

Η ΜΑΓΕΙΑ ΤΩΝ FRACTALS-



ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ – ΣΦΑΕΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

*Σχεδόν ο καθένας μας
έχει θαυμάσει
κάποιες εικόνες fractals
από αυτές που κυκλοφορούν
κατά χιλιάδες σε ημερολόγια,
περιοδικά, internet κλπ.*

*Πολλοί άνθρωποι τα βλέπουν
δίχως να γνωρίζουν
τι είναι αυτές
οι φανταστικές έγχρωμες εικόνες
και πως δημιουργούνται.*

*Μερικοί έχουν ακούσει
πως υπάρχει κάποια
σύνδεσή τους
με ορισμένα
φυσικά αντικείμενα
δίχως να αντιλαμβάνονται
ποιά σύνδεση εννοείται.*





*Τα fractals είναι ένας νέος κλάδος
των Μαθηματικών και της Τέχνης.
Είναι ο λόγος που οι περισσότεροι
άνθρωποι αναγνωρίζουν τα fractals
μόνο σαν όμορφες εικόνες,
χρήσιμα ως φόντο
στην επιφάνεια εργασίας του Η/Υ
ή ως πρότυπα στα καρτ - ποστάλ.*



*Στη Γεωμετρία του σχολείου
μαθαίνουμε για τις γραμμές,
τους κύκλους,
τα τετράγωνα,
τους κύβους,
τους κυλίνδρους
και τις σφαίρες.*

Στη φύση γύρω μας
επικρατούν άλλου είδους σχήματα:
τα σύννεφα, οι κεραυνοί,
οι παγοκρύσταλλοι, τα σφουγγάρια
και οι ακτογραμμές
παρουσιάζουν μια πολυπλοκότητα
που δεν μοιάζει καθόλου με τα απλά
γεωμετρικά αντικείμενα
της «κλασικής» Γεωμετρίας.

*Το fractal είναι ένα σύνολο
που δε μοιάζει μ' ένα
Ευκλείδειο αντικείμενο
(σημείο, γραμμή, επίπεδο, κλπ.)
όσο κοντά κι αν το εξετάζουμε.*



Η λέξη *Fractal*

προέρχεται

από την λατινική λέξη

frangere

ή από το λατινικό *fractus*

(σπάζω, θρυμματίζω,

δημιουργώ ακανόνιστα κομμάτια).

*Ο Κ. Falconer στο βιβλίο του
Fractal Geometry γράφει :*

*Η λέξη φράκταλ είναι
σαν τη λέξη ζωή .*

*Μπορείς να περιγράψεις
τις βασικές της ιδιότητες
και τα θεμελιώδη στοιχεία
που την αποτελούν αλλά δεν μπορείς
να την κλείσεις σε έναν ορισμό.*



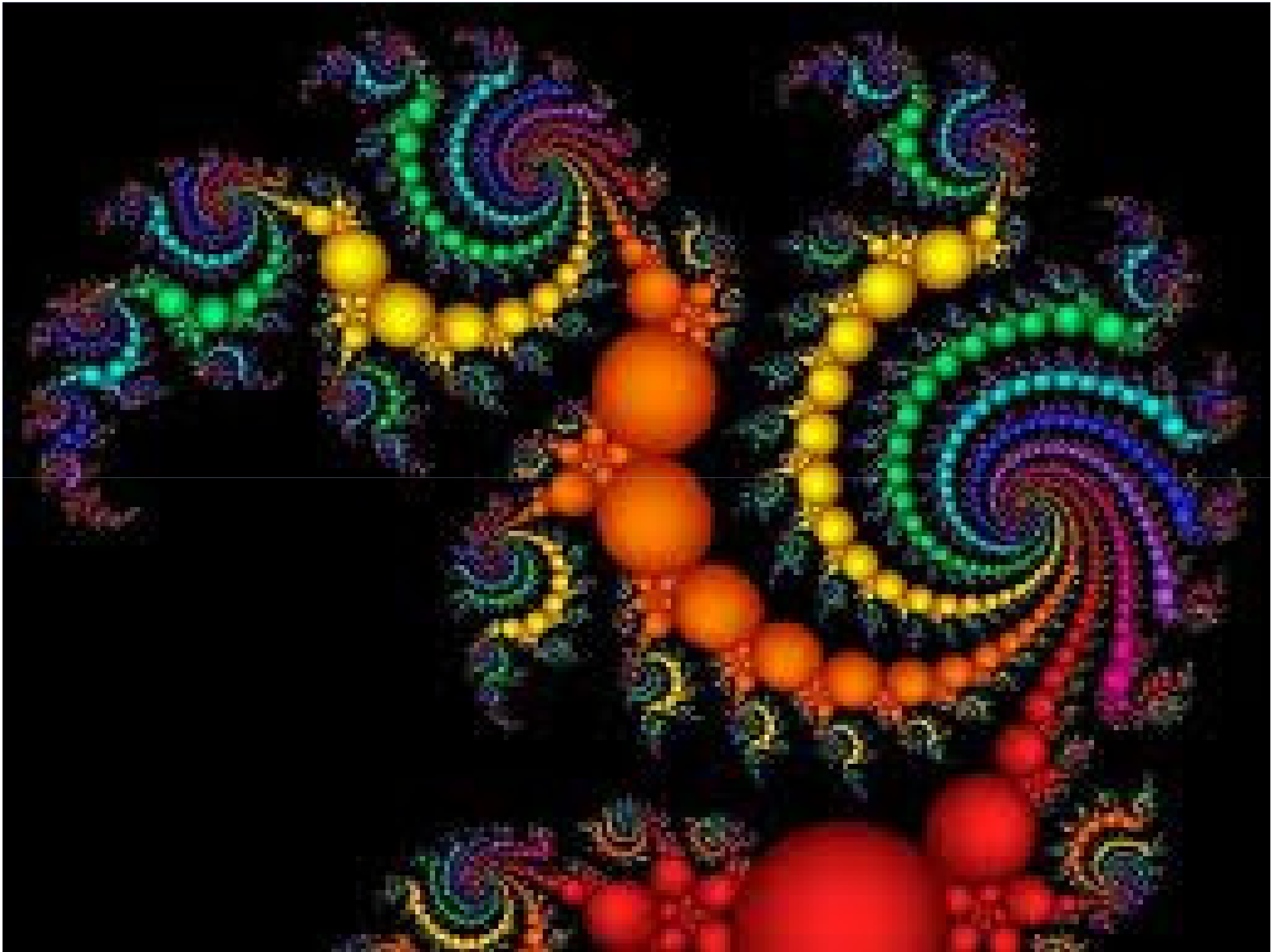
*Με τον διεθνή όρο fractals στα
Μαθηματικά, τη Φυσική αλλά και σε
πολλές επιστήμες ονομάζεται
ένα γεωμετρικό σχήμα που
επαναλαμβάνεται αυτούσιο
σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης
κι έτσι συχνά αναφέρεται σαν
"απείρως περίπλοκο".*

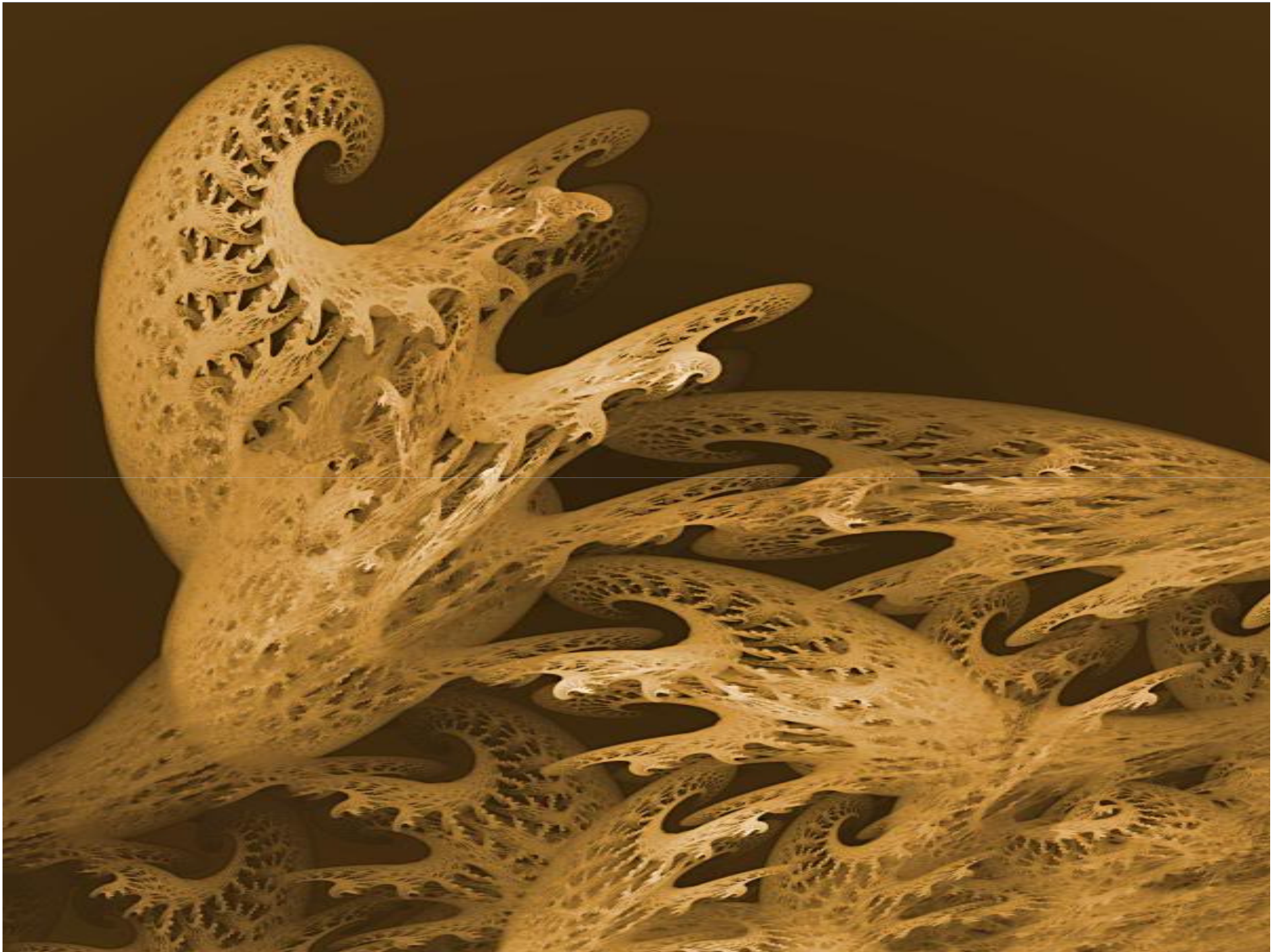
*Το fractal παρουσιάζεται ως
"μαγική εικόνα" που όσες φορές
και να μεγεθυνθεί οποιοδήποτε
τμήμα του θα συνεχίζει να
παρουσιάζει ένα εξίσου
περίπλοκο σχέδιο με μερική ή
ολική επανάληψη του αρχικού.*

*Χαρακτηριστικό επομένως των
φράκταλ είναι η λεγόμενη
αυτο-ομοιότητα (self-similarity)*









Ο Mandelbrot (1975)

είναι εκείνος
που εισήγαγε τόσο τον όρο
όσο και τη θεωρία
των *Fractals* στην επιστήμη
και για το λόγο αυτό
θεωρείται ένας από τους
σπουδαιότερους μαθηματικούς
των τελευταίων 50 ετών.



Ο Μπενουά Μάντελμπροτ (1924-2010)

Γαλλοαμερικανός μαθηματικός.

Γεννημένος στην Πολωνία, μετακόμισε στη Γαλλία με την οικογένειά του όντας ακόμη σε παιδική ηλικία.

Πέρασε μεγάλο μέρος της ζωής του διαμένοντας και δουλεύοντας στις Ηνωμένες Πολιτείες, αποκτώντας διπλή γαλλική και αμερικανική υπηκοότητα.

*Η χρήση των fractals επεκτάθηκε
από τη στιγμή που μπήκαν
εδώ και είκοσι χρόνια
τα computers
αφού είναι σύνθετα σχέδια
που δημιουργούνται με τη βοήθεια
πολύπλοκων υπολογισμών.*

*Αλλά ενώ οι εικόνες
είναι πολύπλοκες,
το πρόγραμμα (software)
που απαιτείται δεν είναι,
αφού η σχεδίαση των εικόνων
βασίζεται στην επανάληψη ενός
μοτίβου, που σχεδιάζεται με τη
βοήθεια μιας συνάρτησης.*

Το 1967 ο Mandelbrot

έθεσε το ερώτημα:

*«Πόσο μεγάλη είναι
η ακτογραμμή
της Βρετανίας;»*

Διαπιστώνουμε ότι
η απάντησή μας
μεταβάλλεται ανάλογα
με την κλίμακα του χάρτη
και τη μονάδα μέτρησης
που χρησιμοποιούμε.



