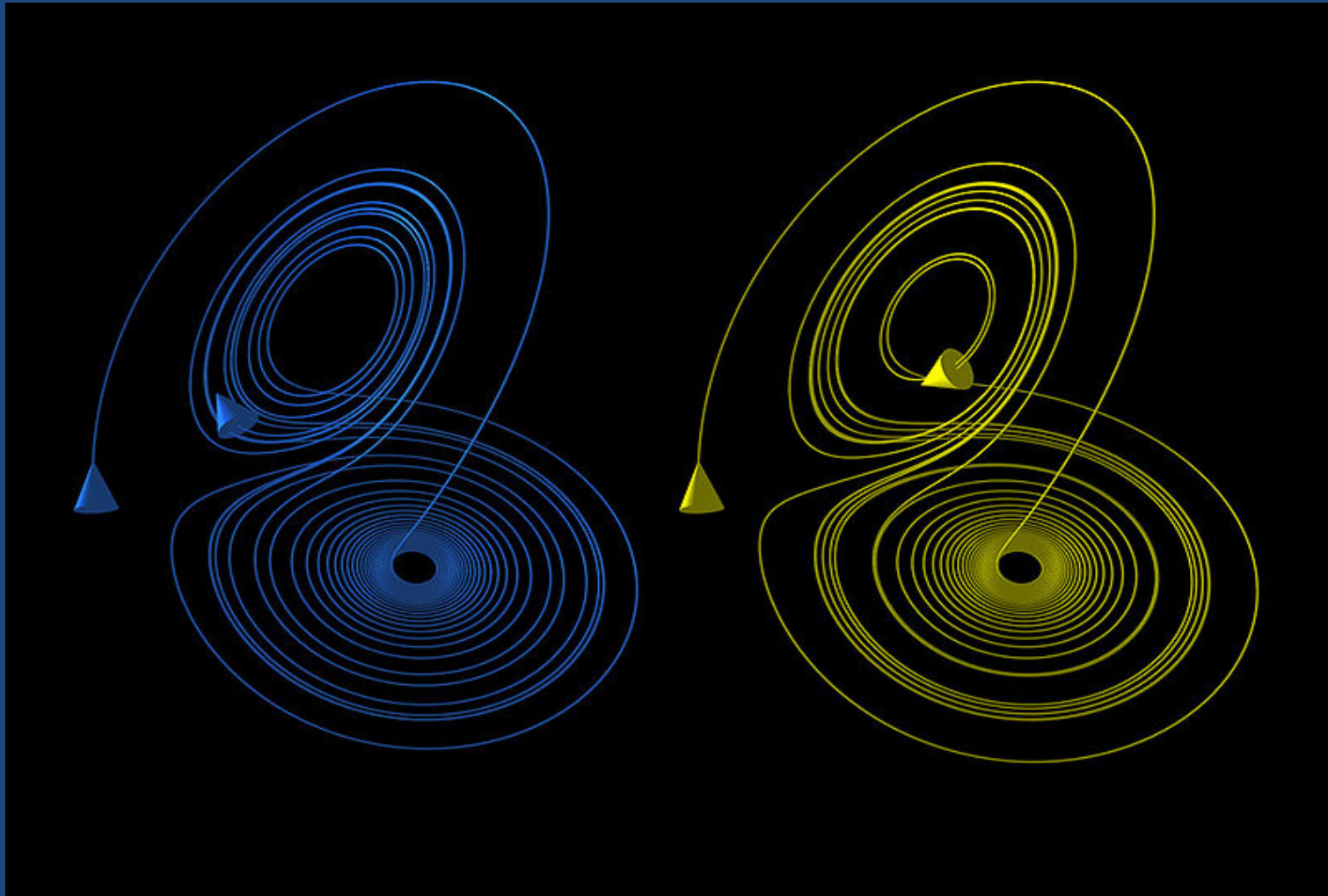


Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ



ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ – ΣΦΑΕΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

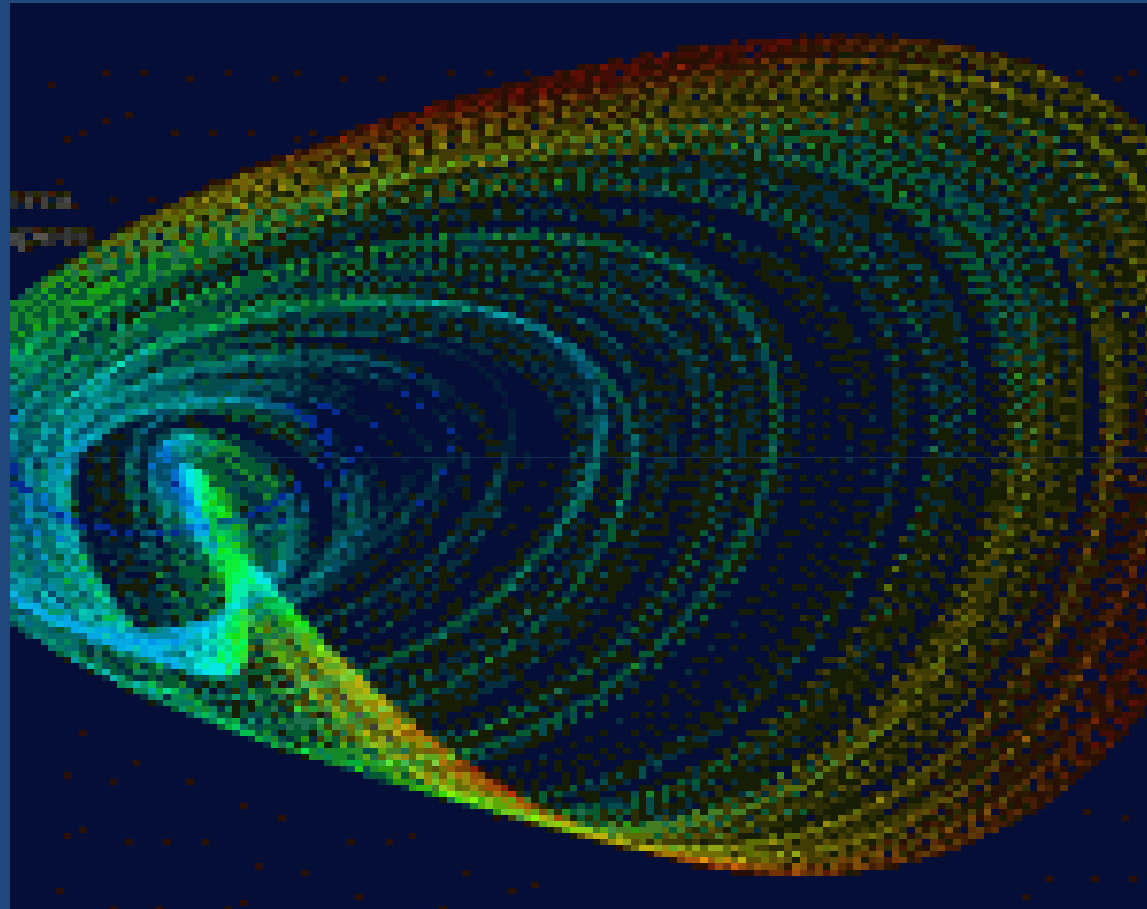
ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Στον προηγούμενο αιώνα τρεις ήταν οι μεγάλες επιστημονικές “ανακαλύψεις”

- Η θεωρία Σχετικότητας
- Η κβαντική θεωρία
- Η θεωρία του Χάους.

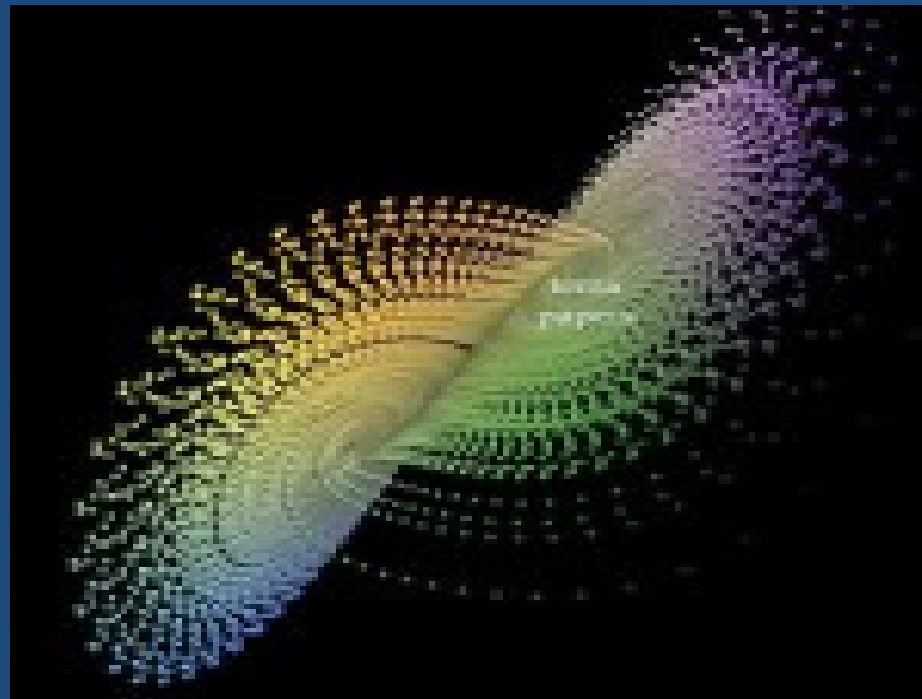
Η πρώτη βρήκε τη σχέση του χώρου και του χρόνου, η δεύτερη την αρχή της αιτιότητας και η τρίτη διερευνά την έννοια της προβλεπτικότητας, πως από παρόμοιες αρχικές υποθέσεις μπορούν να προκύψουν πολύ διαφορετικά συμπεράσματα.



Η θεωρία του χάους
βρήκε μεγάλη απήχηση
στην επιστημονική κοινότητα
και έφερε ένα νέο ρεύμα
ανανέωσης στις επιστήμες
αλλά και σε πεδία
έξω από αυτή.

Μόλις στις αρχές του εικοστού
αιώνα ο Henri Poincare ανακάλυψε
την ύπαρξη χαοτικών κινήσεων σε
απλά μηχανικά συστήματα.

Φυσικά η απεικόνιση του
φαινομένου ήρθε μαζί με την
ανάπτυξη των ηλεκτρονικών
υπολογιστών από τον Benoit
Mandelbrot που οδήγησε στην
ανακάλυψη των fractals.



Πρόκειται για μια νέα επιστήμη,
που μελετά πως από το τυχαίο,
το ασαθές, το απρόβλεπτο, την αταξία
δημιουργείται τάξη και μορφή.
Όπως λέει ο Douglas Hofstadter:
« Πίσω από μια πρόσοψη τάξης
μπορεί να κρύβεται ένας
μυσηριώδης τύπος χάους
και, επιπλέον, βαθιά μέσα στο χάος
μπορεί να κρύβεται ένα ακόμη
πιο μυσηριώδες είδος τάξης ».

