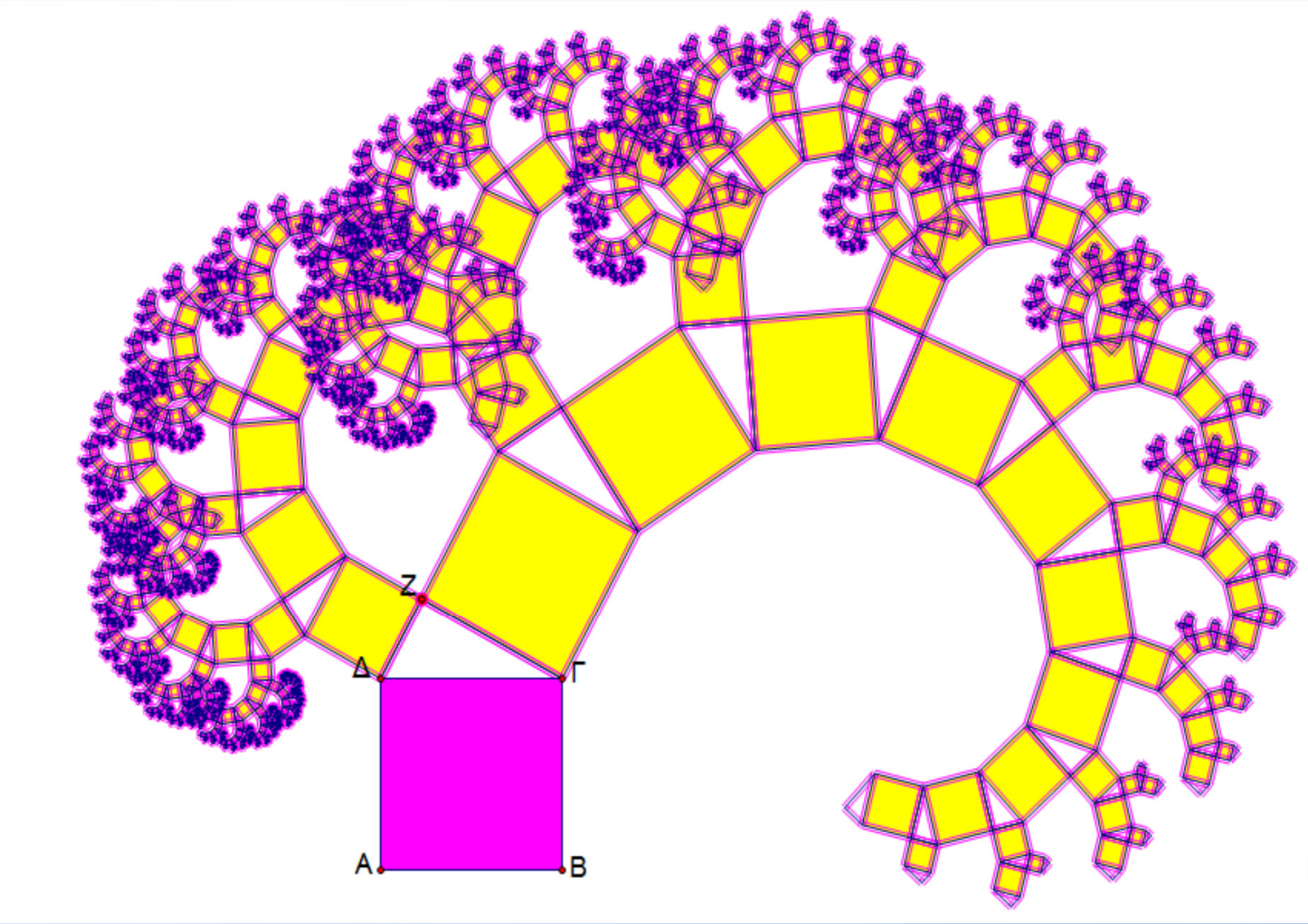


Επιλέγοντας την κατασκευή μας αυξάνουμε τον αριθμό των επαναλήψεων με τη βοήθεια των πλήκτρων +/-, παίρνοντας τα ακόλουθα σχήματα:









ΤΕΛΟΣ