Η Μ. Βρετανία με fractals

*Η μέτρηση του μήκους
της ακτογραμμής,
διαφέρει ανάλογα
με το μήκος του «χάρακα»
που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση
(όσο πιο μικρός ο χάρακας,
τόσο πιο μεγάλο το μήκος της ακτής,
το γνωστό coastline paradox).*



*Όσο η κλίμακα της μέτρησης
μειώνεται, τόσο το εκτιμώμενο
μήκος αυξάνεται.*

*Εάν η κλίμακα γίνει απείρως
μικρή, το μήκος που μετράται
θα γίνει απείρως μεγάλο!*



*Η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα
των φράκταλ είναι γενικά
η περίπλοκη μορφή τους,
σε σύγκριση με τα συμβατικά
γεωμετρικά σχήματα.
Δεν είναι αντικείμενα
τα οποία μπορούν να οριστούν
με τη βοήθεια της
Ευκλείδειας γεωμετρίας.*

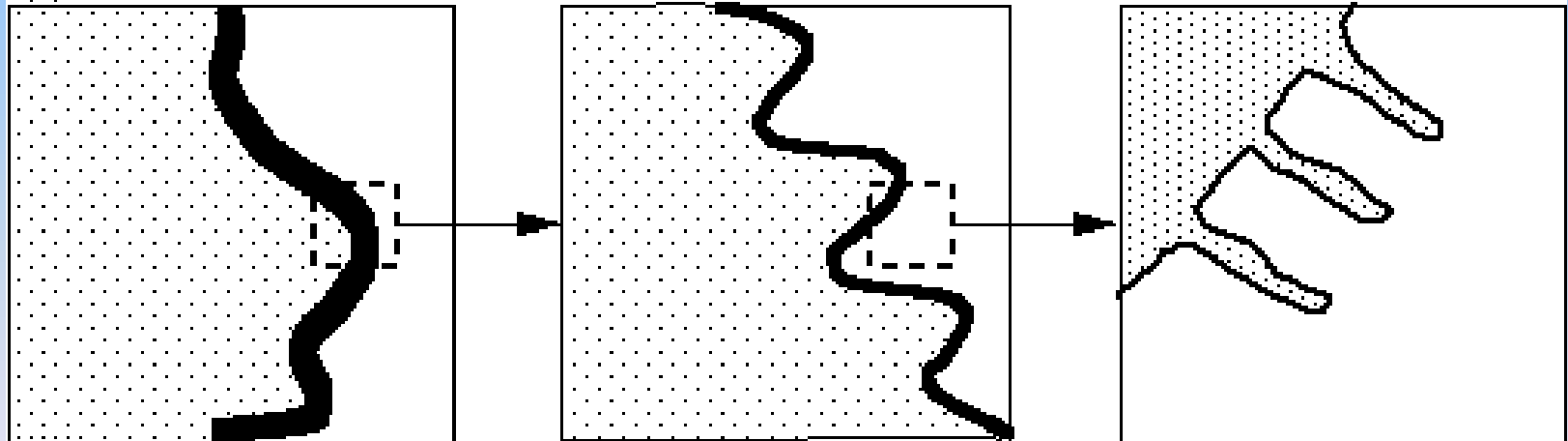
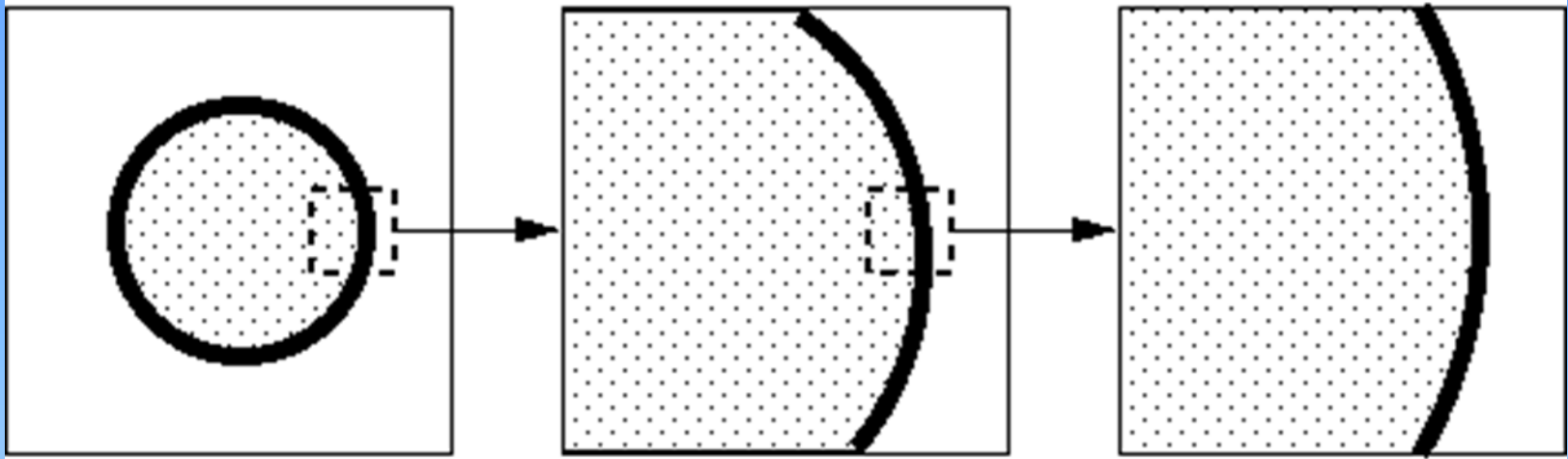
*Τα fractals ,
έχουν λεπτομέρειες,
οι οποίες
γίνονται ορατές
μόνο μετά από μεγέθυνσή τους
σε κάποια κλίμακα.*

*Για να γίνει αντιληπτός
αυτός ο διαχωρισμός
των fractals σε σχέση
με την Ευκλείδεια Γεωμετρία,
αναφέρουμε ότι:*

*Αν μεγεθύνουμε κάποιο αντικείμενο
το οποίο μπορεί να οριστεί
με την Ευκλείδεια Γεωμετρία,
παραδείγματος χάριν
την περιφέρεια μιας έλλειψης,
αυτή μετά από αλληπάλληλες
μεγεθύνσεις
θα εμφανίζεται απλά
ως ευθύγραμμο τμήμα.*



*Αντίθετα, σε ένα fractal,
θα εμφανίζονται
κατόπιν μεγεθύνσεων
λεπτομέρειες
που δεν ήταν ορατές
σε μικρότερη κλίμακα
μεγέθυνσης.*



*Δεν υπάρχει χαρακτηριστική κλίμακα
για να καθορίσουμε τα χαρακτηριστικά
ενός fractal αντικειμένου.*


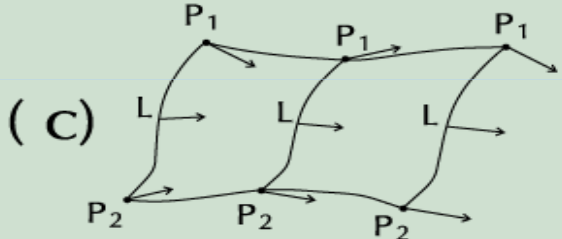
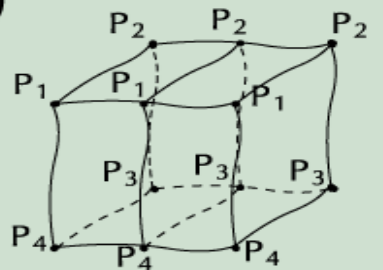
*Αλλάζοντας την κλίμακα,
μετράμε με όλο και
μεγαλύτερη ακρίβεια,
συμπεριλαμβάνοντας όλο και
περισσότερα χαρακτηριστικά.*



*Επομένως,
το μήκος, η επιφάνεια ή ο όγκος,
εξαρτώνται από την ανάλυση
που θα χρησιμοποιήσουμε
στη μέτρηση.*



Η στοιχειώδης έννοια της Ευκλείδειας Διάστασης

(a) \bullet <u>P</u>	POINT
(b)  <u>L</u>	LINE
(c)  <u>S</u>	SURFACE
(d)  <u>V</u>	VOLUME

Τα σημεία είναι απλά...σημεία.
Δεν κατέχουν όγκο μέσα στο χώρο
και δεν έχουν ούτε μήκος ούτε εμβαδόν.
Άρα, λέμε ότι έχουν **Διάσταση μηδέν**.
Κατά τα λεγόμενα του Ευκλείδη:
“Σημείου εστί ό ού μέρος ουδέν”

Σημείο είναι κάτι
που δεν έχει μέρη,
δε διαμερίζεται.

Με τις γραμμές τα πράγματα είναι
κάπως πιο περίπλοκα.

Ενώ όλα τα σημεία φαίνονται ίδια,
οι γραμμές εμφανίζονται σε μια απέραντη
ποικιλία σχημάτων.

Έτσι, έχουμε ευθείες γραμμές, κύκλους,
παραβολές, και άλλα πιο ακανόνιστα και
περίπλοκα σχήματα, όπως θηλιές, κόμπους
και μπερδεμένα συμπλέγματα.

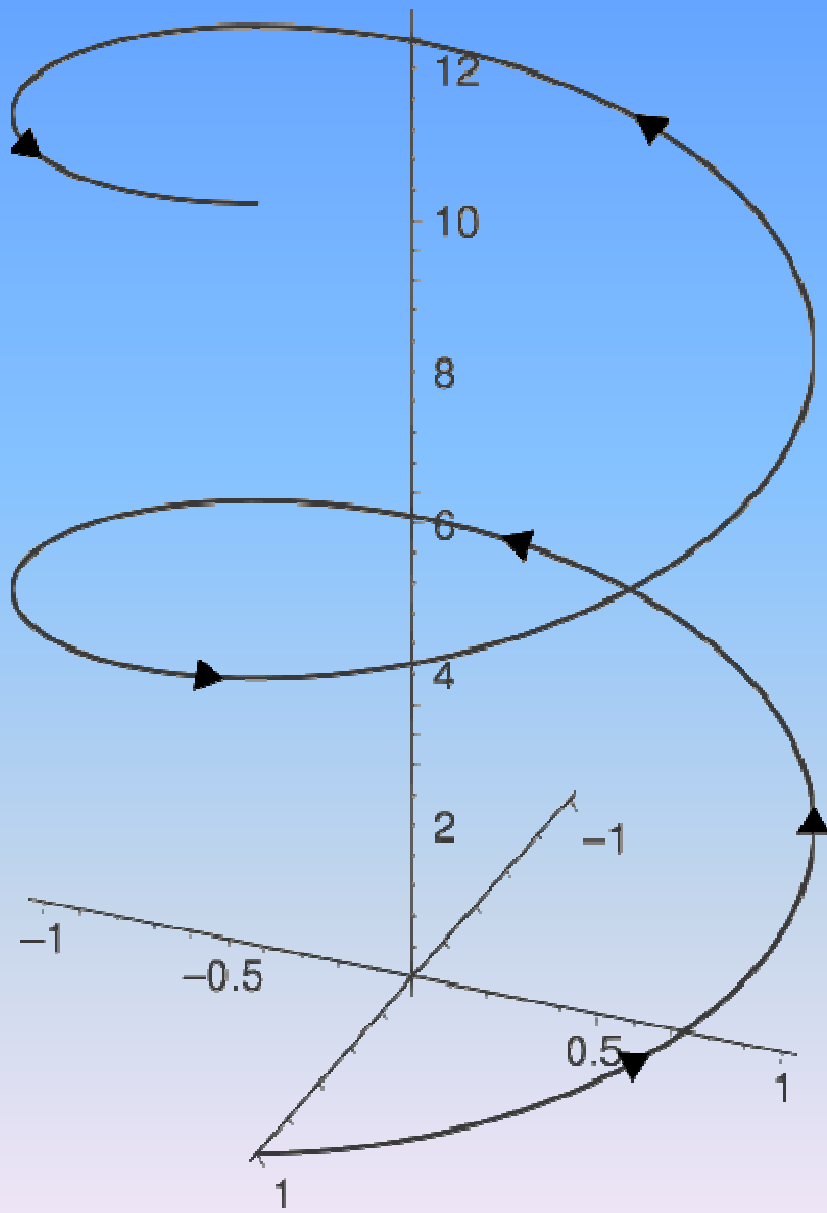


Κάποια απ' αυτά είναι τόσο περίπλοια
πού θυμίζουν περισσότερο
μία άμορφη μάζα
παρά μια γραμμή.

Υπάρχουν γραμμές επίπεδες
αλλά και γραμμές που ορίζονται
μόνο στον τρισδιάστατο χώρο.

Το πιο γνωστό παράδειγμα
είναι η κυλινδρική έλικα.





Ο Ευκλείδης είπε:

“Γραμμή εστί μήκος άνευ πλάτους”.

Και αυτό ακριβώς είναι το ζήτημα!
Μια γραμμή δεν έχει ούτε εμβαδόν
ούτε όγκο.

Έχει μόνο σημεία και ορίζεται
από την κίνηση ενός σημείου.

Στην απλή Κινηματική μάθαμε ότι αυτό
ακριβώς κάνει ένα κινούμενο σημείο.
Ορίζει μία τροχιά. Μία τυχαία καμπύλη.
Μία γραμμή.

Επομένως λέμε ότι οι γραμμές
έχουν μόνο μία διάσταση.

Μία γραμμή
είναι ένα Μονοδιάστατο
Γεωμετρικό Αντικείμενο.



Επιφάνειες

Δεν είναι γραμμές και ασφαλώς
δεν είναι σημεία.

Αντίθετα, περιέχουν σημεία και γραμμές.
Αλλά κυρίως περιέχουν εμβαδόν, κάτι που,
δε συμβαίνει με τις γραμμές.

Υπάρχει κάτι που δεν περιέχουν ποτέ.
Δεν περιέχουν όγκο.

Οι επιφάνειες δεν έχουν όγκο.
Είναι διδιάστατες.

Μόνο που εδώ χρειάζεται λίγη προσοχή.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε
μια επιφάνεια
με την κίνηση ενός μόνο σημείου;
‘ΟΧΙ’.

Πώς λοιπόν κατασκευάζεται μια επιφάνεια;

Με τη μετακίνηση μιας γραμμής,
όχι ενός μεμονωμένου σημείου!



Και αν κινήσουμε μια επιφάνεια;
Θα δημιουργήσουμε
ένα κομμάτι χώρου.
Έναν όγκο.

Άρα, ο Χώρος είναι τρισδιάστατος.