Η λέξη Χάος χρησιμοποιείται
με διαφορετικό τρόπο,
σε διαφορετικές περιπτώσεις,
από διαφορετικούς ανθρώπους.
Άλλη η έννοια του χάους στη θρησκεία
ή στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία ή
στη σημερινή εποχή μας
(χάος = διάλυση, σύγχυση, μπάχαλο,
αταξία κ.λ.π.) ή ακόμη και στην
αναπαράσταση του με διάφορα σύνολα
τύπου Mandelbrot
και άλλη η έννοια του χάους
στην επιστήμη.

Στην επιστήμη το χάος ορίζεται
σαν την εξαιρετικά ευαίσθητη
εξάρτηση της κίνησης
από τις αρχικές συνθήκες.

Η απρόσμενη μεταβολή στις αρχικές
συνθήκες είναι το στοιχείο του χάους
- της αταξίας- που εκδηλώνεται
σε μια τακτική και
σταθερή φυσική διαδικασία.

Αναλυτικότερα, χάος είναι η χαοτική κατάσταση που προκύπτει όταν μεταβληθούν έστω και κατ' ελάχιστο τα αρχικά δεδομένα ενός δυναμικού συστήματος. Αλλά στη νέα θέση που θα οδηγηθεί το σύστημα θα κατακαθίσει και θα παγιωθεί σε μια θέση που όμως πάλι η προβλεψιμότητα της θα είναι αδύνατον να εκφραστεί με νόμους αιώνιους ή ντερμινιστικά.

Η θεωρία του Χάους
μελετά τη συμπεριφορά
ορισμένων μη γραμμικών
δυναμικών συστημάτων,
που είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα
στις αρχικές συνθήκες.

Μικρές διαφορές
στις αρχικές συνθήκες
(όπως αυτές που οφείλονται
σε σφάλματα στρογγυλοποίησης
σε αριθμητικούς υπολογισμούς)
αποδίδουν πολύ
διαφορετικά αποτελέσματα
για τα δυναμικά συστήματα,
καθιστώντας τη μακροπρόθεσμη
πρόβλεψη αδύνατη σε γενικές γραμμές.

Στο φυσικό κόσμο,
ο όρος δυναμικό σύστημα
περιγράφει κάθε φυσικό
φαινόμενο που εξελίσσεται
με το χρόνο.

Ένα φυσικό σύστημα
μπορεί να περιγραφεί
από ένα σύνολο μεταβλητών,
οπότε δυναμικό σύστημα
είναι ένα φυσικό σύστημα
στο οποίο
μία ή περισσότερες μεταβλητές
μεταβάλλονται με το χρόνο.

Ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα μπορεί, σε γενικές γραμμές, να παρουσιάζει μια ή περισσότερες από τις παρακάτω συμπεριφορές:

- να καταλήγει σε ηρεμία (ακινησία)
- να επεκτείνεται συνεχώς
(μόνο για μη φραγμένα συστήματα)
ή όπως λέγεται να συμβαίνει μια “έκρηξη”
- να εκτελεί περιοδική κίνηση
ή ημι-περιοδική κίνηση
- να εκτελεί χαοτική κίνηση

Χαοτική συμπεριφορά
μπορεί να παρατηρηθεί
σε πολλά φυσικά συστήματα,
όπως ο καιρός,
η ατμόσφαιρα, το ηλιακό σύστημα,
οι τεκτονικές πλάκες,
τα οικονομικά συστήματα
και η εξέλιξη (μεταβολή)
των πληθυσμών.

Η θεωρία του χάους μελετά
ντετερμινιστικά συστήματα,
ενώ το συγγενές πεδίο της Φυσικής
που λέγεται

Κβαντική θεωρία του Χάους
μελετά μη αιτιοκρατικά συστήματα
σύμφωνα με τους νόμους
της Κβαντομηχανικής.

Τα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή είναι πολλά. Ο καπνός του τσιγάρου που στροβιλίζεται σε πολύπλοκες και απρόβλεπτες δίνες. Η ροή του νερού που στάζει από μια βρύση. Το νερό των κυμάτων που σκάζουν πάνω σε μια ακτή. Το μελάνι που διαχέεται μέσα σε ένα ποτήρι νερού με απρόβλεπτο τρόπο. Στην αστρονομία μπορεί να έχουμε μια τυχαία μεταβολή κάποιας ιδιότητας (κλίση τροχιάς, εκκεντρότητα τροχιάς κάποιου πλανήτη κλπ).

Στη βιολογία, στην κοινωνιολογία, στην οικονομία και τέλος στην ιατρική έχουμε παρόμοιες εκδηλώσεις χαοτικής συμπεριφοράς. Αλλά τα παραδείγματα δεν τελειώνουν εδώ. Το απρόβλεπτο των τιμών στο χρηματιστήριο, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στους χτύπους της καρδιάς, στην ροή του νερού ή του αίματος μέσα στους σωλήνες, στην μεταβολή των πληθυσμών στα πουλιά και στα φυτά είναι ορισμένοι τομείς στους οποίους συνυπάρχει το χάος.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η θεωρία
του Χάους βασίζεται στη
διαπίστωση πως
**το Χάος και η Απροσδιοριστία
δεν οφείλονται στην
ανικανότητα των οργάνων
μέτρησης που διαθέτουμε,
απλώς είναι ιδιότητες του
Σύμπαντος.**

Από την εποχή του Δημόκριτου και του Αριστοτέλη, οι επιστήμονες πίστευαν ότι κάτω από την πολυπλοκότητα του κόσμου μας πρέπει να υπάρχουν απλά αντικείμενα και απλές δυνάμεις.

Στην αρχή οι επιστήμονες νόμιζαν ότι οι απλοί δομικοί λίθοι είναι τα άτομα.

Αργότερα, όταν ανακαλύφθηκε ότι τα άτομα αποτελούνται από μέρη,

δομικοί λίθοι έγιναν τα απλά σωματίδια όπως το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο.

Ύστερα, όταν η Κβαντομηχανική οδήγησε στην απροσδόκητη ανακάλυψη ενός εντυπωσιακού «ζωολογικού κήπου σωματιδίων» στο υποατομικό επίπεδο, οι φυσικοί επινόησαν τη μεγάλη ενοποιημένη θεωρία και άρχισαν να αναζητούν τη μοναδική, απλή δύναμη -την «υπερδύναμη» που υποτίθεται πως γέννησε αυτόν τον κυκεώνα αλληλεπιδράσεων των στοιχειωδών σωματιδίων.

Η υπερδύναμη δεν έχει βρεθεί ακόμη,
πάντως, και τουλάχιστον ως τώρα, η
έρευνα έχει ανακαλύψει ότι για κάθε
απλούστευση υπάρχουν τουλάχιστον
δύο καινούργιες περιπλοκές:

**«Η ιδέα της απλότητας διαλύεται.
Σε όποια διεύθυνση κι αν πάμε,
υπάρχει πολυπλοκότητα».**

Πρώτος ο Prigogine απέδειξε ότι σε συνθήκες μακριά από τη θερμοδυναμική ισορροπία η ύλη αποκτά νέες απρόσμενες ιδιότητες, αυτοοργανώνεται και παράγει πολύπλοκες δομές από τυχαίες διακυμάνσεις.

Το θέμα της αυτοοργάνωσης συνδέεται στενά με το φαινόμενο της ζωής.

Η δημιουργία πολυπλοκότητας, που αποτελεί απαραίτητο όρο για την δημιουργία ζωής, συνδέεται με την διαδικασία αποθήκευσης πληροφορίας στα μόρια, από τα οποία αποτελείται το ζωντανό κύτταρο.

Όλα τα έμβια συστήματα, είτε μονοκύτταροι είτε πολυκύτταροι οργανισμοί, είναι εξαιρετικά πολύπλοκα συστήματα σε σχέση με όλα τα άλλα είδη της αβίου ύλης, που υπάρχει στο Σύμπαν.

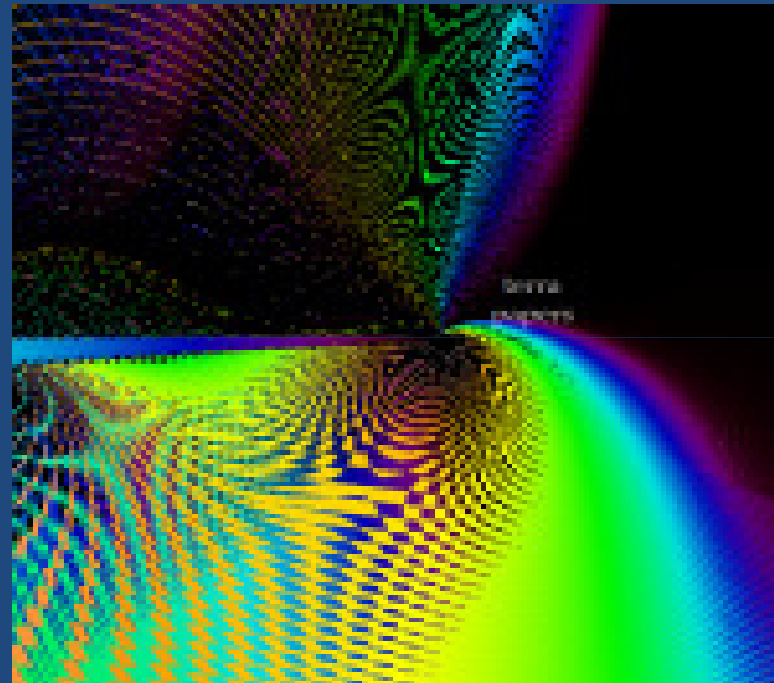
Η φυσική επιλογή οδηγεί σε μορφές
οργάνωσης, που είναι πιο
αποτελεσματικές, αφήνοντας τις
ολιγότερο αποτελεσματικές στην
διαδικασία της εξαφάνισης.
Έτσι, μία μορφή οργάνωσης, που
σταθεροποιείται δυναμικά σε ένα
σύστημα εκτός ισορροπίας, θα
εξαφανισθεί, εφόσον εμφανισθεί μία
βελτιωμένη μορφή οργάνωσης.

Σύμφωνα με την περίφημη Αρχή της Αβεβαιότητας, διατυπωμένη για την Κβαντομηχανική από τον Heisenberg, είναι αδύνατο να γνωρίζουμε με πλήρη ακρίβεια και τη θέση και την ορμή οποιουδήποτε υποατομικού σωματιδίου. Η Αρχή της Αβεβαιότητας εισήγαγε την ανάγκη για την πιθανότητα στην περιγραφή της συμπεριφοράς των σωματιδίων.