*Αντιθέτως τα fractals,
δεν έχουν ακέραιες διαστάσεις,
αλλά μπορεί να είναι μη ακέραια
π.χ. ανάμεσα στο 2
και στο 3
αν είναι καμπύλη.*



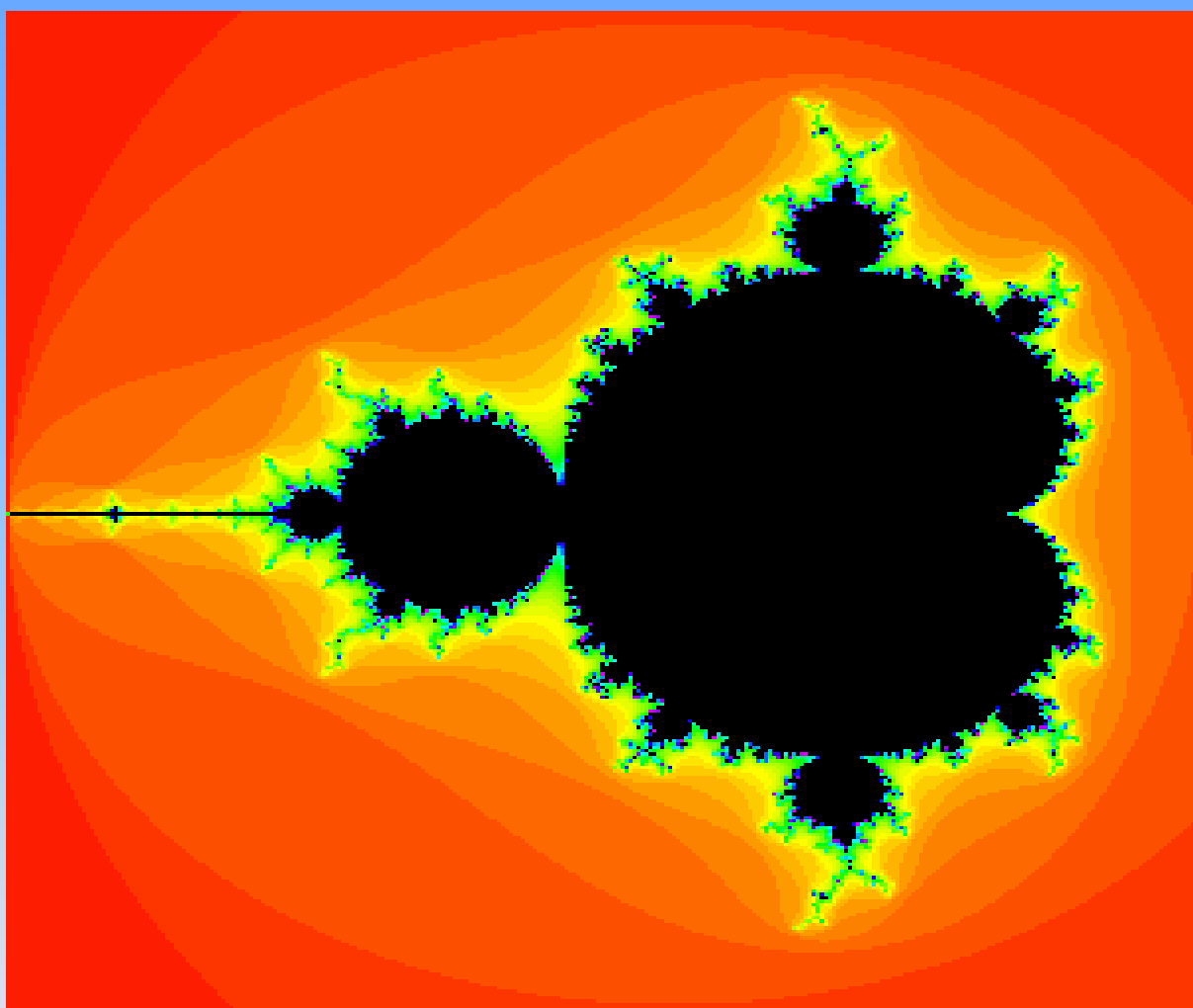
*Όσο πιο μεγάλη είναι
η διάσταση των fractals
τόσο πιο τραχιά είναι
η εμφάνιση του.*



*Μια τυπική βραχώδης ακρογιαλιά,
αν τη δούμε σαν fractal γραμμή
τότε έχει διάσταση 1,215.*

*Ένα τυπικό παράδειγμα fractal
είναι το
σύνολο του Mandelbrot.*





Η διάσταση του *Fractal* δίνει ένα ποσοτικό μέγεθος της αυτοομοιότητας και της κλίμακας.

Μας λέει πόσα νέα κομμάτια θα αποκαλυφθούν εάν αυξήσουμε τη μεγέθυνση.



Ιδιότητες των Fractals

- Τα *fractals* έχουν άπειρες λεπτομέρειες σε κάθε σημείο σε οποιαδήποτε μικρή κλίμακα. Είναι σχήματα με εσωτερική δομή ανεξάρτητα από το βαθμό μεγέθυνσής τους.

Αυτό σημαίνει ότι δε μπορούμε
να πούμε αν αυτό που βλέπουμε είναι
κάτι πολύ μεγάλο
ή πολύ μικρό,
διότι τα *fractals* φαίνονται ίδια
είτε τα κοιτάμε
από κοντά είτε από μακριά.
Αν μεγεθύνουμε την περιοχή
κοντά στην κορυφή ενός τετραγώνου
δε βλέπουμε τετράγωνα.

Αν κάνουμε το ίδιο σε μια περιοχή ενός fractal βλέπουμε σχήματα που μοιάζουν με αυτό που βλέπαμε πριν τη μεγέθυνση.

Με την αλλαγή της κλίμακας συμπεριλαμβάνονται νέα χαρακτηριστικά.

Έτσι η περίμετρος, το εμβαδόν και ο όγκος εξαρτώνται από την ανάλυση που θα χρησιμοποιήσουμε στη μέτρηση.

➤ Τα *fractals* συνήθως προσδιορίζονται με απλές περιοδικά επαναλαμβανόμενες διαδικασίες.

Πίσω από την πολυπλοκότητα των σχημάτων του φυσικού κόσμου, ο Mandelbrot βρήκε απλότητα μέσω της γεωμετρικής επανάληψης.

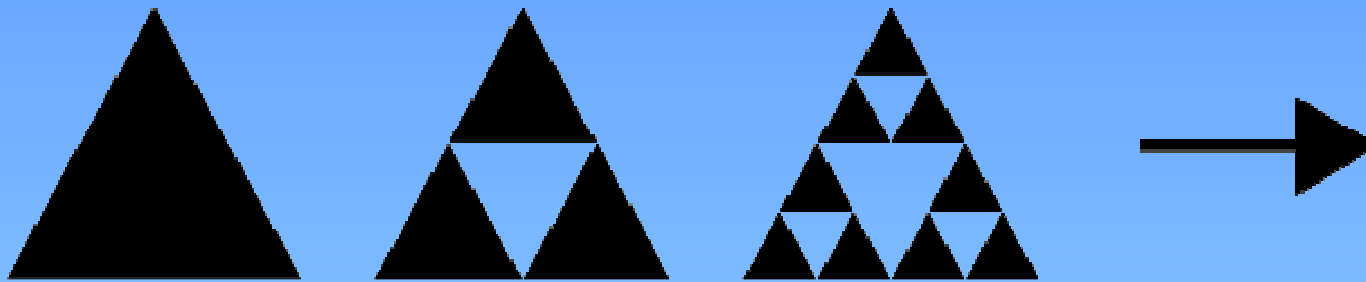
Η συνεχής επανάληψη των ίδιων ή παρόμοιων χαρακτηριστικών σε διαφορετική κλίμακα δημιουργεί ένα *fractal*.



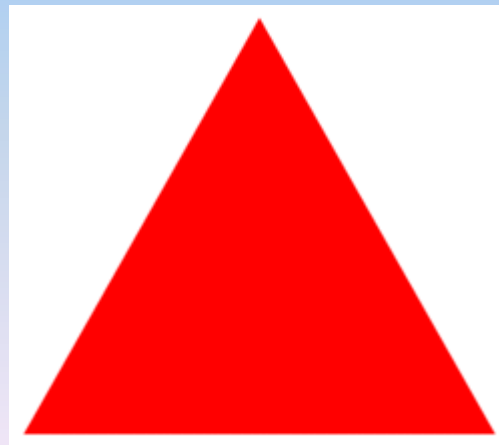
*Σαν παράδειγμα,
ας πάρουμε
το τρίγωνο του Sierpinski:*

*Ξεκινάμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο.
Ο επαναληπτικός κανόνας μας είναι:
Για κάθε τρίγωνο, ενώνουμε τα μέσα
των πλευρών και αφαιρούμε το τρίγωνο
που σχηματίζεται στο κέντρο.*





Τρίγωνο **Sierpinski**
που προήλθε από επαναλαμβανόμενες διαιρέσεις
της αρχικής δομής



➤ Τα *fractals* δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν με την παραδοσιακή γεωμετρική γλώσσα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ανεπάρκεια της Παραδοσιακής
Γεωμετρίας

Το τρίγωνο του Sierpinski είναι
«εξωγήινο για την Ευκλείδεια Γεωμετρία».

Ας πούμε ότι το μήκος της πλευράς του
στο στάδιο 0 είναι 1 μονάδα.



Στάδιο 0

Περίμετρος =3
Εμβαδόν=1



Στάδιο 1

Περίμετρος =9/2
Εμβαδόν=3/4



Στάδιο 2

Περίμετρος =27/4
Εμβαδόν=9/16



Στάδιο 0

Περίμετρος = 3

Εμβαδόν = 1



Στάδιο 1

Περίμετρος = 9/2

Εμβαδόν = 3/4



Στάδιο 2

Περίμετρος = 27/4

Εμβαδόν = 9/16

Η ακολουθία τιμών για την περίμετρο είναι
 $3, 9/2, 27/4, \dots$

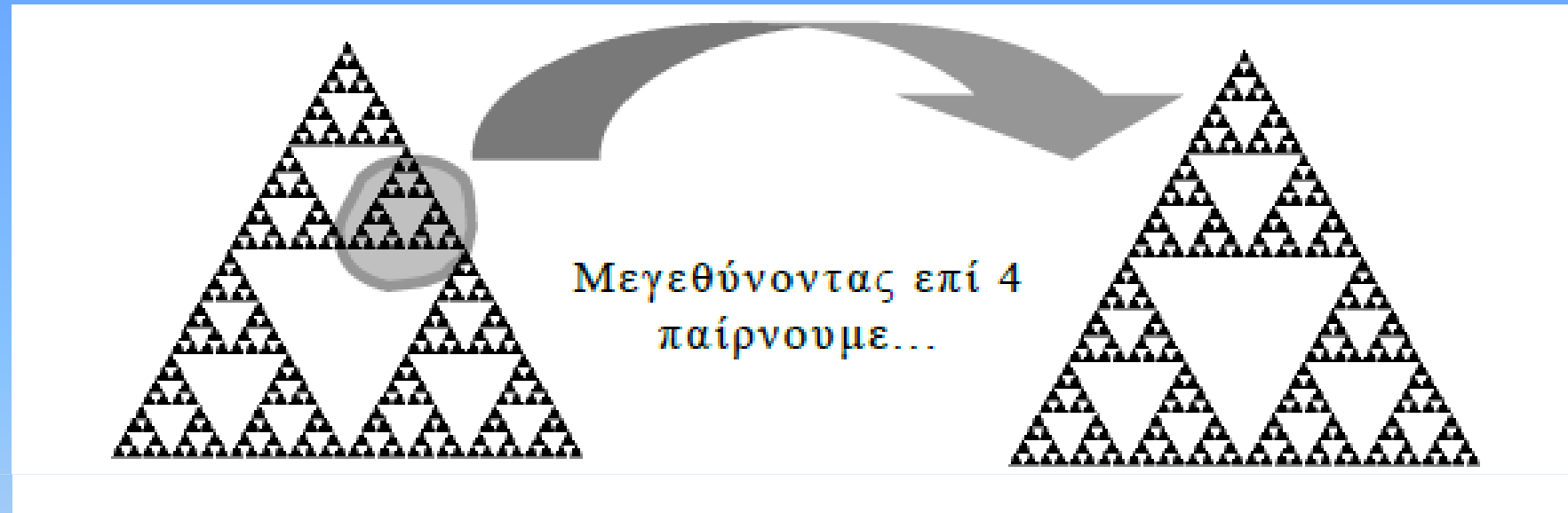
Αυτή είναι γεωμετρική ακολουθία με λόγο $r = 3/2$.

Όμως μια γεωμετρική ακολουθία με $|r| > 1$
τείνει στο άπειρο.

Έτσι, το «τρίγωνο» του Sierpinski είναι ένα σχήμα
με άπειρη περίμετρο, που περικλείεται σε ένα
τρίγωνο με περίμετρο 3.

➤ Τα fractals έχουν αυτοομοιότητα.

Τα fractals είναι αντικείμενα που εμφανίζουν ομοιότητες σε μέρη (κομμάτια) του αντικειμένου και στα γενικά χαρακτηριστικά του. Κάθε κομμάτι αποτελεί ένα αντίγραφο ολόκληρου του αντικειμένου.



Κάθε κομμάτι της τελικής εικόνας περιέχει ένα αντίγραφο του όλου.

*Η αυτοομοιότητα είναι ένα από τα
παράδοξα του άπειρου, μια πηγή
έντονης συζήτησης και εκπληκτικών
εφαρμογών στον
πεπερασμένο κόσμο μας.*

*Ένα δένδρο, για παράδειγμα,
ή ένα φύλλο φτέρης, ένα κουνουπίδι,
το αρτηριακό σύστημα,
μια θαλασσογραφία,
όλα είναι παραδείγματα της
αυτοομοιότητας στη φύση.*

Η προσοχή
που δίνουμε στα fractal
χαρακτηριστικά της πραγματικότητας
είναι ένας τρόπος για να αντιληφθούμε
τη μυστηριώδη,
μη προβλέψιμη κίνηση
που δημιουργεί τον κόσμο
και τον κρατά σε συνοχή.



*Για μια επιστημονική κοινότητα,
αυτός είναι ένας καινούργιος
τρόπος παρατήρησης.
Φημισμένες μέθοδοι με χρήση
Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
που αναπτύχθηκαν από τους
M.Barnsley και Lindenmayer,
μας δίνουν τη δυνατότητα για σχεδόν
τέλειες προσομοιώσεις φύλλων φτέρης
και δένδρων αντίστοιχα.*

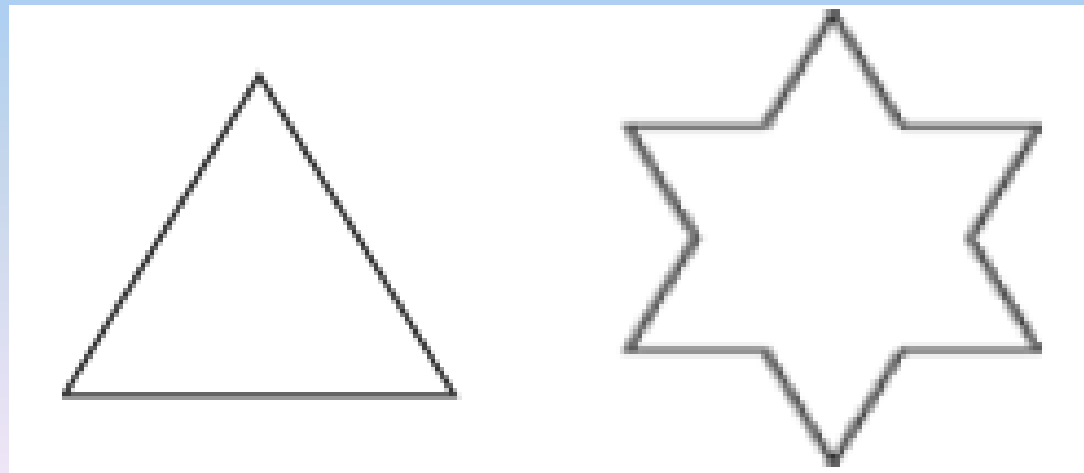
➤ Τα fractals έχουν κλασματική fractal διάσταση.

Η fractal διάσταση μας πληροφορεί για τον τρόπο με τον οποίο οι λεπτομέρειες σχετίζονται με την κλίμακα της μεγέθυνσης.

Πιο απλά η Fractal διάσταση εκφράζει τον βαθμό πολυπλοκότητας που εμφανίζει ένα σχήμα.

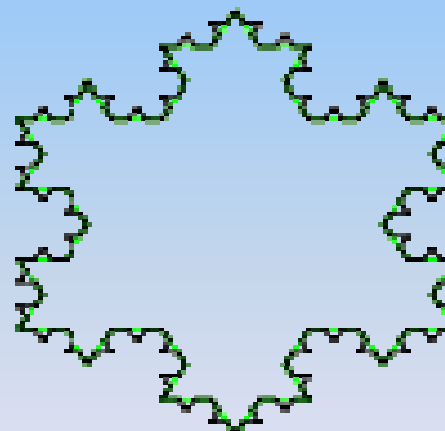
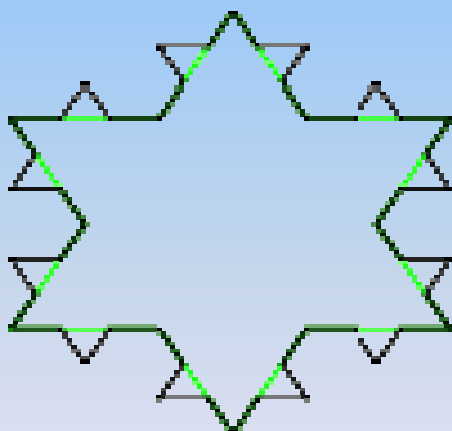
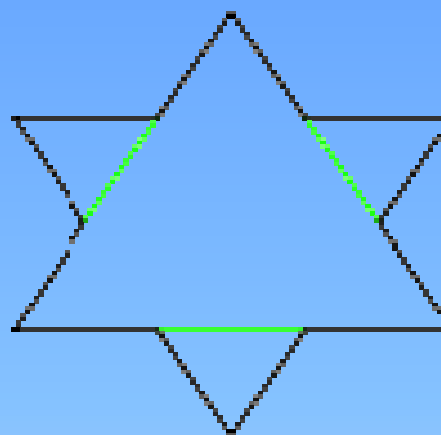
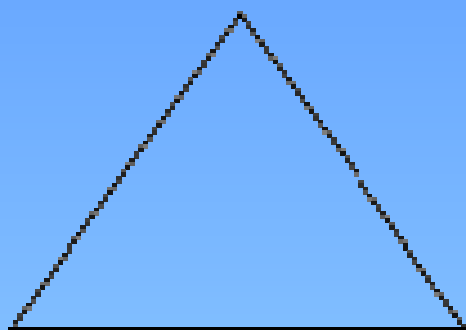
Για παράδειγμα ένα σφουγγάρι που έχει φτιαχτεί έτσι ώστε τα κενά που έχει στο εσωτερικό του να είναι ίδια μεταξύ τους και κανονικά τοποθετημένα π.χ. σε τετραγωνικό πλέγμα, έχει πολύ μικρότερο βαθμό πολυπλοκότητας από ένα σφουγγάρι του οποίου τα κενά δεν είναι ίδια και βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις.

Παίρνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο
με πλευρά 1 και διαιρούμε κάθε πλευρά του
σε τρία ίσα τμήματα αφαιρώντας το μεσαίο
τρίτο και στη θέση του βάζουμε ένα τρίγωνο
με πλευρά ίση με το τρίτο αυτό.
Παίρνουμε έτσι ένα άστρο με 12 πλευρές.



Συνεχίζοντας έτσι όλο και μικρότερα
τρίγωνα εμφανίζονται στις πλευρές
και έτσι αν η διαδικασία
συνεχίσει επ' άπειρον,
τελικά προκύπτει ένα περίγραμμα που
είναι ακανόνιστο σε όλες τις κλίμακες
και παρουσιάζει και αυτοομοιότητα.
Το περίγραμμα αυτό μοιάζει
με χιονονιφάδα και λέγεται
χιονονιφάδα του Koch.





Κάθε καινούρια «νιφάδα» που δημιουργείται
έχει όλο και μεγαλύτερη περίμετρο
αλλά περικλείει πεπερασμένο εμβαδόν
που είναι πάντα μικρότερο
από του περιγεγραμμένου κύκλου.
Τελικά μετά από άπειρα βήματα
η περίμετρος του σχήματος
γίνεται άπειρη
και το εμβαδόν που περικλείεται
είναι πεπερασμένο!

Η σιόνη του Cantor

Αν αρχίσουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα
τριχοτομήσουμε κάθε του πλευρά
και αφαιρέσουμε το κεντρικό τρίτο,
αφήνοντας όμως τα ακραία σημεία του
κεντρικού ενός τρίτου και συνεχίσουμε τη
διαδικασία αυτή επ' άπειρο φτάνουμε στο
σύνολο του Cantor.



[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

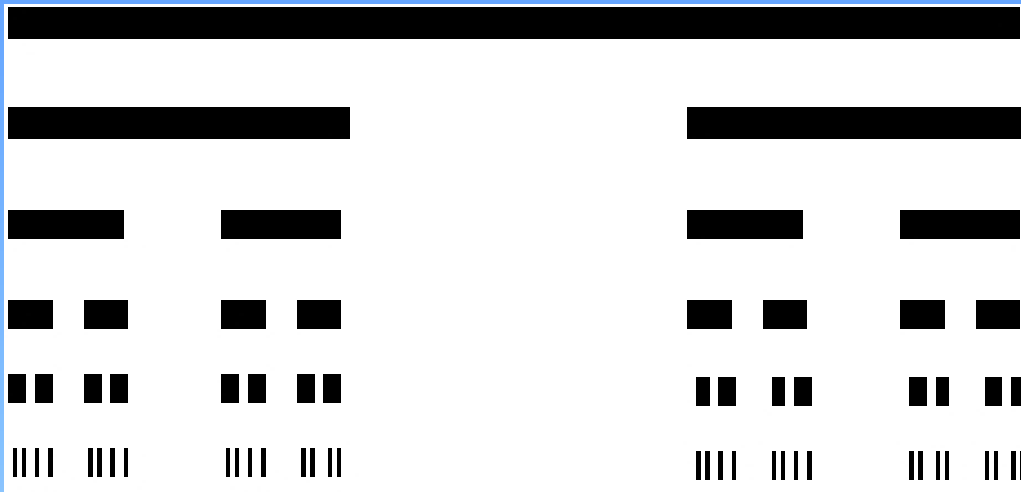
[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]



Cantor set

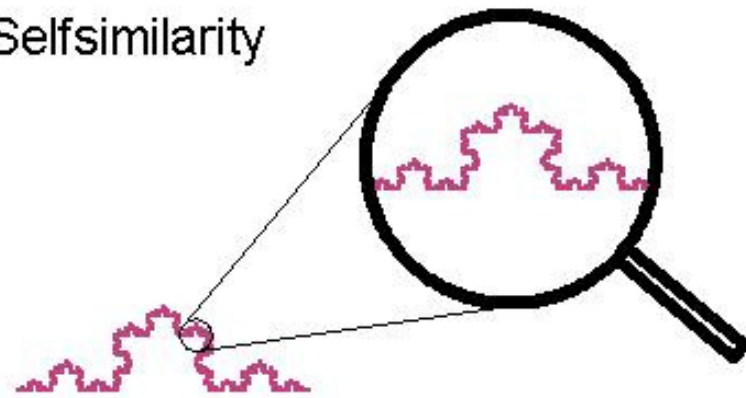


Διάσταση 0,63

Διάσταση
1,26

Koch curve

Selfsimilarity



Iterative generation:



Στην αρχή οι ιδέες του Mandelbrot
αντιμετωπίστηκαν με δυσπιστία από
το επιστημονικό κατεστημένο.

Η εφαρμογή τους σε προβλήματα
που εμφανίζονταν

στη Βιολογία-Γεωλογία-

Οικονομικά-Αστρονομία,

συντέλεσαν ώστε το έργο του

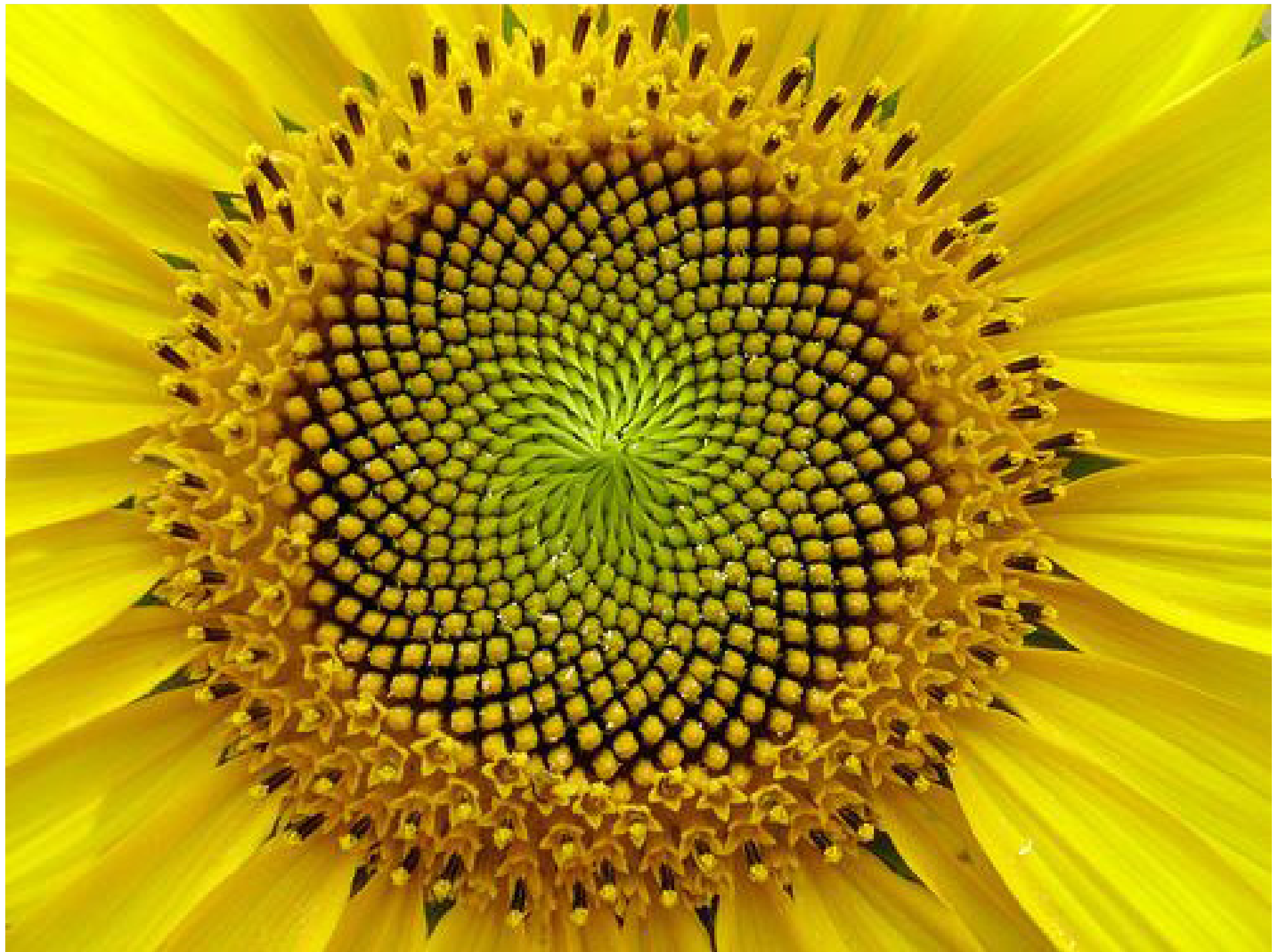
να αναγνωριστεί παγκοσμίως

και οι μέθοδοί του

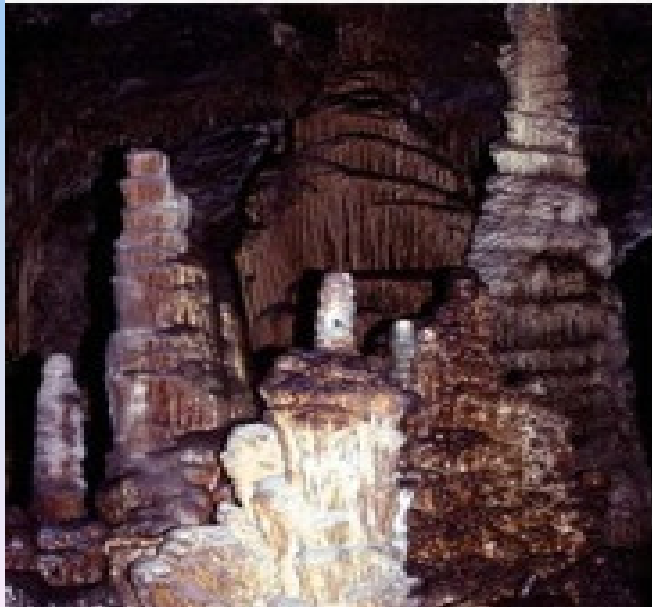
να χρησιμοποιούνται ευρύτατα.