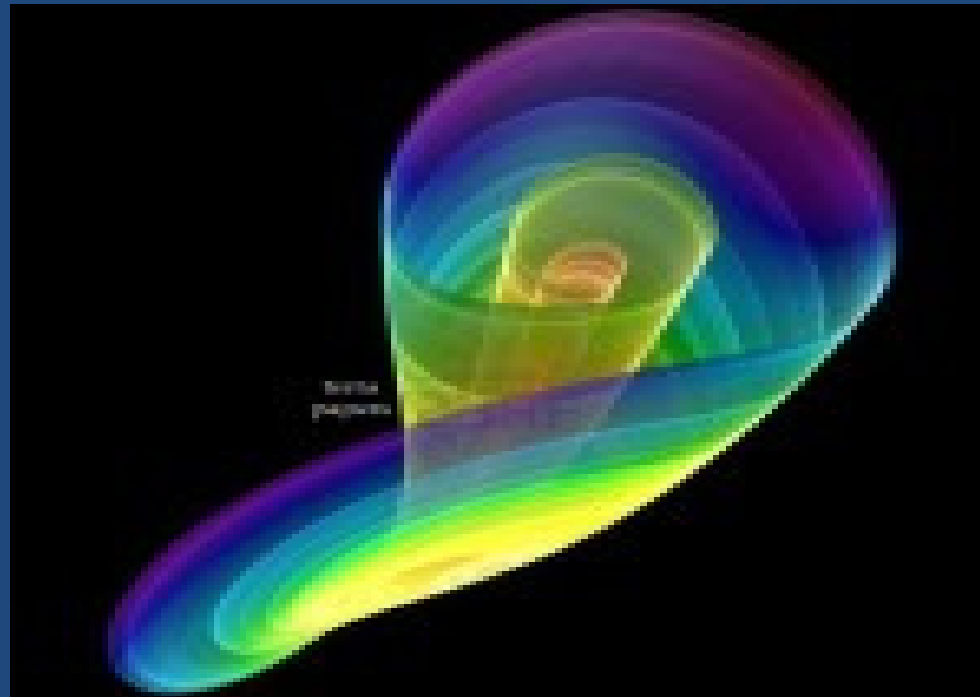
Η νέα αρχή αβεβαιότητας του Prigogine
μας λέει ότι πέρα από κάποιο οριακό
σημείο πολυπλοκότητας,
τα συστήματα οδεύουν προς μη
προβλέψιμες κατευθύνσεις.
Χάνουν τις αρχικές τους συνθήκες και
δεν μπορούν να τις ανακτήσουν ή να
αντιστρέψουν την πορεία τους.

Όπως η Αρχή της Αβεβαιότητας
του Heisenberg,
έτσι και η αρχή αβεβαιότητας
του Prigogine
αποτελεί πλήγμα κατά του
αναγωγισμού (να τα αναγάγουμε
όλα τα φαινόμενα σε πιο απλά).

**Ένας σπουδαίος παράγοντας
στην εμφάνιση νέων δομών
είναι η συνεισφορά των
διακυμάνσεων ή διαταράξεων,
δηλαδή των ξαφνικών αλλαγών
που επιτρέπουν κάτι καινούργιο
να εμφανιστεί.**



Ιστορικά Στοιχεία



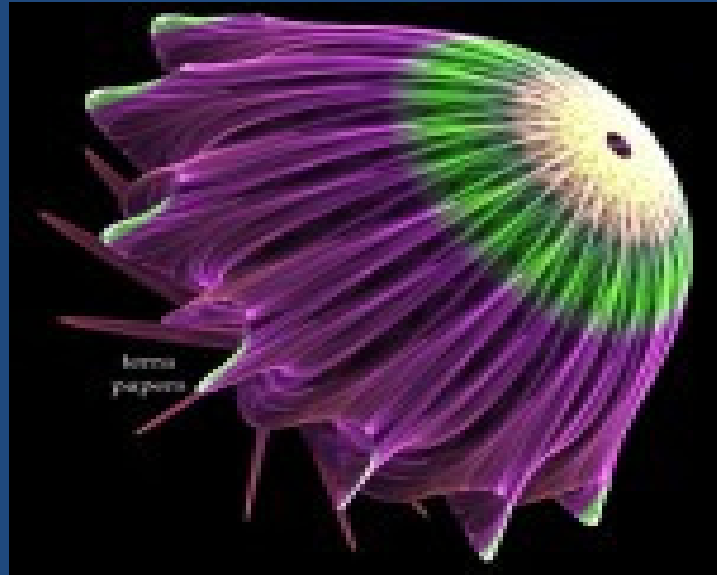
Στις αρχές του 19ου αιώνα
ο Γάλλος μαθηματικός Laplace,
είχε γράψει στην εισαγωγή
του βιβλίου
όπου πραγματευόταν
τη Θεωρία των Πιθανοτήτων:

**« Αν ένα ον γνώριζε,
σε μια συγκεκριμένη στιγμή,
όλες τις δυνάμεις της φύσης,
καθώς και τις θέσεις και τις
ταχύτητες των σωμάτων που
υπάρχουν στο Σύμπαν,
θα είχε πλήρη γνώση του
παρελθόντος και του μέλλοντος
κάθε αντικειμένου,
ζωντανού ή άψυχου»**



Το συμπέρασμα αυτό το στήριζε
στην πίστη του ότι η ισχύς
των νόμων της Φυσικής
είναι παγκόσμια και ότι οι μαθηματικές
εξισώσεις που περιγράφουν αυτούς τους
νόμους είναι δυνατό να λυθούν ακριβώς.
Κατά το Laplace, η έννοια της πιθανότητας
οφείλεται μόνο στην ατελή γνώση που έχουμε
για τους νόμους και τις αρχικές συνθήκες
δημιουργίας του Σύμπαντος.

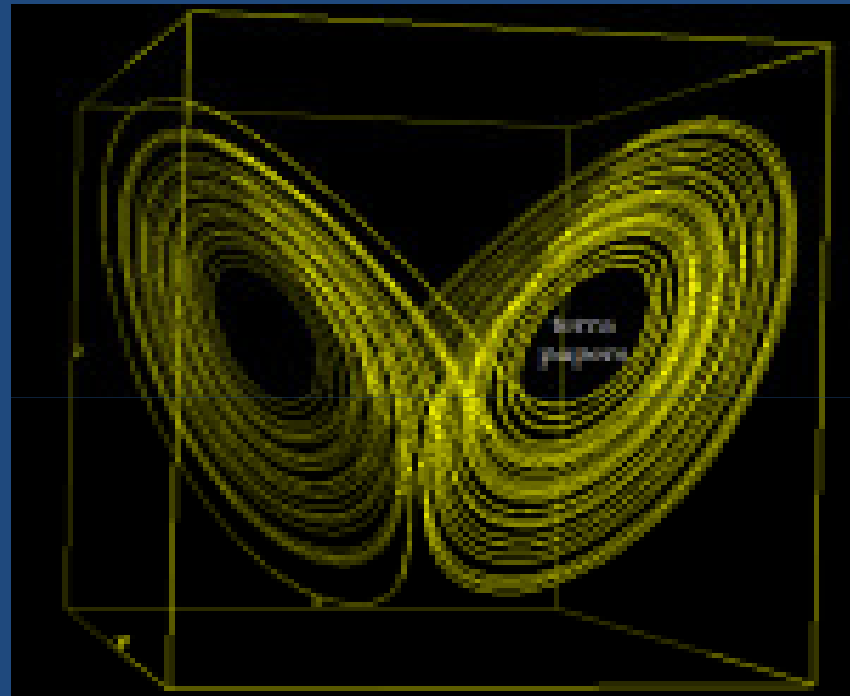
Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο νόμος που είχε κατά νου ο Laplace ήταν ο τρίτος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο η κίνηση οιαδήποτε σώματος είναι δυνατόν να περιγραφεί με μία εξίσωση που περιλαμβάνει τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του, αν είναι γνωστή η δύναμη που ασκείται σε αυτό.



Η σημασία του συμπεράσματος
είναι προφανής για τη φιλοσοφία
και τη ηθική:

αν οι κινήσεις όλων των σωμάτων,
από τα μικρότερα άτομα στο σώμα
μας μέχρι τα μεγαλύτερα αστέρια σε
ένα γαλαξία, καθοδηγούνται από
αυστηρούς μαθηματικούς νόμους,
τότε δεν υπάρχει η ελευθερία
βούλησης των ανθρώπων!

Έπρεπε να περάσουν 100 χρόνια περίπου, δηλαδή να φτάσουμε στις αρχές του 20ου αιώνα για να αποκατασταθεί η ελευθερία βούλησης των ανθρώπων από την ανακάλυψη ενός φαινομένου από τον μεγάλο μαθηματικό και αστρονόμο Henri Poincare.



Μέχρι τα τέλη του προ-περασμένου
αιώνα, η εύρεση της τροχιάς
κάθε ουράνιου σώματος
γινόταν προσεγγιστικά, με τη βοήθεια
των νόμων του Νεύτωνα και Κέπλερ,
αφού δεν υπήρχαν Η/Υ
για περισσότερη ακρίβεια.
Οι κινήσεις των πλανητών και των άλλων
ουρανίων σωμάτων θεωρούνταν
περιοδικές και κανονικές σαν τη κίνηση
ενός τέλειου εκκρεμούς.

Στα τέλη όμως του 19ου αιώνα,
ο Γάλλος μαθηματικός και
Αστρονόμος Henri Poincare έκανε
μια ανακάλυψη που έμελλε να
αλλάξει τα θεμέλια
της Νευτώνιας Μηχανικής
και να αποτελέσει έτσι τη γέννηση
ενός νέου κλάδου της επιστήμης:
του Χάους.

Ο Poincare διαπίστωσε πως το πρόβλημα
των τριών σωμάτων

(μελέτησε το πρόβλημα του Ήλιου,
της Γης και της Σελήνης)
ήταν και παραμένει άλυτο.

Άρα, δεν μπορεί να προβλεφθεί η τροχιά
οποιοδήποτε ουράνιου σώματος που
δέχεται την επίδραση δύο ή
περισσότερων άλλων σωμάτων.