Φράκταλ κατασκευασμένο σε υπολογιστή







Τοπολογική
Διάσταση

Fractal
Διάσταση

1



1.00

1



1.02

1



1.15

1



1.35

Fractal καμπύλες
με διαφορετικές fractal διαστάσεις

Που απαντώνται τα fractals



- 1. Στο Χωροχρόνο*
- 2. Στη Θεωρία του Χάους*
- 3. Στο Άτομο*
- 4. Στον Ήχο*



5. Στο φαινόμενο της Πεταλούδας
6. Στους Κρυστάλλους
7. Οι νιφάδες του χιονιού
8. Στα Χρωμοσώματα

9. Στους Οργανισμούς

- α. Στα Φυτά
- β. Τα Φύλλα των δέντρων
- γ. Τα Κλαδιά των δέντρων
- δ. Φυσιικοί Σπόγγοι
- ε. Κοραλιογενείς Ύφραλοι





Scale 3
Scale 2
Scale 1



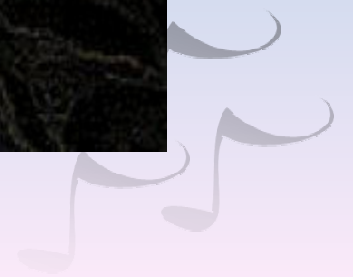
10. Στα καιρικά φαινόμενα

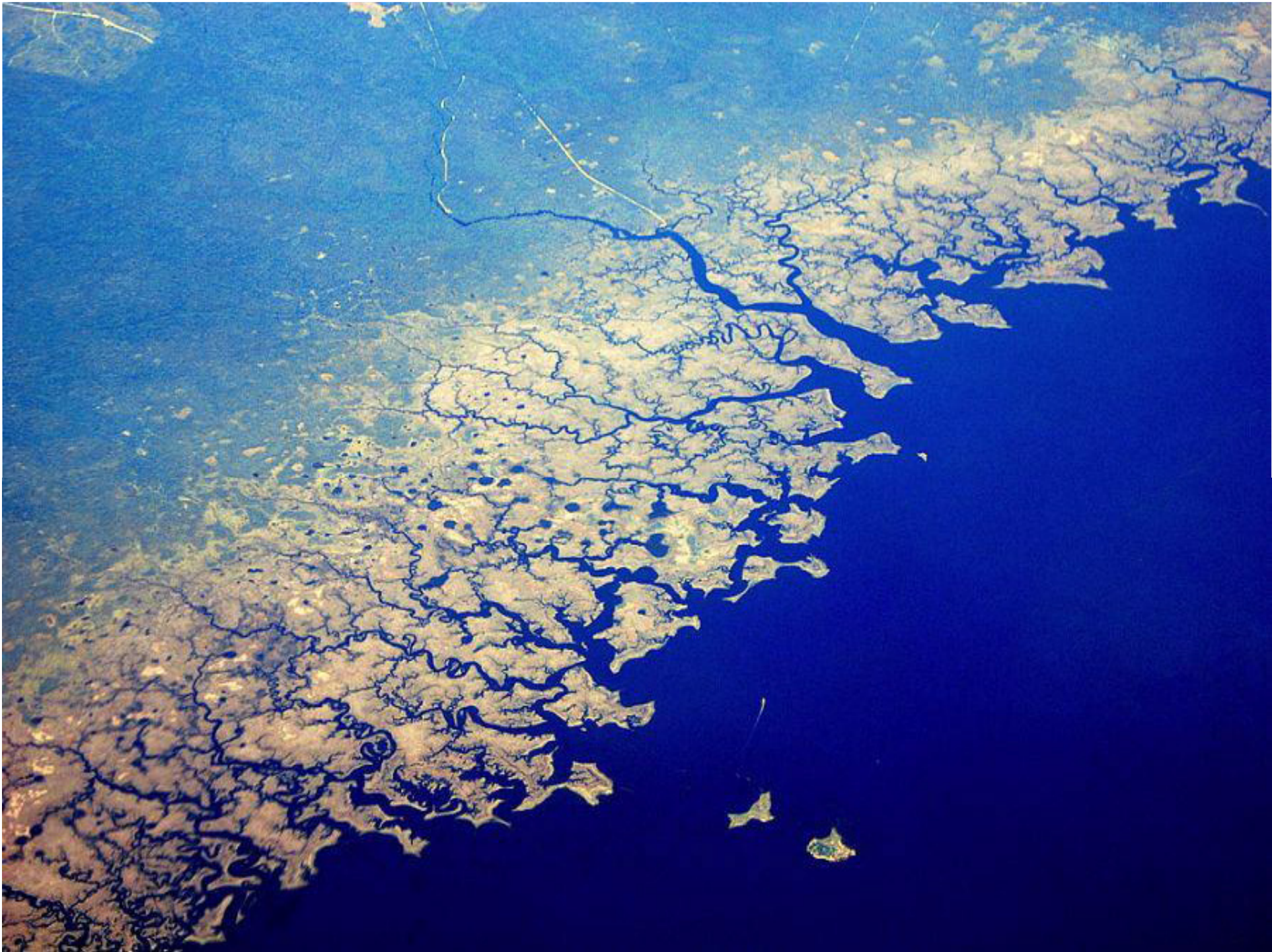
A. Κεραυνοί

B. Τυφώνες

Γ. Υδάτινοι Στρόβιλοι







- 11. Στα Σχήματα των βουνών
και των ποταμών*
- 12. Στα Διαστρικά Αέρια*
- 13. Στις Μαύρες Τρύπες*
- 14. Στους Γαλαξίες*



Εφαρμογές των fractals

*Η Φράκταλ Γεωμετρία έχει
διεισδύσει σε πολλούς τομείς της
επιστήμης, όπως της Αστροφυσικής,
της Βιολογίας και έχει καταστεί μια
από τις πιο σημαντικές τεχνικές
σε γραφεία Η/Υ.*

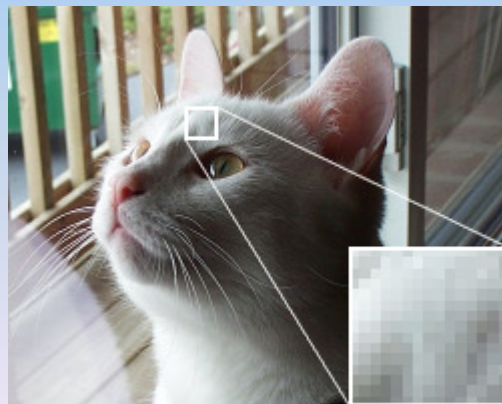
Φράκταλς σε γραφικά Η/Υ

Η μεγαλύτερη χρήση των fractal στην καθημερινή ζωή είναι στην επιστήμη των υπολογιστών.

Η fractal συμπίεση εικόνας χρησιμοποιεί το γεγονός ότι ο πραγματικός κόσμος περιγράφεται πολύ καλά από τη γεωμετρία των fractals.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της *fractal* συμπίεσης, είναι ότι η εικόνα όταν μεγεθύνεται, δεν παρουσιάζει *pixelisation*.

Η εικόνα φαίνεται πολύ καλύτερα όταν το μέγεθός της αυξάνεται.







Τοπία

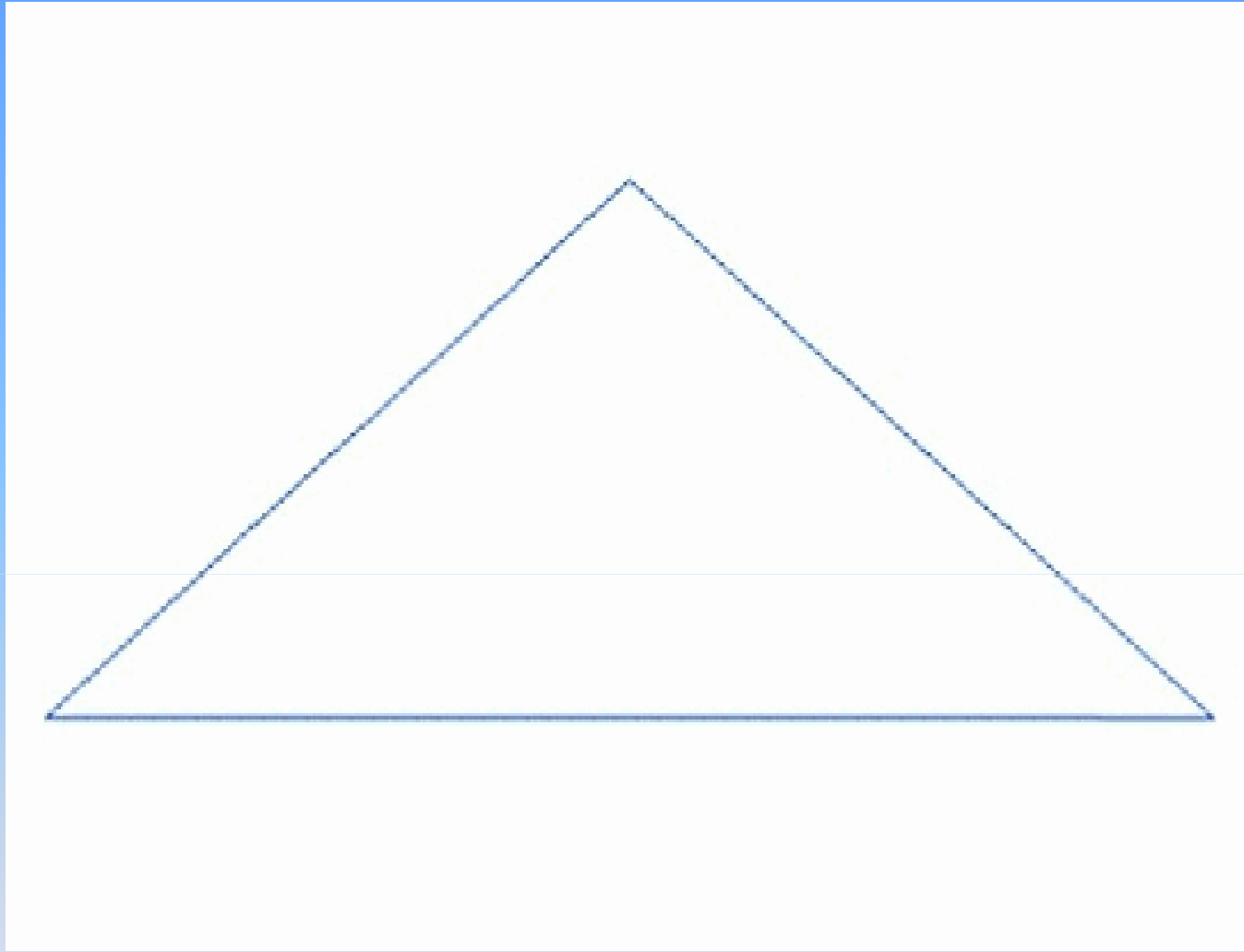
Τα τοπία αποτελούν μια κλασσική εφαρμογή των fractals.

Αν κοιτάξουμε ένα βουνό ή ένα λόφο ή μια ακτή, θα δούμε όλο και πιο περίπλοκα σχήματα όσο πιο κοντά και αν τα κοιτάξουμε.

*Αυτοί που έχουν ειδικότητα
στα γραφικά Η/Υ
χρησιμοποιούν πολλές
μορφές *fractals*
για να δημιουργήσουν τοπία
και άλλα περίπλοκα μοντέλα.*



Είναι δυνατό να δημιουργηθούν
όλα τα είδη ρεαλιστικών εικόνων
φυσικών σκηνών,
όπως σεληνιακά τοπία,
οροσειρές και ακτές.
Μπορούμε να τα δούμε
σε πολλά ειδικά εφέ
σε ταινίες του Hollywood,
άλλα και στις τηλεοπτικές διαφημίσεις.



Animation βουνού με fractals

Fractal στη μουσική και στην τέχνη

Έχουμε εφαρμογές των *fractals* στη μουσική, όπου *fractal* σχέδια χρησιμοποιούνται στη σύνθεση και ακόμα νέα μουσικά όργανα κατασκευάζονται με *fractal* χαρακτηριστικά όπως π.χ. *drums* με περίμετρο *fractal*.

Με τη βοήθεια υπολογιστών κατασκευάζονται μοτίβα *fractals* που είναι καλλιτεχνικά και αισθητικά ευχάριστα.

Γεωλογία

*Έχουν βρεθεί
χρήσιμα μοντέλα *fractals*
για την περιγραφή και την
πρόβλεψη του τόπου
και του χρόνου
των σεισμών.*



Ιατρική

Στην ιστοπαθολογία που ασχολείται με τη μελέτη των μορφολογικών αλλαγών σε κύτταρα και ιστούς, η διαδικασία μέτρησης και ανάλυσης τέτοιων δύσκολων και ανώμαλων μορφολογιών μπορούν να ξεπεραστούν με τη γεωμετρία των *fractals*, που δίνει αντικειμενικό τρόπο μέτρησης, προσέγγισης και κατανόησης της πολυπλοκότητας των σχημάτων.

Επίσης, μας βοηθά
να μοντελοποιήσουμε
και να διακρίνουμε φυσιολογικές
και παθολογικές αλλαγές
στη μορφή των κυττάρων.
Επιπλέον, στη λειτουργία
της καρδιάς
εμφανίζονται fractals
χαρακτηριστικά.



Μηχανική ρευστών

*Η μελέτη της τυρβώδους κίνησης
στα υγρά αναπροσαρμόζεται
πολύ στα fractals.*

*Ο στροβιλισμός των υγρών
είναι χαοτικός και είναι πολύ δύσκολο
να μοντελοποιηθεί.*

*Η φρακταλική αναπαράσταση αυτών
βοηθάει τους Φυσικούς να καταλάβουν
καλύτερα τα πολύπλοκα υγρά.*



Τυρβώδης ροή στη δίνη των φτερών

Καιρός

*Η συμπεριφορά του καιρού
είναι πολύ απρόσμενη.*

*Μπορεί να αλλάξει από λεπτό σε
λεπτό, γι' αυτό θα μπορούσαμε να
πούμε ότι ο καιρός συμπεριφέρεται
με πολύ χαοτικό τρόπο.*

*Πράγματι, ο καιρός μπορεί να
δημιουργήσει μοτίβα *fractals*.*

Οικονομία

*Η θεωρία των Fractals
χρησιμοποιείται σήμερα
από χρηματοοικονομικούς οίκους
για την πρόβλεψη
της εξέλιξης των τιμών
στα διάφορα χρηματιστήρια
αξιών και εμπορευμάτων.*

Αστρονομία

Τα fractals είναι ένα «εργαλείο» περιγραφής του Σύμπαντος.

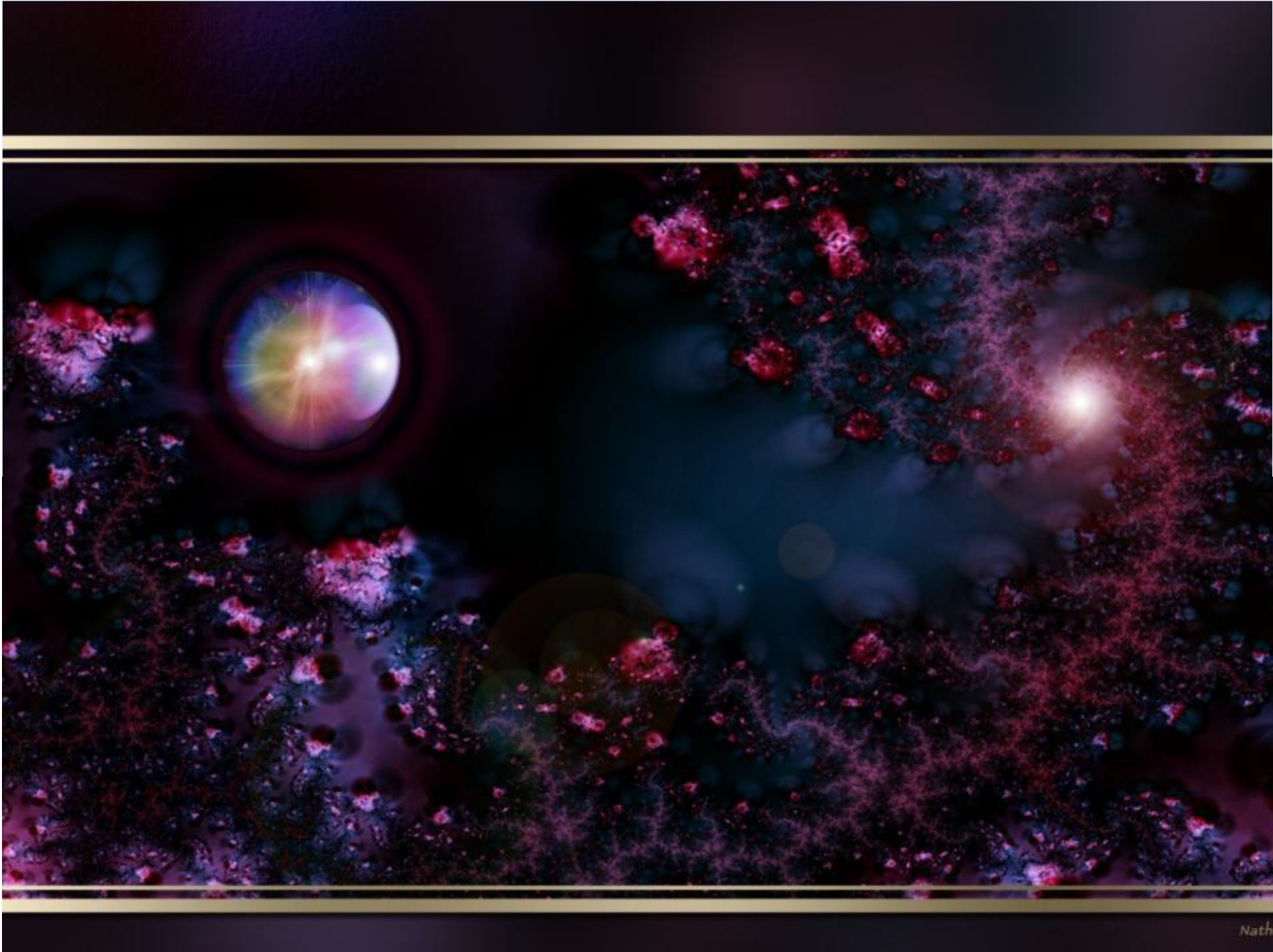
Οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι η ύλη δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο Σύμπαν.

Πολλοί αστρονόμοι υποστηρίζουν ότι το Σύμπαν είναι «ομαλό» σε μεγάλη κλίμακα.

Υπάρχει, όμως, μια ομάδα επιστημόνων που υποστηρίζει ότι η δομή του Σύμπαντος είναι *fractal* σε όλες τις κλίμακες.

Επομένως, χρειάζονται πολλές παρατηρήσεις όσον αφορά την κατανομή των γαλαξιών στο Σύμπαν, ώστε τελικά να αποφασίσουμε για το αν ζούμε ή όχι σε φρακταλικό Σύμπαν.





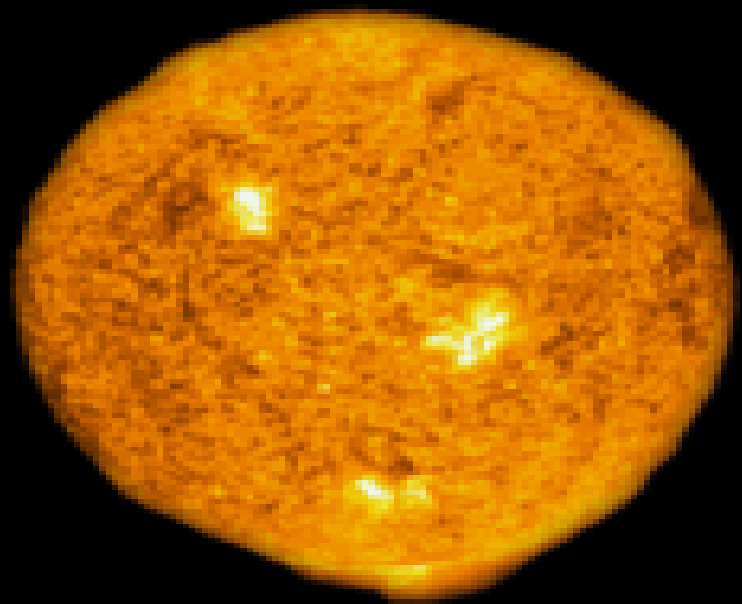
*Έχουν γίνει
προσομοιώσεις fractal
για να σχεδιαστεί η κατανομή
σμηνών γαλαξιών στο Σύμπαν
και για να μελετηθούν
προβλήματα που σχετίζονται
με την διαταραχή
ενός ρευστού.*

Olbers' paradox

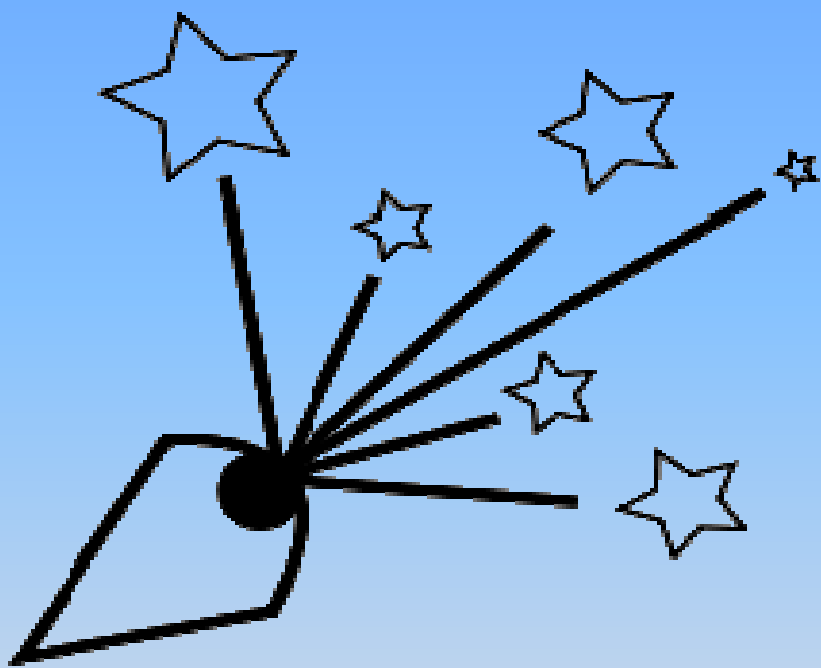
Γιατί ο νυχτερινός έναστρος ουρανός
δεν είναι πάμφωτος,
αλλά περιλαμβάνει
μεγάλα σκοτεινά τμήματα;

Απλή διατύπωση:

Γιατί έχουμε σκοτάδι τη νύχτα;



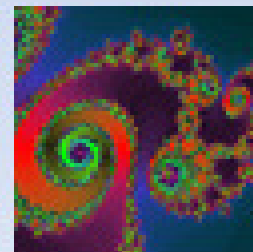
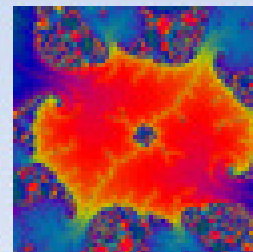
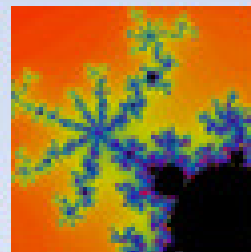
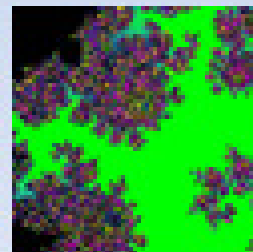
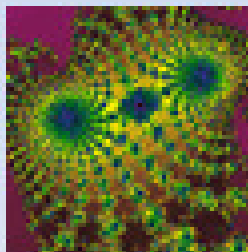
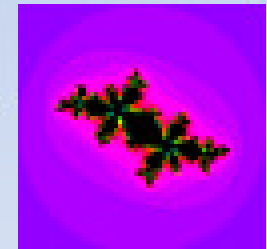
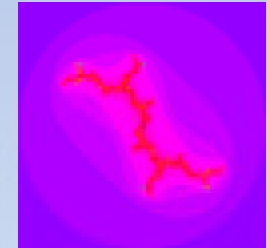
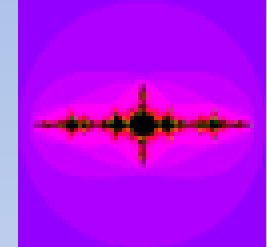
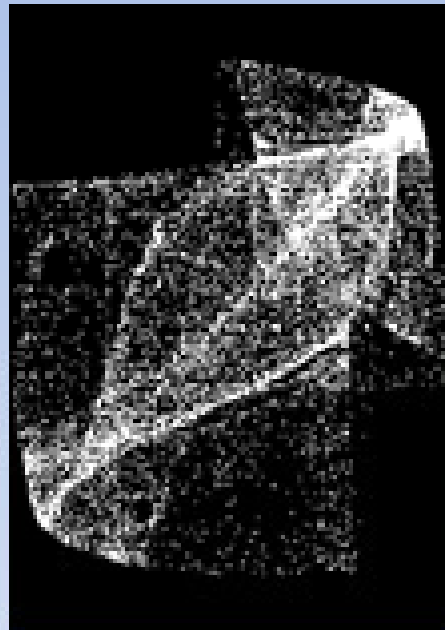
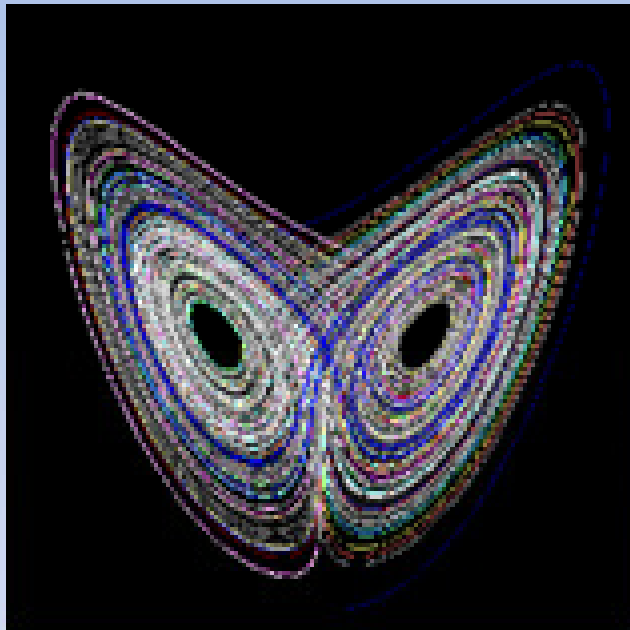
Σύμφωνα με την παραδοχή
ότι το Σύμπαν είναι άπειρο
και περιέχει άπειρο αριθμό
φωτεινών ουράνιων σωμάτων,
ομοιόμορφα κατανεμημένων,
κάθε νοητή γραμμή που ξεκινά
από το μάτι ενός παρατηρητή
θα έπρεπε να καταλήγει
σε ένα τέτοιο σώμα,
άρα να βλέπει παντού φως.



Η μεταγενέστερη θεωρία της
διαστολής του Σύμπαντος έδωσε
απάντηση στο αρχικό παράδοξο,
υποστηρίζοντας ότι εφόσον
το Σύμπαν διαστέλλεται συνεχώς,
περιλαμβάνει ουράνια σώματα
το φως των οποίων
δεν έχει φτάσει ακόμη στη Γη.