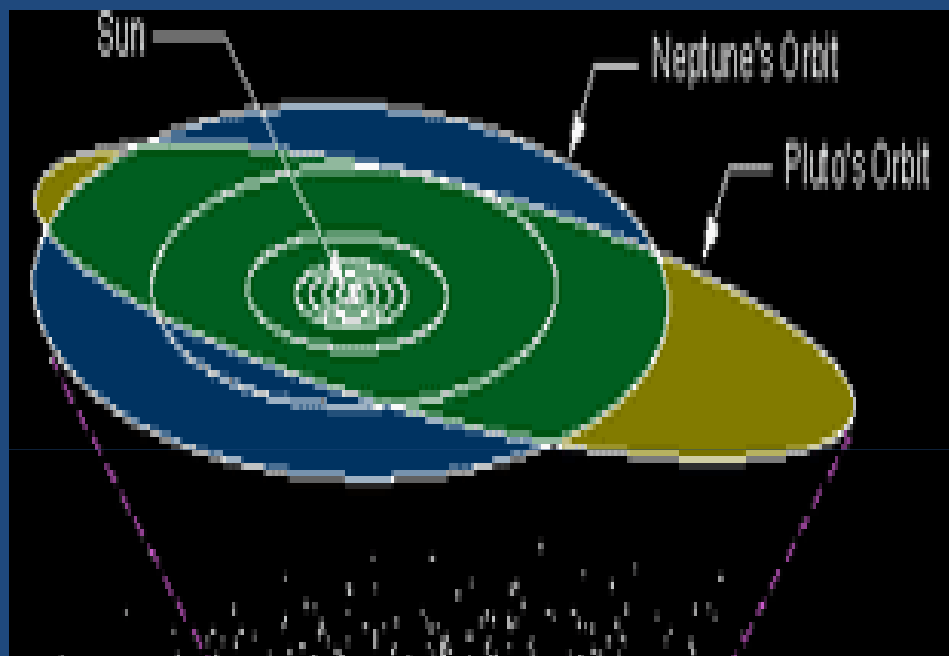
Η προσπάθεια λοιπόν
να υπολογιστεί η τροχιά
π.χ. του Πλούτωνα,
δεν είναι δυνατή,
αφού δέχεται την επίδραση του
Ήλιου και άλλων οκτώ πλανητών.

Ο Poincare αποκάλυψε το χάος στο Ηλιακό σύστημα και μαζί ανακάλυψε την απρόβλεπτη εξέλιξη ενός μη γραμμικού συστήματος.

Είχε κατανοήσει πως πολύ μικρές επιδράσεις μπορούν να μεγεθυνθούν μέσω της ανάδρασης.

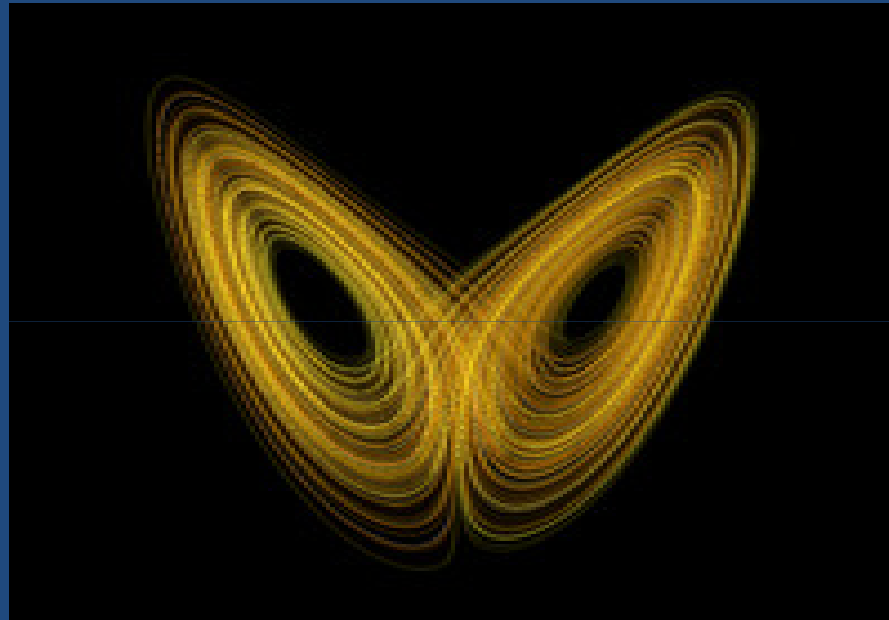
Γι' αυτό και διατύπωσε την άποψη *"Μια ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα"*.

Η γέννηση του χάους και του
απρόβλεπτου ήταν γεγονός.
Αλλά χρειάστηκε να περάσουν
80 χρόνια από τότε για να
συνειδητοποιήσουν οι αστρονόμοι
και οι υπόλοιποι επιστήμονες
τη σπουδαιότητα αυτής
της ανακάλυψης.



Το ηλιακό μας σύστημα παρουσιάζει
ανώμαλες τροχιές

Ελκυστές



Ένας τρόπος να παρουσιάσουμε
οπτικά την χαστική κίνηση ή
οποιαδήποτε άλλη κίνηση,
είναι η κατασκευή ενός
διαγράμματος φάσης της κίνησης.
Σε ένα τέτοιο διάγραμμα
υπεισέρχεται σιωπηρά ο χρόνος
και σε κάθε άξονα αναπαρίσταται
μια μεταβλητή της κατάστασης.

Για παράδειγμα, θα μπορούσε κάποιος να αναπαραστήσει τη θέση ενός εκκρεμούς σε σχέση με την ταχύτητά του.

Ένα εκκρεμές σε ακινησία θα σχεδιαστεί ως ένα σημείο και ένα σε περιοδική κίνηση θα σχεδιαστεί ως απλή κλειστή καμπύλη.

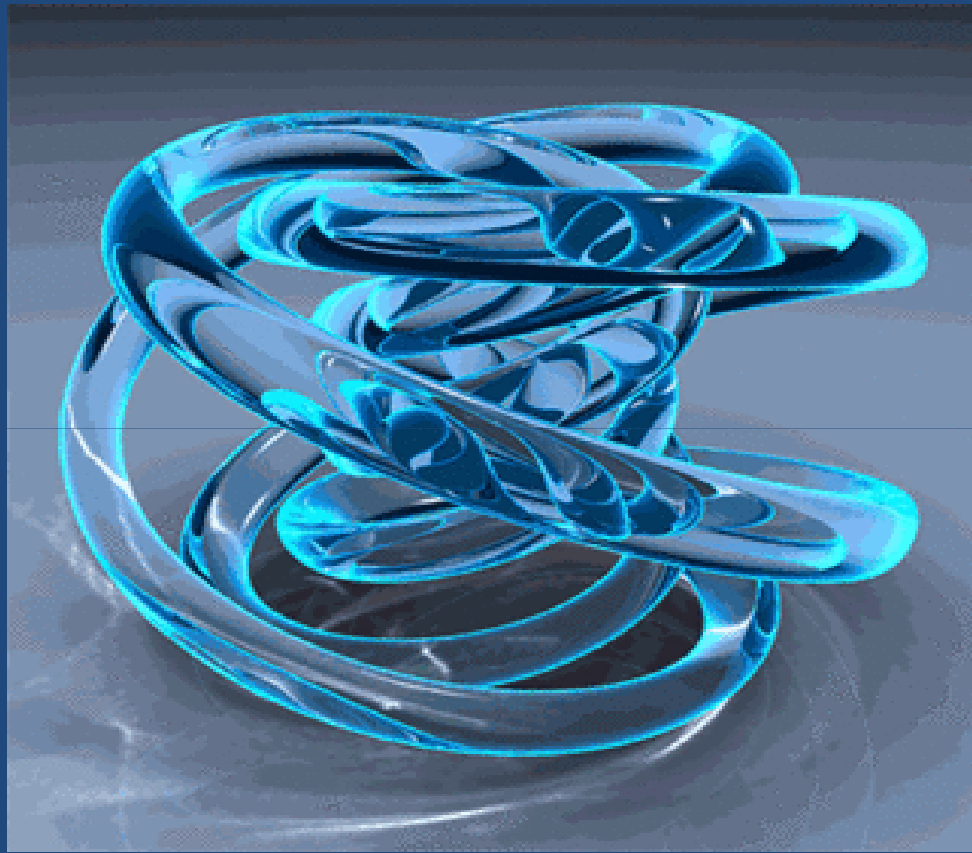
Όταν ένα τέτοιο σχέδιο σχηματίζει κλειστή καμπύλη, η καμπύλη λέγεται τροχιά.

Το εκκρεμές μπορεί να παρουσιάσει άπειρες τέτοιες τροχιές.

Συχνά τα διαγράμματα φάσης αποκαλύπτουν ότι η πλειοψηφία των τροχιών καταλήγουν να πλησιάζουν ένα κοινό όριο.

Το σύστημα τελικά εκτελεί την ίδια κίνηση για όλες τις αρχικές καταστάσεις σε μια περιοχή γύρω από την κίνηση, σχεδόν σαν να έλκεται το σύστημα σε αυτή την κίνηση.

Μια τέτοια ελκυστική κίνηση καλείται ελκυστής του συστήματος.





Ένας πρωτοπόρος της θεωρίας του χάους ήταν ο Edward Lorenz ο οποίος συμπτωματικά συνάντησε το φαινόμενο του χάους όσο δούλευε για την πρόβλεψη του καιρού το 1961. Αυτός χρησιμοποίησε ένα απλό πρόγραμμα προσομοίωσης του καιρού.

Εκεί ανακάλυψε ότι μικρές
διαφορές στις αρχικές συνθήκες
δίνουν τεράστιες διαφορές
στα τελικά αποτελέσματα.

Ο όρος “χάος” όπως
χρησιμοποιείται από τους
μαθηματικούς σήμερα πλάστηκε
από τον μαθηματικό
James A. Yorke.

Ο πρώτος τύπος μαθηματικής σκέψης που προϋπήρχε, χρησιμοποιεί σύμβολα και θεωρίες και είναι επικεντρωμένος στο να αναλύσει όλο και πιο πολύπλοκα συστήματα.

Με τη γέννηση της θεωρίας του χάους, δημιουργήθηκε ο δεύτερος τύπος μαθηματικής σκέψης που χρησιμοποιεί περισσότερο σχήματα και μορφές για να αποτυπώσει κάποια συμπεράσματα πιο εύκολα.

Η γλώσσα του χάους έχει ισχυρό
γεωμετρικό χαρακτήρα.

Η γεωμετρία χρησιμοποιείται
από τους ερευνητές για να
παρουσιάσουν τα δεδομένα τους,
όχι πλέον με πίνακες αριθμών
και απλά γραφήματα,
αλλά με πολυδιάστατες καμπύλες
και επιφάνειες.

Η Γεωμετρία Fractal
ήταν αυτή που ήρθε
να δώσει το κατάλληλο
μαθηματικό μοντέλο για τη
στήριξη της θεωρίας του Χάους.

Ο τύπος συμπεριφοράς που θα παρουσιάσει ένα σύστημα εξαρτάται από την αρχική κατάσταση και από τις παραμέτρους του συστήματος.