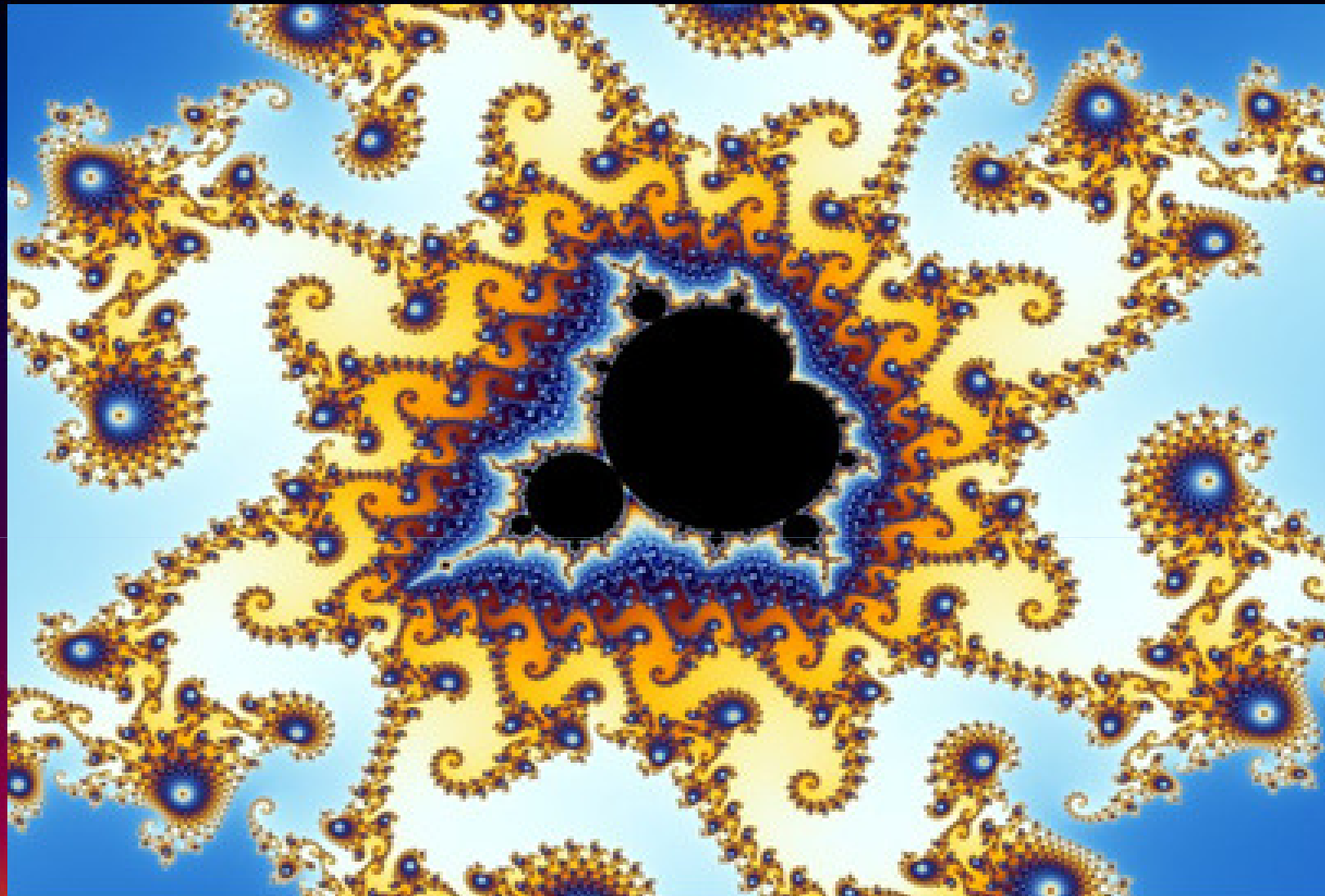
*Ο Mandelbrot απέδειξε
ότι το Olbers' paradox
μπορεί να ερμηνευθεί
μόνο με την υπόθεση
ότι τα άστρα έχουν κατανομή
φράκταλ στο Σύμπαν,
χωρίς να χρειαστεί
η υπόθεση της Μεγάλης Έκρηξης.*

Εικόνες Fractal

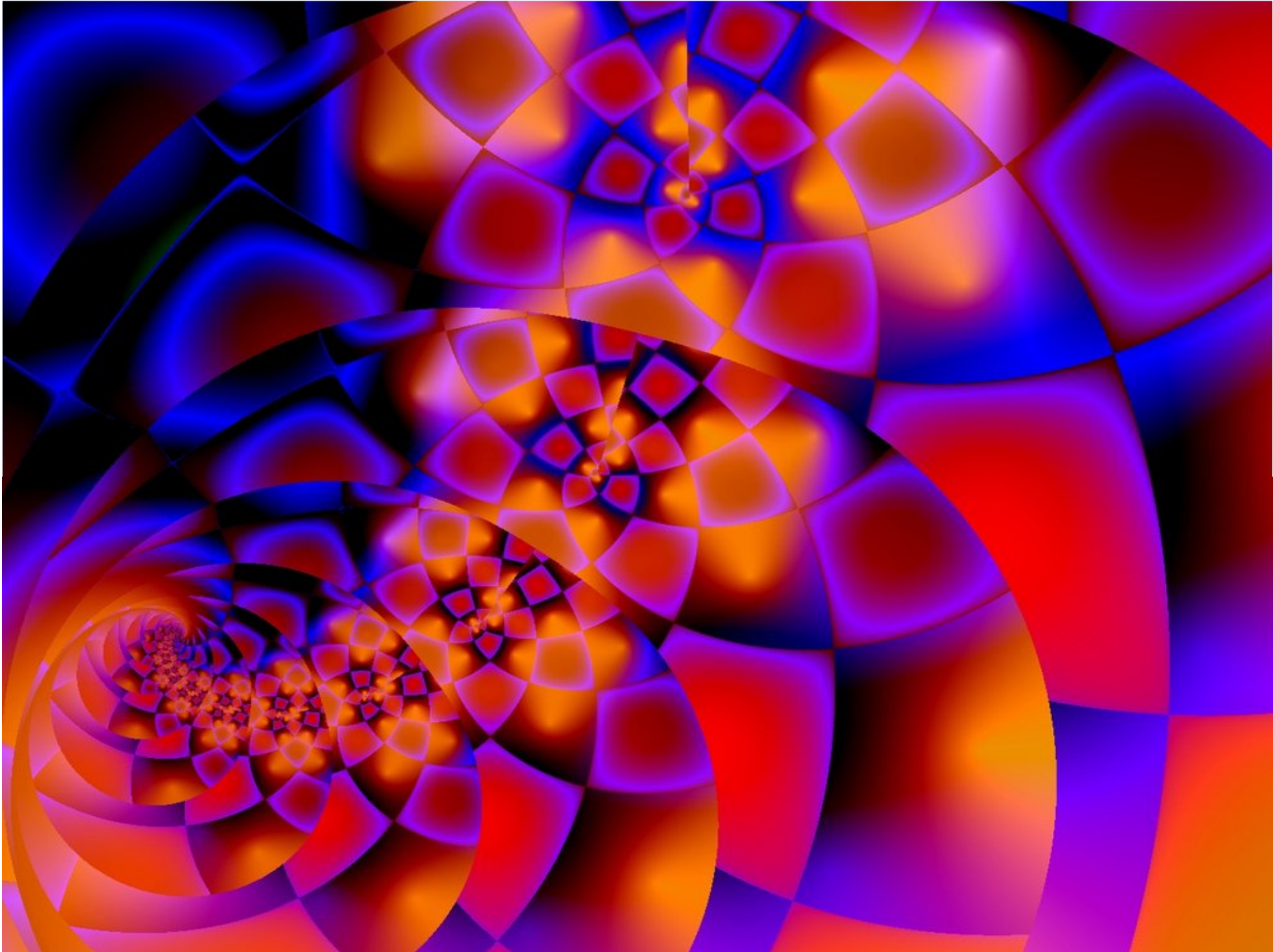




Μπρόκολο

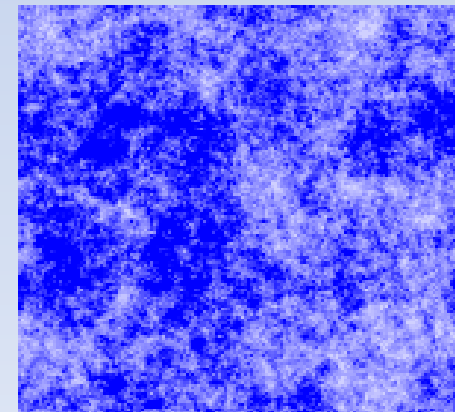
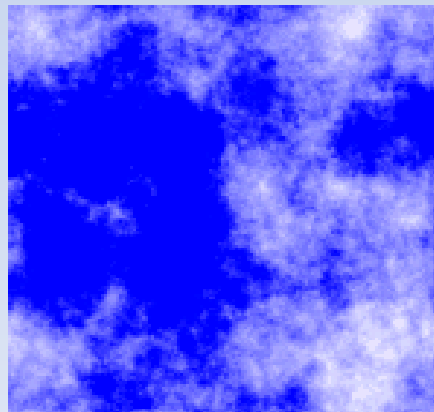


Ένα μέρος του συνόλου Μάντελμπροτ,
του πιο γνωστού φράκταλ.

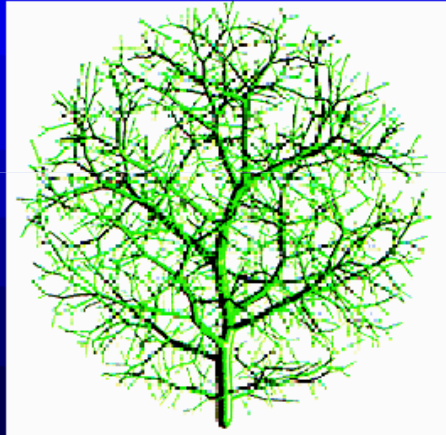


- Τα Fractals περιγράφουν επίσης και πολλά αντικείμενα στον πραγματικό κόσμο,
- σύννεφα,
- βουνά,
- τυρβώδη ροή,
- ακτές,
- που δεν αντιστοιχούν σε απλά μαθηματικά σχήματα.

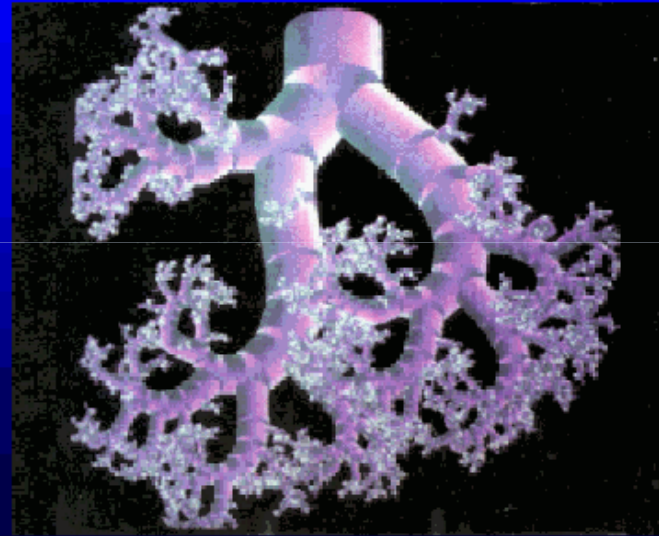
Cloud with
fractal dimension
= 2.50 and 3.00



Biological Self-Similar Branching Structures

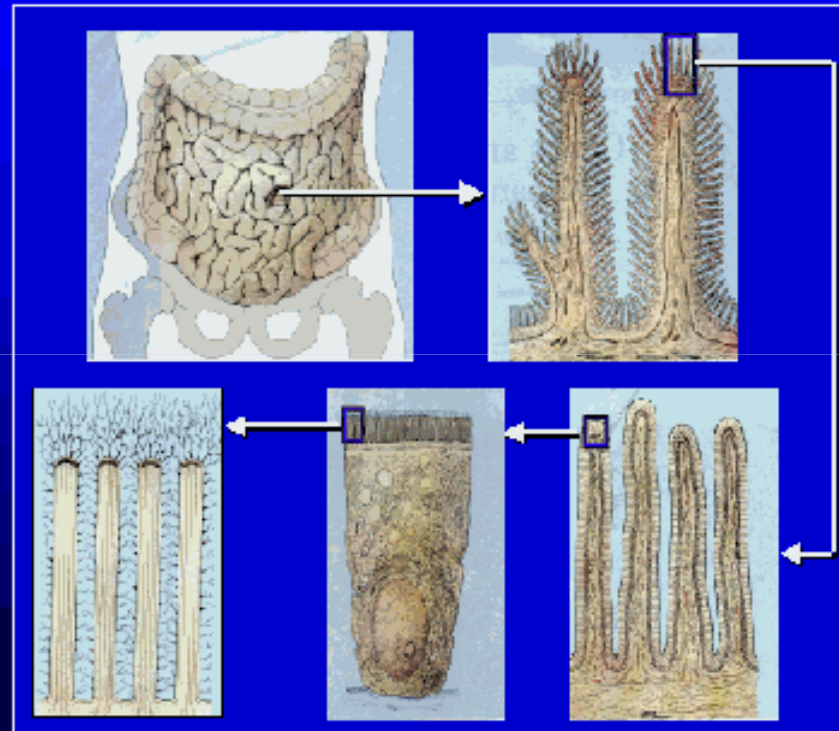


Fractal Lung



Πνεύμονας

Fractal Structure of Small Intestine



Ἔντερα

Γιατί στη φύση απαντώνται τόσο συχνά Fractal γεωμετρίες?

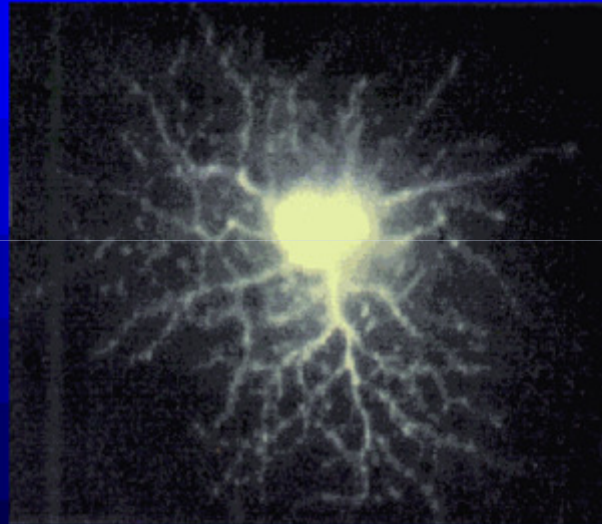
Οι δομές αυτές είναι πολύ αποτελεσματικές.