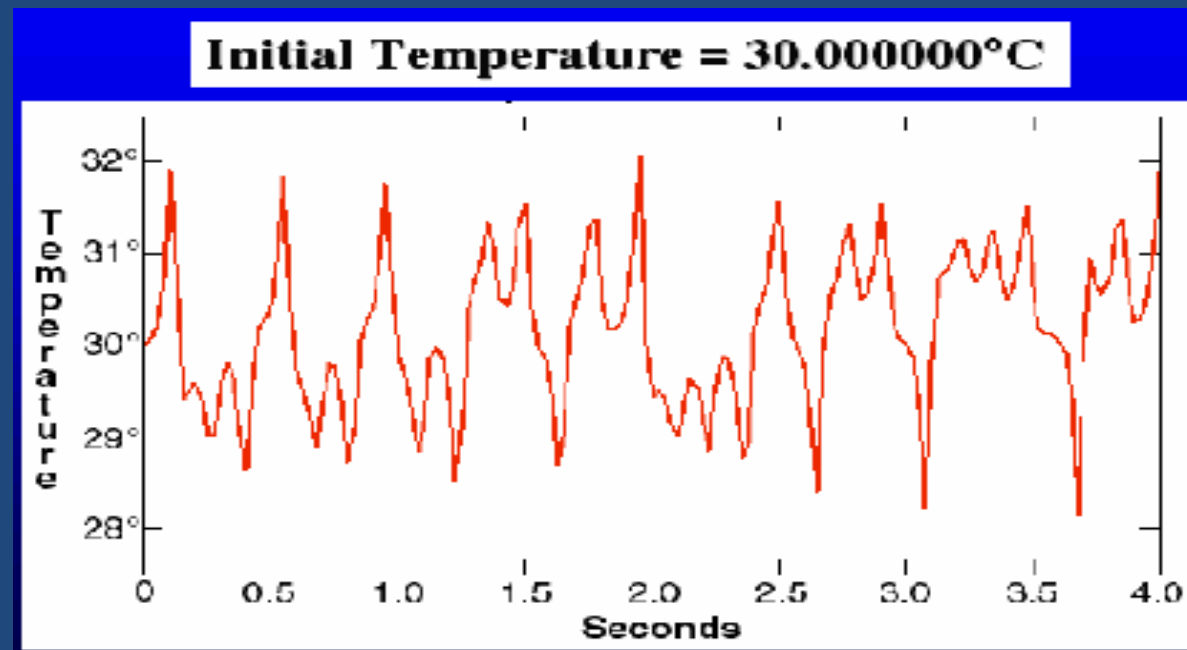
Εμείς εξετάζουμε την χαοτική κίνηση που έδωσε το όνομά της και στη θεωρία.

Κριτήριο για ένα δυναμικό σύστημα να εμφανίζει χαοτική κίνηση είναι να παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

Για παράδειγμα χρησιμοποιούμε κάποιες εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για να προβλεφτεί σε ένα μοντέλο η θερμοκρασία με την πάροδο του χρόνου.

Θέτουμε αρχική θερμοκρασία 30°C .

Το διάγραμμα χρόνου που παίρνουμε είναι το εξής:



Παρατηρούμε ότι η αλλαγή
θερμοκρασίας φαίνεται να είναι τυχαία
αλλά στην πραγματικότητα δεν υπάρχει
καμία απολύτως τυχειότητα γιατί όπως
είπαμε είναι απολύτως προβλέψιμη αφού
βασίζεται σε σταθερές μαθηματικές
εξισώσεις που έχουμε θέσει εμείς.

Τώρα κάνουμε μία μικροσκοπική αλλαγή στην αρχική θερμοκρασία.

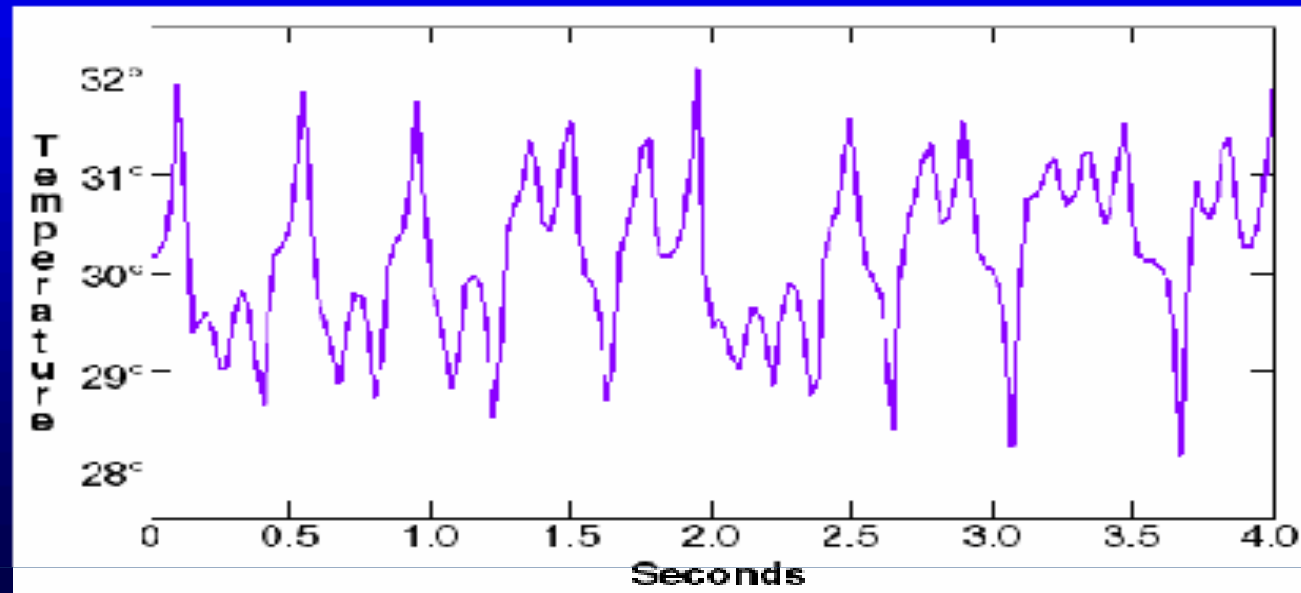
Την θέτουμε $30,000001^{\circ}\text{C}$.

Να έχουμε στον νου μας ότι τα ακριβέστερα θερμοόμετρα που μπορούμε να διαθέτουμε έχουν ακρίβεια μέχρι το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο.

Επομένως μία αλλαγή στο έκτο δεκαδικό θεωρείται αμελητέα.

Το διάγραμμα χρόνου που παίρνουμε τώρα είναι το εξής:

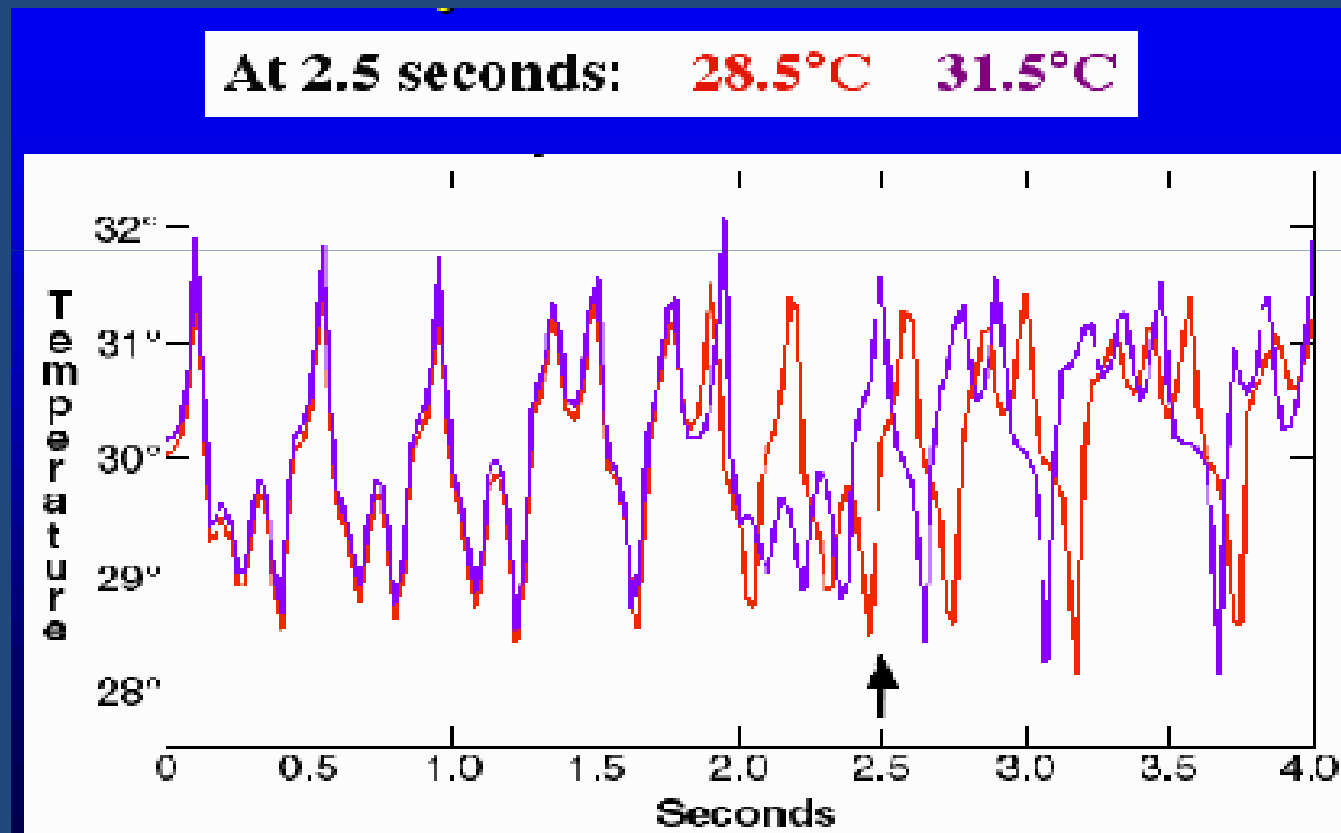
Initial Temperature = 30.000001°C



Με μια πρώτη ματιά δεν φαίνεται να υπάρχει διαφορά.

Έτσι θα μπορούσε κάποιος επιστήμονας να το προσπεράσει και να αρχίσει να δουλεύει σε οποιοδήποτε από τα δύο διαγράμματα για να βγάλει τα αποτελέσματά του.

Μπορούμε όμως να βασιζόμαστε σε αυτά τα αποτελέσματα; Για φανεί το μέγεθος της αλλαγής συγκρίνουμε τα δύο διαγράμματα:



Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι μετά από 2.5 δευτερόλεπτα τα δύο διαγράμματα χάνουν τον συγχρονισμό τους και δεν τον ξαναβρίσκουν ποτέ. Κάποιος δηλαδή που θα υπολόγιζε την θερμοκρασία στον χρόνο των 2.5sec από το πρώτο διάγραμμα θα την υπολόγιζε $28,5^{\circ}\text{C}$ ενώ κάποιος που θα επέλεγε το δεύτερο διάγραμμα θα την υπολόγιζε $31,5^{\circ}\text{C}$. Εμφανίστηκε δηλαδή μια διαφορά 3°C που είναι μια σημαντική διαφορά αν αναλογιστούμε την αφάνταστα μικρή διαφορά από την οποία ξεκίνησαν τα δύο διαγράμματα που είναι φυσικά μη αντιληπτή.