- Για παράδειγμα το έντερο.*

– Αν έπρεπε κανείς να σχεδιάσει τη γεωμετρία μιας επιφάνειας που πρέπει να χωράει σε πεπερασμένο όγκο αλλά να έχει μέγιστη επιφάνεια, ώστε να να μεγιστοποιείται η ροή θρεπτικών συστατικών προς το αίμα, τότε θα προέκυπτε ότι μια self-similar fractal δομή είναι η βέλτιστη.

- *Ανάλογα, εάν ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση της μεταφοράς οξυγόνου μέσω μιας επιφάνειας που περιέχεται σε πεπερασμένο όγκο ή η μεγιστοποίηση των εισόδων που μπορεί να λάβει ένας νευρώνας από άλλα κύτταρα, self-similar δομές πληρούν αυτές τις συνθήκες.*

Fractal Neuron



Αυτο-ομοιότητα και χώρος
– η περίπτωση της
Νοτιοδυτικής Ισπανίας

*Ευδιαφέρον παρουσιάζει
η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας
που εμφανίζεται σε πολλές κλίμακες,
αλλά και σε πολλές διαστάσεις
της πραγματικότητας.*

*Στην Νότια Ισπανία
βρίσκεται η Ανδαλουσία.
Στο δυτικό άκρο της βρίσκεται
ο ποταμός Γουαδαλκιβίρ,
που η κοιλάδα του σχηματίζει
ένα "ισόπλευρο τρίγωνο"
με γωνίες τρεις πόλεις,
τη Σεβίλλη, τη Χουέλβα και το Κάντιζ.*



Η περιοχή είναι παγκόσμια γνωστή
για πολλούς λόγους.

➤ *Ο Χριστόφορος Κολόμβος
ξεκίνησε από εκεί τις εκστρατείες του
για την ανακάλυψη του Νέου Κόσμου.
Συγκεκριμένα, το πρώτο ταξίδι του
Κολόμβου ξεκίνησε
από το λιμάνι της Χουέλβας,
όπου τελικά επέστρεψε.*

*Όταν η Αμερική έγινε
Ισπανική αποικία,
τα πλοία των Ισπανών
κατέληγαν στο λιμάνι της Σεβίλλης,
μέχρι κάποια εποχή,
που το επίσημο λιμάνι
μεταφέρθηκε στο Κάντιζ.*

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι τρεις πόλεις για δύο λόγους:

-1^{ου} Γιατί αποτελούν τα όρια της κοιλάδας.

*-2^{ου} Γιατί σχετίζονται και οι τρεις
και μόνο αυτές με τα ιστορικά γεγονότα
του Κολόμβου - αποτελούν ένα σύστημα
και αυτό το σύστημα έχει μορφή –
και δομή - **τριγωνική**.*

*Κοιτώντας το χάρτη
σε μικρότερη κλίμακα
και πλησιάζοντας την περιοχή της
Χουέλβας παρατηρούμε
ότι η πόλη βρίσκεται
στα Δυτικά παράλια της κοιλάδας,
μεταξύ δύο μικρότερων ποταμών,
που σχηματίζουν μία χερσόνησο
με μορφή **τριγωνική!***

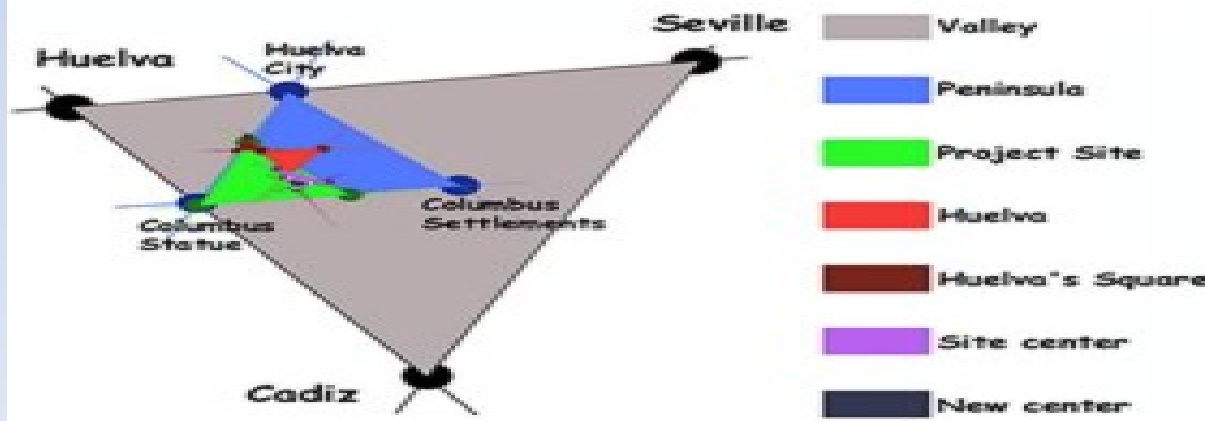
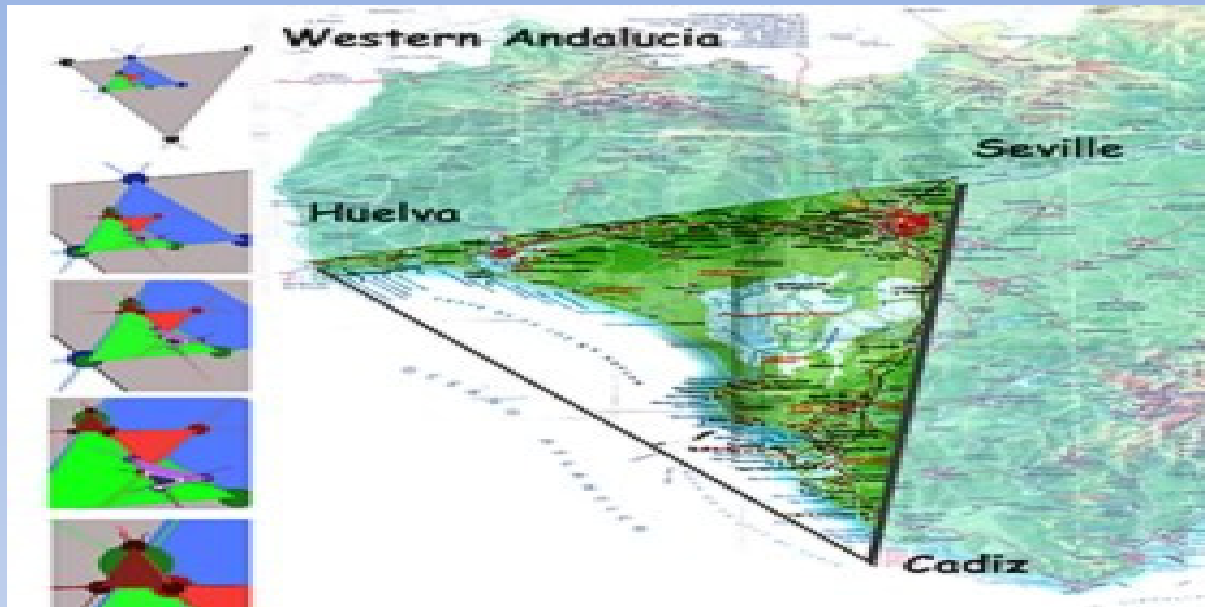


*Αν παρατηρήσουμε
το χάρτη της πόλης
θα ανακαλύψουμε με έκπληξη,
ότι η πόλη απλώνεται στο κέντρο
της τριγωνικής χερσονήσου,
αφήνοντας μια μεγάλη χέρσα
και αδόμητη επιφάνεια
στα δυτικά με μορφή
τριγωνική!*

*Κοιτώντας καλύτερα τον ίδιο χάρτη,
γνωρίζοντας κάποια ιστορικά στοιχεία
σχετικά με την
ανάπτυξη της πόλης
κατά τους τελευταίους αιώνες,
αλλά και παρατηρώντας
τον πολεοδομικό ιστό της πόλης
αντιλαμβανόμαστε ότι το ιστορικό της
κέντρο έχει μορφή **τριγωνική!***

*Αν θέλουμε να μπούμε σε
περισσότερη λεπτομέρεια,
θα παρατηρήσουμε ότι
η κεντρική πλατεία
του ιστορικού κέντρου
της πόλης έχει μορφή
τριγωνική!*

*Μία συνδυασμένη ανάλυση
της ιστορίας
και της γεωγραφίας
της κοιλάδας
φέρει στο φως στοιχεία
περισσότερων
αυτο-όμοιων καταστάσεων.*



Γιατί λέμε ναι
σε εκπαιδευτικές
δραστηριότητες με fractals;

1. Η fractal γεωμετρία
είναι ένα νέο αντικείμενο
και σήμερα αποτελεί
αντικείμενο έρευνας.

Οι μαθητές δικαιούνται να είναι
ενημερωμένοι τουλάχιστον
για τα βασικά σημεία της.

*2. Τα fractals
προκαλούν άμεσα
το ενδιαφέρον των μαθητών,
διότι τα περισσότερα
αντικείμενα του φυσικού
κόσμου δεν περιγράφονται
από την Ευκλείδεια
Γεωμετρία.*

3. *Ενώ δεν αποτελούν
διδακτέα ύλη,
με μια μικρή εισαγωγή
οι μαθητές μπορούν
να αντιληφθούν
τι είναι τα fractals
και τι ιδιότητες έχουν.*

4. *Μας δίνουν τη δυνατότητα
για διαθεματική προσέγγιση
με τα Μαθηματικά
τη Φυσική
τη Χημεία
τη Γεωλογία
τη Βιολογία
ακόμα και με την Οικονομία.*

*5. Μας δίνουν τη δυνατότητα
για πραγματικές
ερευνητικές δραστηριότητες,
που εύκολα μπορούν
να κάνουν οι μαθητές,
στηριζόμενοι στις γνώσεις
που απέκτησαν στα Μαθηματικά
και τις Φυσικές επιστήμες.*

*Οι δραστηριότητες αυτές
είναι κατάλληλες
για την εκπαιδευτική
αξιολόγηση των μαθητών.*

*6. Απαιτούν τη χρήση
ηλεκτρονικού υπολογιστή.*

7. Ο πειραματισμός
δεν απαιτεί υλικά και όργανα
που είναι δύσκολο
να βρεθούν
σε σχολικό εργαστήριο
και γενικά είναι ασφαλής.

8. Είναι κατάλληλα
για παραγωγή προβλημάτων
για την επίλυση των οποίων
απαιτείται γνώση
σημαντικών διαδικασιών της επιστήμης
όπως η χρήση των Μαθηματικών
η εξαγωγή πληροφοριών
από πειραματικά δεδομένα
και η μοντελοποίηση.

9. Στα προβλήματα αυτά απαιτείται γνώση εννοιών που αποτελούν «κλειδιά» για την επιστήμη όπως πυκνότητα, κλίση σε διάγραμμα, κλίμακα, κανονικότητα και πολυπλοκότητα.

Όλα αυτά δεν ελέγχουν απλά
τη μνημονική ικανότητα
του μαθητή,
αλλά ανοίγουν
τους ορίζοντες της σκέψης τους
και τους εμπλέκουν
σε μια διανοητική δραστηριότητα
αναζήτησης.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. B.B.Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature (Freeman, New York, 1983).
2. Michael Naylor “Exploring Fractals in the Classroom” : **Mathematics Teacher v 92 n4 p360- 66 Apr 1999**
3. M.A.F.Gomes, T.I.Jyh, T.I.Ren, “The crumpled state of some non-equilibrium fractal sur-faces,”
4. J.Feder, Fractals (Plenum,New York,1989).
5. L.B.Horodynski_Matsushique et al., “Gambling as a teaching aid in the introductory phys-ics laboratory,” Eur.J.Phys.19,337 (1998). Center for Polymer Studies, Department of Physics, Boston University, 590 Commonwealth Avenue, Boston, MA 02215.

- 6.** Q.Ho-Kim, N.Kumar, C.S.Lam. Invitation to contemporary physics.
- 7.** Volkhard Nordmeir, Fractals in Physics-From low cost experiments to fractal Geometry. University of Essen, Germany.
- 8.** T.A. Witten and L.M.Sander "Diffusion Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon" Phys. Rev. Lett. 47, 1400-03 (1981)
- 9.** Γ.Θ. Καλκάνης, "Εκπαιδευτική Τεχνολογία", Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 1998
- 10.** Θ. Βίτσας, Ε. Κολέζα, Κ. Σκορδούλης: «Διάσταση: Η δυναμική εξέλιξη μιας έννοιας. Προϋπόθεση μιας διδακτικής πρότασης» Μαθηματική επιθεώρηση τ.46, 1996.

11. Θ. Βίτσας, Ε Κολέζα, Κ. Σκορδούλης: « Ιστορική Εξέλιξη της έννοιας της διάστασης: Από τον Ευκλείδη στη Μορφοκλασματική Γεωμετρία.» (1ο Μεσογειακό Συνέδριο στα Μαθηματικά, 2-5 Ιανουαρίου 1997, Λευκωσία, Κύπρος.)

12. Θ. Βίτσας, Ε Κολέζα, Κ. Σκορδούλης: « Η έννοια της διάστασης: Ιστορική και Διδακτική προσέγγιση.» (4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωμετρίας, Πανεπιστήμιο Πατρών 28-30 Μαΐου 1999).

13. Θ. Βίτσας, Ε Κολέζα, Κ. Σκορδούλης: «Ευκλείδειες και Ημιεμπειρικές Θεωρίες-Ο ρόλος των πειραμάτων στον υπολογιστή» (Η συμβολή της Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Φυσι-κών Επιστημών στη Διδασκαλία. 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο, Αθήνα 8-11 Μαΐου 2003)

14. Σ. Οικονομίδης, Κ Σκορδούλης : «Ικανότητα Επίλυσης Προβλήματος στη Fractal Διά-σταση από μαθητές της Β' Λυκείου» 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΕΦ, Λουτράκι 2004.

15. Σ. Οικονομίδης, Κ Σκορδούλης «Τα fractals στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών». Ημερίδα Μέγαρο Νίκαιας 24/4/2004.

16. Μπούντης Αναστάσιος, Δυναμικά συστήματα και χάος, Τόμος Α', Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1995.

17. Μπούντης Αναστάσιος, Δυναμικά συστήματα και χάος, Τόμος Β', Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1997