Το πρόβλημα με ένα σύστημα ευαίσθητο
στις αρχικές συνθήκες
είναι ότι μία μικρή διαφορά
συνεχώς την ενισχύει
και τελικά την κάνει αρκετά μεγάλη
ώστε να θεωρείται σημαντική.
Όσο πιο μικρή είναι αυτή η διαφορά,
τόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεται
για να μεγαλώσει με αυτόν τον τρόπο.
Αλλά μία διαφορά ακόμα και στο
δισεκατομμυριοστό δεκαδικό ψηφίο,
σε κάποια χρονική στιγμή θα γίνει
αρκετά σημαντική για να μας εμφανίσει
διαφορετικά αποτελέσματα.

Πρακτικά, η γνώση μας για τις αρχικές συνθήκες είναι περιορισμένες.

Στη Φυσική, οι πιο ακριβείς μετρήσεις γίνονται μέχρι το 12 δεκαδικό ψηφίο.

Επίσης δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ποια είναι η κατάσταση ενός συστήματος σε κάθε χωρικό του σημείο.

Οπότε αν αυτές οι μικροδιαφορές στις αρχικές συνθήκες ενισχύονται συνεχώς, μετά από ορισμένο διάστημα θα είναι αδύνατο να προβλέψουμε την κατάσταση του συστήματός μας.

Για ένα καρφί χάθηκε ένα πέταλο
Για ένα πέταλο χάθηκε ένα άλογο
Για ένα άλογο χάθηκε ένας ιππότης
Για έναν ιππότη χάθηκε ένα μήνυμα
Για ένα μήνυμα χάθηκε μια μάχη
Για μια μάχη χάθηκε ένας πόλεμος
Για έναν πόλεμο χάθηκε
ένα βασίλειο
Για ένα βασίλειο χάθηκε
μια αυτοκρατορία

ΧΑΟΣ

Αν αλλάξεις κάτι μικρό
ποτέ δε ξέρεις
μέχρι που θα φτάσει
αυτή η αλλαγή!

Έτσι προέκυψε το διάσημο ρητό του φαινομένου της πεταλούδας, σύμφωνα με το οποίο “το πέταγμα μιας πεταλούδας στην Ινδία μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα έναν τυφώνα στο Τέξας”.

Ποτέ δεν θα μπορέσουμε να μάθουμε αν αυτές οι μικροελάχιστες αλλαγές που προκαλεί στην ατμόσφαιρα το πέταγμα μιας πεταλούδας τι επιπτώσεις μπορεί να έχουν στο καιρό ανά τη Γη όχι για μια μόνο χρονική στιγμή αλλά και για αιώνες αργότερα!

Αυτή ήταν και η σημαντική ανακάλυψη του Edward Lorenz ο οποίος όπως προαναφέραμε στα ιστορικά, χρησιμοποιούσε ένα απλό πρόγραμμα προσομοίωσης του καιρού. Ήθελε να ξαναδεί μία ακολουθία αποτελεσμάτων και για να εξοικονομήσει χρόνο ξεκίνησε ξανά την προσομοίωση από τη μέση της προηγούμενης πληκτρολογώντας τις δεδομένες τιμές που είχε σε εκείνο το σημείο.

Προς έκπληξή του το πρόγραμμα προέβλεπε εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα.

Αυτό συνέβη μόνο γιατί θεώρησε περιττό να δηλώσει τα δεδομένα και με τα πέντε δεκαδικά ψηφία που του έδινε ο υπολογιστής αλλά μόνο με τρία.

Όταν είδε αυτές τις διαφορές εξεπλάγη και αναρωτήθηκε αν ο υπολογιστής του είχε κάποιο σφάλμα.

Εανά έκανε τους ίδιους υπολογισμούς σε άλλους υπολογιστές και ανακάλυψε ότι σε διαφορετικούς υπολογιστές παίρνει και διαφορετικά αποτελέσματα.

Η λέξη “χάος” χρησιμοποιείται γιατί
τα συστήματα που πολλαπλασιάζουν
το αρχικό σφάλμα επιδεικνύουν
πολύ ανώμαλα αποτελέσματα.
Αυτό δεν σημαίνει ότι τα αποτελέσματα
δεν ακολουθούν κάποιο σχέδιο.
Απλώς αυτό το σχέδιο δεν γίνεται εύκολα
αντιληπτό από το ανθρώπινο μάτι.
Δηλαδή το χάος δεν ισούται με την τυχαιότητα.

Ένα σύστημα θεωρείται τυχαίο,
όταν μία τιμή του σε μια ορισμένη
στιγμή δεν εξαρτάται από την τιμή
που είχε στις προηγούμενες στιγμές.
Έτσι αν γνωρίζουμε μία ακολουθία τιμών
σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές,
αυτό δεν θα μας δώσει την ικανότητα
να προβλέψουμε τις τιμές
που θα ακολουθήσουν.

Ένα τέτοιο παράδειγμα τυχαίου
συστήματος είναι όταν τραβάμε χαρτιά
από μία ανακατεμένη τράπουλα.

Το χαρτί που θα τραβήξουμε μία στιγμή
δεν σχετίζεται με τα χαρτιά που
τραβήξαμε στο παρελθόν ή που θα
τραβήξουμε στο μέλλον.

Ακόμα και αν κάποια στιγμή τύχει να
τραβήξουμε μία ακολουθία χαρτιών, για
παράδειγμα 3 3 2 7 8 5, που είχε
εμφανιστεί κάποια στιγμή στο παρελθόν
(9 8 3 3 2 7 8 5 6 2 4), κανένας δεν μας
διαβεβαιώνει ότι το επόμενο χαρτί θα
είναι αυτό που είχαμε τραβήξει αμέσως
μετά και στο παρελθόν, δηλαδή το 6.

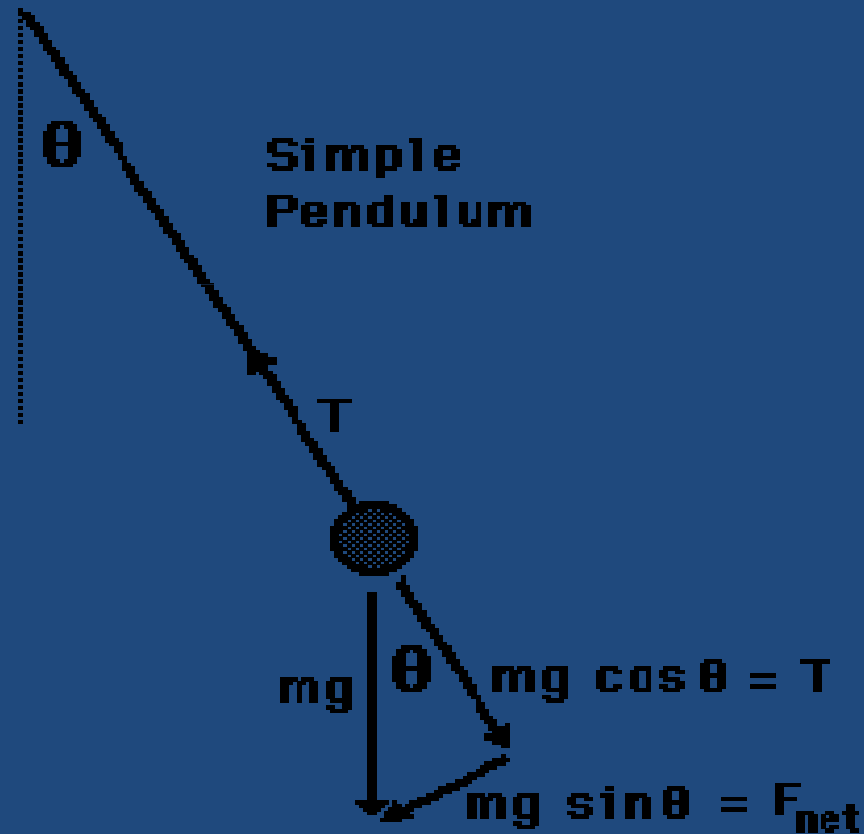
Αντιθέτως τα χαοτικά συστήματα δεν είναι έτσι.

Αυτά παραμένουν ντετερμινιστικά.

Γνώση από αρκετές προηγούμενες τιμές,
μας δίνει πληροφορίες για την επόμενη τιμή.
Βέβαια δεν μπορούμε επίσης να προβλέψουμε
με ακρίβεια το μέλλον γιατί πάντα
το σύστημα εξαρτάται από τα σφάλματα
στις αρχικές συνθήκες.

Δηλαδή η χαοτική κίνηση είναι προβλέψιμη
μόνο για το πολύ κοντινό μέλλον.

Ένα παράδειγμα χαστικής κίνησης είναι το απλό εκκρεμές. Το εκκρεμές εξηγείται απόλυτα από τους νόμους του Νεύτωνα.



Με αντικαταστάσεις στον νόμο $\Sigma F = ma$,
παίρνουμε την εξίσωση που μας προσδιορίζει
ανά πάσα στιγμή την θέση του εκκρεμούς

$$\Sigma F = ma \rightarrow$$

$$mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$g \sin \theta = \frac{d^2 x}{d^2 t}$$

Ενώ θεωρητικά θα έπρεπε αυτή η εξίσωση να μας δίνει τη δυνατότητα να προβλέπουμε τη θέση του εκκρεμούς, η αλήθεια είναι ότι μπορούμε να την προβλέπουμε μόνο για μικρό χρονικό διάστημα και όχι επ' αόριστον γιατί οι αριθμοί g και $\sin\theta$ (σε συγκεκριμένες θέσεις) έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Εμείς για τους υπολογισμούς μας θα χρησιμοποιούσαμε λίγα δεκαδικά ψηφία με αποτέλεσμα με την πάροδο του χρόνου να χάνουμε ολοένα και περισσότερο την ακριβή θέση του εκκρεμούς, έτσι ώστε να έφτανε κάποια στιγμή που εμείς ενώ θα το υπολογίζαμε σε μία ακραία θέση, αυτό θα ήταν στην ακριβώς αντίθετη!

Ο τροχός της ρουλέτας είναι επίσης
ένα χαοτικό σύστημα.

Στα μάτια του αδαούς
φαίνεται εύκολο να πει ότι είναι
ένα τυχαίο σύστημα.

Και όμως, θεωρητικά, είναι ένα
ντετερμινιστικό σύστημα αφού
πρέπει να υπακούει
στους νόμους του Νεύτωνα.

Έτσι αν γνωρίζουμε από ποιο ύψος θα πέσει η μπάλα, σε ποιο σημείο της ρουλέτας θα πέσει, το βάρος της μπάλας, την ταχύτητα με την οποία γυρνάει ο τροχός και τις διαστάσεις του τροχού, τότε πρέπει να βρισκόμαστε σε θέση να υπολογίσουμε με διάφορες εξισώσεις πως θα κινηθεί η μπάλα, τι άλματα θα κάνει και τελικά σε ποιο σημείο ακριβώς θα σταματήσει.

Όμως πρακτικά, αυτό το σύστημα είναι πολύ ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες.

Έτσι αν κάνουμε ένα μικροσκοπικό λάθος μέτρησης (πράγμα πολύ λογικό αν αναλογιστούμε όλες τις ανωμαλίες μιας ρουλέτας), όλα αυτά τα στάδια που πρέπει να περάσει η μπάλα θα ενισχύσουν το λάθος και τελικά θα έχουμε μία εντελώς διαφορετική θέση της μπάλας από αυτήν που προβλέψαμε.

Φυσικά άλλο ένα τέτοιο παράδειγμα
χαστικού μοντέλου είναι ο καιρός.

Για να μπορούμε να προβλέπουμε τον
καιρό, θα έπρεπε να ξέρουμε επακριβώς
τις αρχικές συνθήκες.

Αυτές είναι η θερμοκρασία
και η ατμοσφαιρική πίεση.

Με πόσο ακρίβεια όμως θα μπορούσαμε
να τις καταμετρήσουμε όταν τα πιο
ακριβή θερμόμετρα και βαρόμετρα
περιορίζονται στα δύο δεκαδικά ψηφία.

Θα έπρεπε να εφεύρουμε μία μηχανή να καταμετράει με ακρίβεια απείρων δεκαδικών ψηφίων αυτές τις δυο παραμέτρους. Αλλά δεν αρκεί αυτό. Επίσης θα έπρεπε να ξέρουμε τις τιμές για οποιοδήποτε σημείο της ατμόσφαιρας. Άρα θα έπρεπε να γεμίσουμε την ατμόσφαιρα με αυτήν τη νοητή μηχανή. Αυτό είναι αδύνατο. Στην πραγματικότητα οι μετρήσεις γίνονται σε σημεία που απέχουν αρκετά χιλιόμετρα μεταξύ τους.

Ακριβώς όπως η Θεωρία του Χάους προβλέπει, η ιστορική πορεία των χρηματιστηρίων μας διδάσκει ότι τα μικρά, φαινομενικά ασήμαντα γεγονότα μπορούν να έχουν τεράστιες συνέπειες στην εξέλιξη των πραγμάτων. Μικρές αλλαγές, οριακές, μπορεί να προκαλέσουν δραστικές μη προσδοκώμενες μεταβολές.

Συζήτηση - Συμπεράσματα

Η θεωρία του χάους
“τάραξε τα νερά” στις επιστήμες.

Αυτή η ανακάλυψη
δημιούργησε χάος
στον επιστημονικό κόσμο
όσον αφορά τις κλασσικές
μεθόδους και την ακρίβεια
των αποτελεσμάτων.

Όμως όλο αυτό το οικοδόμημα δεν στάθηκε
ικανό να εξηγήσει όλες τις πτυχές
της καθημερινότητάς μας.

Αυτά τα κενά που αφήνουν πάντα οι
κλασσικές θεωρίες, είναι το ερέθισμα για τους
ανορθόδοξους επιστήμονες να ανακαλύψουν
ένα νέο θαυμαστό κόσμο που τόσο καιρό ήταν
μπροστά μας και δεν τον βλέπαμε.

Έτσι η θεωρία του χάους δημιουργήθηκε
πάνω στα κενά που άφηναν οι νόμοι του
Νεύτωνα και του Κέπλερ, με αποτέλεσμα να
αμφισβητήσει ένα πολύ μεγάλο αριθμό
επιστημονικών καθιερωμένων.

Ένα από τα βασικά προβλήματα που παρουσιάζει στην ιστορία της η επιστημονική κοινότητα είναι η θεοποίηση κάποιων αποτελεσμάτων και η απόλυτη αποδοχή τους.

Έτσι όταν εμφανίζεται κάποια νέα ανακάλυψη που έρχεται σε σύγκρουση με τα κοινώς αποδεκτά, η συνήθης κατάληξή της είναι η περιθωριοποίησή της.

Για να μπορέσει μία θεωρία σαν αυτή του χάους που συγκρούεται με όλες τις αυταξίες όλων των επιστημών να εισακουστεί στην επιστημονική κοινότητα, σημαίνει ότι κάτι είχε αλλάξει στην ανθρώπινη σκέψη.

Όπως είχε πει ο Richard P. Feynman
“Οι φυσικοί τους αρέσει να σκέφτονται το ότι
το μόνο που έχουν να πουν είναι,
αυτές είναι οι συνθήκες,
τι συμβαίνει μετά;”

Η θεωρία του χάους είχε ήδη ένα μεγάλο αντίκτυπο στην επιστήμη,
αλλά έχουν μείνει πολλά
να ανακαλυφθούν ακόμα.

Στον νου του ανθρώπου δημιουργήθηκαν τόσες πολλές απορίες και η ανάπτυξη των κλασικών επιστημών δε ήταν σε θέση να τις απαντήσει.

Εξεπλάγη όταν είδε ότι το χάος υπάρχει παντού γύρω του, από το ίδιο του το σώμα και όλα του τα κατορθώματα, μέχρι την ίδια την φύση και ολόκληρο το σύμπαν.

Ο ανθρώπινος νους τις τελευταίες δεκαετίες έχει την τάση να αμφισβητεί οτιδήποτε και να μη δέχεται τίποτα από την αρχή.

Με τη θεωρία αυτή αρχίζει και γεννιέται η αμφιβολία στα μυαλά των απλών ανθρώπων.

Αρχίζουν και αναρωτιούνται για το αν γνωρίζουν τελικά τίποτα για τον κόσμο γύρω τους και για το αν θα μπορέσουν ποτέ να αντιληφθούν την πραγματικότητα.

Άλλωστε όπως είχε πει ο Stephen Hawking, ο άνθρωπος για να παραμείνει αυτό που είναι, είναι καταδικασμένος να μην φτάσει ποτέ στην απόλυτη γνώση, γιατί αυτή είναι μόνο θεϊκή ικανότητα.

Αυτή η αντίληψη της άγνοια μας δημιουργήθηκε από την ουσία της θεωρίας του χάους, δηλαδή της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες. Όπως προαναφέραμε ένα παραμικρό λάθος στις αρχικές συνθήκες μπορεί να ενισχυθεί άπειρες φορές και να μας εμφανίσει χάος.

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι για να μπορέσουμε να εξαλείψουμε το χάος από το σύστημα μας θα έπρεπε να έχουμε άπειρη ακρίβεια στις αρχικές συνθήκες.

Κάτι τέτοιο βέβαια δεν μπορεί να γίνει δυνατό. Ενώ οι κλασικές επιστήμες θα έχουν για πάντα ως σκοπό την αύξηση της ακρίβειας στις μετρήσεις αλλά πάντα θα περιορίζονται από την αργή ή γρήγορη εμφάνιση του χάους, η εφαρμογή της θεωρίας του χάους θα μας δώσει την ικανότητα να μελετήσουμε τις χαοτικές συμπεριφορές των συστημάτων και να εξερευνήσουμε πτυχές τους που μέχρι τώρα παρέμειναν ανέπαφες.

Παρατηρήσαμε ότι το σύμπαν
δεν είναι κατασκευασμένο
με τα μαθηματικά μοντέλα
που οι επιστήμονες σαν το Γαλιλαίο
και τον Κέπλερ ονόμασαν
νόμους της φύσης.

Αντίθετα η φύση αποτελείται
κατά κύριο λόγο από fractals.

Τα κύματα των ωκεανών, η κίνηση του
αέρα, τα φυτά, τα ζώα,
οι πλανήτες και οι γαλαξίες
είναι fractals.

Όλη η μελέτη που είχαν κάνει οι διάφοροι επιστήμονες για αυτά, δεν ήταν τίποτα από μη ακριβή μοντέλα, τα οποία βασιζόνταν στην εξιδανίκευση (ιδανικά αέρια) και την απλοποίηση (τύποι πληθυσμιακής οικολογίας), για να μπορέσουν να δώσουν κάποια αποτελέσματα.

Τώρα πλέον με τη γνώση μας για τις ιδιότητες των fractals και την εφαρμογή τους σε όλα αυτά τα επίπεδα, μας δίνει το δικαίωμα να ελπίζουμε σε πιο ποιοτικά αποτελέσματα από αυτά που παίρναμε μέχρι τώρα.

Οι επιστήμονες άρχισαν να στρέφονται προς τα μη γραμμικά δυναμικά και προς τις χαοτικές συμπεριφορές που επιδεικνύουν για να αποδώσουν σωστότερα τα αποτελέσματά τους. Ειδικά στην πληθυσμιακή οικολογία, με την εφαρμογή της θεωρίας μπορέσαμε επιτέλους να εξηγήσουμε την απρόβλεπτη συμπεριφορά των διαφόρων πληθυσμών ειδών του πλανήτη μας.

Τελικά αυτή θεωρία που
συντάραξε τα θεμέλια των
σύγχρονων επιστημών έχει
πολλά πλεονεκτήματα.

Πλεονέκτημα ήταν ότι επιτέλους
εξηγήθηκαν όλες αυτές οι
ανωμαλίες που εμφανίζονταν στα
διάφορα πειράματα και μοντέλα.

Επίσης ότι έγινε δυνατό να
διαχωριστούν τα συστήματα που
συμπεριφερόντουσαν τυχαία,
χωρίς κανένα πρότυπο,
από αυτά που
συμπεριφερόντουσαν χαοτικά,
τα οποία αν και φαίνονται επίσης
τυχαία, στην πραγματικότητα
ακολουθούν κάποιο
κρυμμένο πρότυπο.

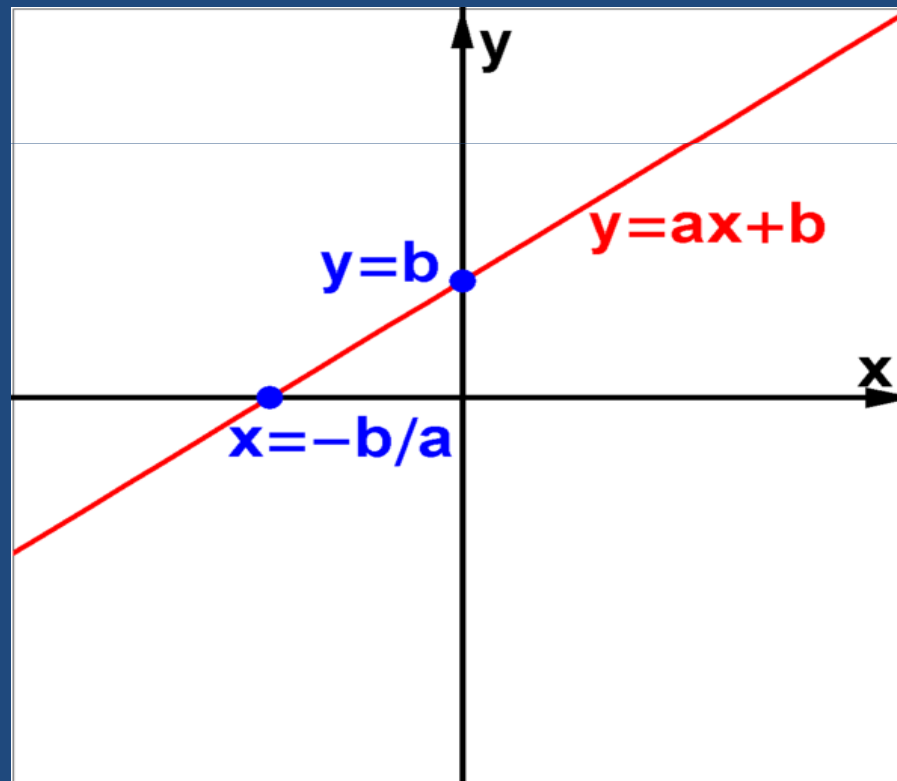
Επιπροσθέτως η κατανόηση των ιδιοτήτων των fractals, βοήθησε με την σειρά της στην κατανόηση των πτυχών της φύσης που παρουσιάζουν fractal μορφή, στη μελέτη των ιδιοτήτων τους και στην καλύτερη αντίληψη της συμπεριφοράς τους.

Επίσης η ανακάλυψη των fractals
μας έδωσε την έμπνευση για δημιουργία
ιδανικότερων υλικών και σχημάτων
που έκαναν καλύτερη
την καθημερινή μας ζωή.

Μοναδικό μειονέκτημα ήταν ότι γέμισε
την επιστημονική κοινότητα με
αμφισβήτηση για τα δεδομένα της
και αποκάλυψε την ανικανότητά μας
για την πλήρη γνώση
του σύμπαντος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

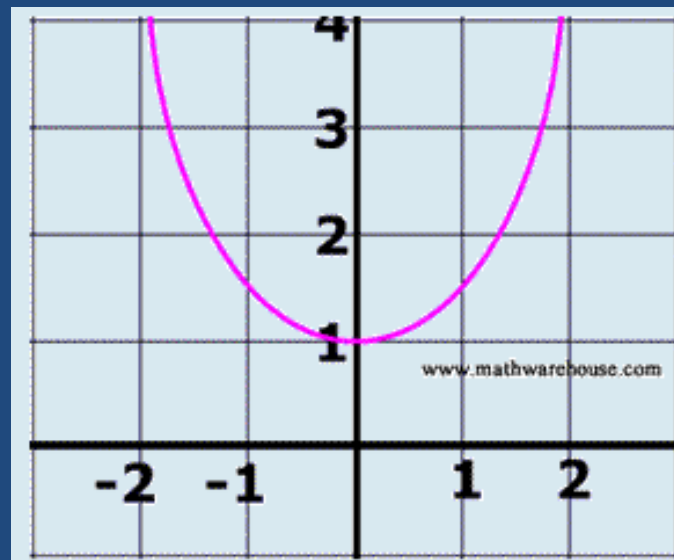
Γραμμική λέγεται η εξίσωση που έχει ως γραφική παράσταση μια ευθεία: $f(x) = ax + b$



Μη γραμμική λέγεται η εξίσωση που ο άγνωστος είναι υψωμένος σε κάποια δύναμη διαφορετική του 1.

Έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που αλλάζει ανάλογα με το είδος της εξίσωσης.

Π.χ. $f(x) = ax^2 + bx + c$



Ένα σύστημα είναι ένα σετ εξισώσεων που περιγράφουν μια κατάσταση.

Στη Φυσική πρακτικά όλα τα φαινόμενα που περιγράφουμε είναι συστήματα εξισώσεων, δηλαδή υπάρχει μια εξίσωση για την ενέργεια, μια για την ταχύτητα, μια για τη θέση και οι κοινές λύσεις των εξισώσεων αυτών μας περιγράφουν σε μια δεδομένη χρονική στιγμή την κατάσταση του φαινομένου.

Γραμμικό είναι ένα σύστημα που αποτελείται μόνο από γραμμικές εξισώσεις.

Οι λύσεις του συστήματος «οπτικά» είναι οι τομές των ευθειών.

Μη γραμμικό είναι το σύστημα που περιέχει τουλάχιστον μια μη γραμμική εξίσωση μέσα.

Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται από μη γραμμικά συστήματα.

Δυναμικό λέγεται το σύστημα το οποίο εξαρτάται από το αποτέλεσμα του για να περιγράψει τη μελλοντική κατάσταση του φαινομένου.

Παράδειγμα ενός μη δυναμικού
γραμμικού συστήματος

θα ήταν το εξής:

$$f(x) = 2x + 1$$

ανάλογα την τιμή που παίρνει το x
(η τιμή είναι ανεξάρτητη του
φαινομένου θα μπορούσε π.χ.
να είναι ο χρόνος ή η μάζα)
παίρνουμε και μια λύση.

Ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα θα έμοιαζε κάπως έτσι:

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{και} \quad x = f(x)$$

δηλαδή στο τέλος τροφοδοτούμε στο σύστημα τη λύση του. Αν π.χ. ξεκινήσουμε με

$$x = 1, \quad f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

οπότε η επομένη κατάσταση του συστήματος θα είναι η

$$\text{για } x = 2, \quad f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ κτλ.}$$

Το λέμε δυναμικό γιατί είναι αυτομεταβαλλόμενο δηλαδή, το αποτέλεσμα του επηρεάζει τη μελλοντική του κατάσταση.

Η θεωρία του χάους αφορά τη μελέτη μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Ένα πολύ απλό παράδειγμα μη γραμμικού δυναμικού συστήματος:

$$f(x) = x^2 + c \text{ και } x = f(x)$$

όπου c πραγματικός αριθμός

Η πρώτη τιμή του x θα προσδιορίσει τι θα γίνει το σύστημα μετά από n επαναλήψεις.

Αν θεωρήσουμε ότι $c = 0$ τότε έχουμε τις εξής πιθανές καταλήξεις του συστήματος.

(αν πάρουμε την γραφική παράσταση των τιμών που θα παίρνει το σύστημα λέμε ότι έχουμε την "τροχιά" του).

Αν το $x > 1$ το σύστημα πάει
στο άπειρο γιατί:

$$f(2)=4$$

$$f(4)=8$$

$$f(8)=64$$

...

Αν το $x = 1$ το σύστημα πάει
στο 1 γιατί:

$$f(1) = 1$$

$$f(1) = 1$$

...

Αν το $x < 1$ το σύστημα πάει
στο μηδέν γιατί:

$$f(1/2) = 1/4$$

$$f(1/4) = 1/8$$

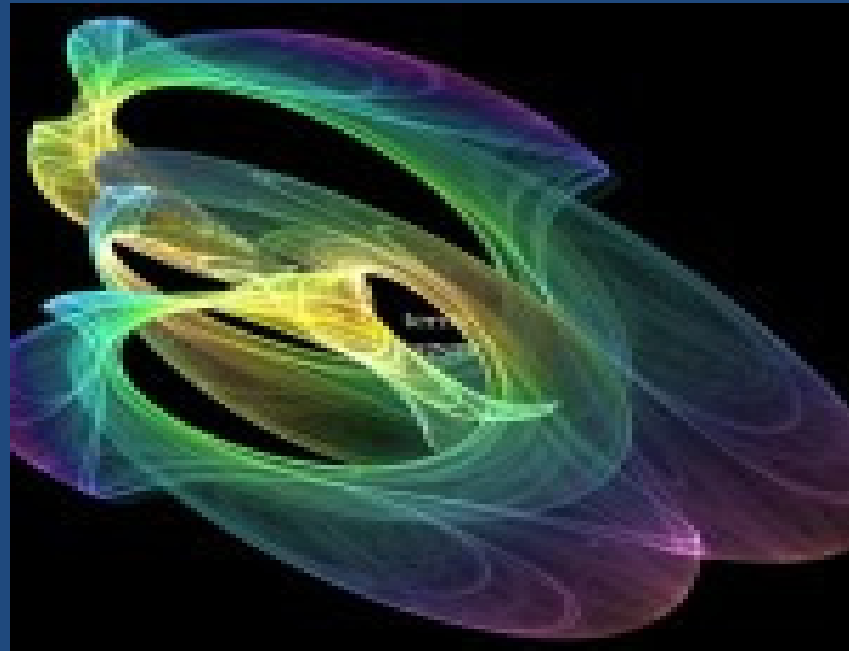
$$f(1/8) = 1/64$$

...

Το μηδέν και το άπειρο τα λέμε σημεία
έλξης της τροχιάς του συστήματος και
το 1 το λέμε σημείο απώθησης.

Σ' αυτές τις σχετικά απλές περιπτώσεις
μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το
σύστημα "καταλήγει" κάπου,
παρότι παίρνει άπειρες τιμές
σ' όλο το χώρο,
το μεγαλύτερο μέρος αυτών των τιμών
"συσσωρεύεται" κοντά
στο άπειρο ή το μηδέν.

Αν βάλουμε το c στο παιχνίδι
ως διάφορο του μηδενός
και ξεκινάμε με αρχική τιμή του x
το μηδέν για λόγους ευκολίας
η συμπεριφορά του συστήματος
αλλάζει δραματικά.



Βιβλιογραφία

- Professor Ian Stewart, Mathematics Institute, University of Warwick, Chaos and complexity, Concepts I, *Sensitivity to Initial Conditions*, Euro Pace, 2000
- Professor Ian Stewart, Mathematics Institute, University of Warwick, Chaos and complexity, Concepts II, *Strange Attractors*, Euro Pace, 2000
- Professor Ian Stewart, Mathematics Institute, University of Warwick, Chaos and complexity, Concepts I, *Fractals*, Euro Pace, 2000
- Benoit Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982
 - Ian Stewart, *Does God Play Dice?*, Penguin, 1989
 - Francis C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics*
 - David Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*

Επίσης πολλές πληροφορίες πάρθηκαν από τις παρακάτω ηλεκτρονικές σελίδες:

www.alumni.imsa.edu.htm

www.en.wikipedia.org.htm

www.mathworld.wolfram.com.htm

www.people.bath.ac.uk.htm

www.universe-review.ca.htm

www.dhusara.com.htm

www.duke.edu.htm

www.ecotao.com.htm

www.hk-phy.org.htm

www.imho.com.htm

www.jracademy.com.htm

www.kheeper.net.htm

www.lifsmith.com.htm

www.mathjmendl.org.htm

www.mindtrap.gr.htm

www.ncbi.nlm.nih.gov.htm

www.ortho.lsuhs.edu.htm

www.physics4u.gr.com

www.win.ca.htm

www.chaos.umd.edu.htm



ΤΕΛΟΣ