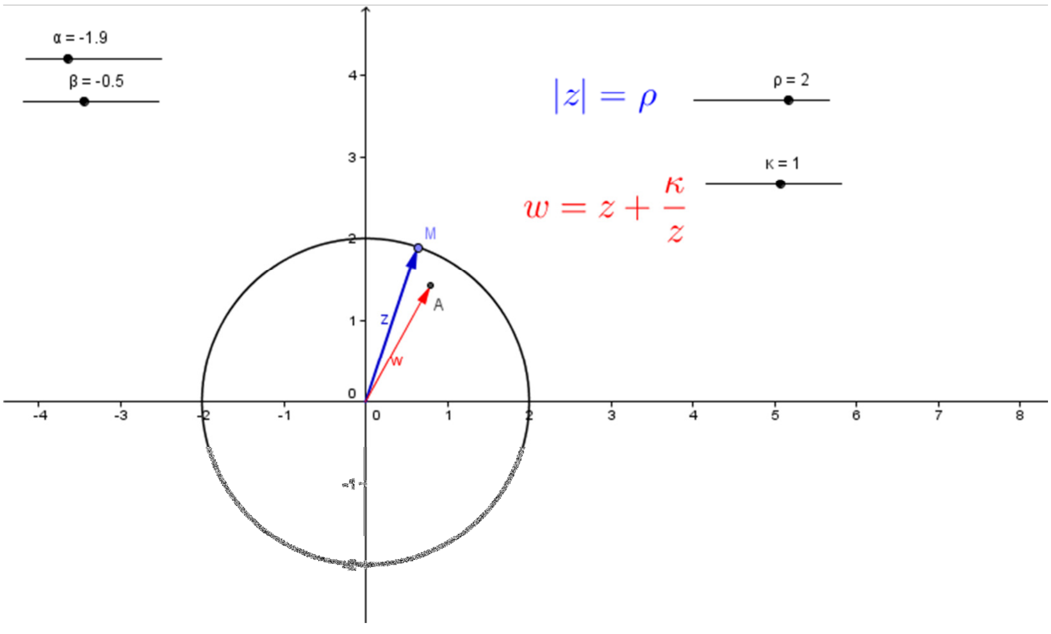
Θεωρητικό πλαίσιο- μαθηματική επεξεργασία

Γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών w της μορφής w=f(z), όταν $|z| = \rho$

- $f(z) = z + \dfrac{\kappa}{z}$, $\kappa \in \Re^*$

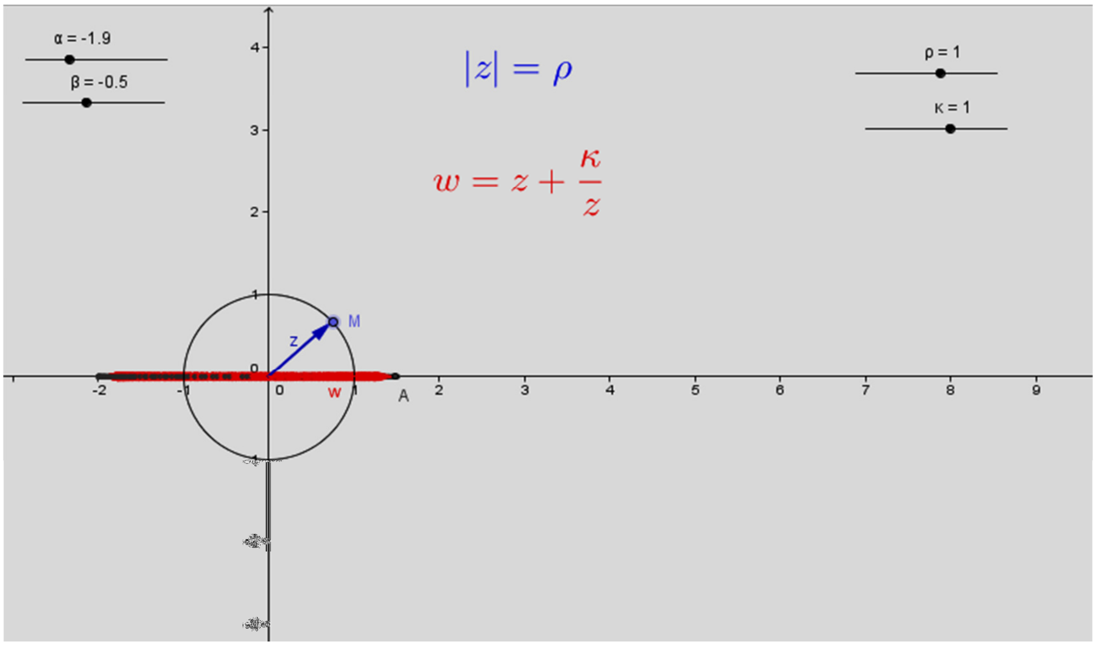
Αρχικά ορίζουμε τις παραμέτρους α, β, κ, ρ, με τη βοήθεια δρομέων, που θα μας επιτρέψουν την αυτόματη αλλαγή και αναπαράσταση των μιγαδικών που θεωρούμε κάθε φορά και του κύκλου που κινείται η εικόνα του z. Έτσι στην οθόνη μας εμφανίζεται το ακόλουθο σχήμα. Η δυναμικότητα του σχήματος θα μας οδηγήσει σε πειραματισμούς, εικασίες, παρατηρήσεις, συμπεράσματα και τέλος σε μαθηματική τεκμηρίωση αυτών.



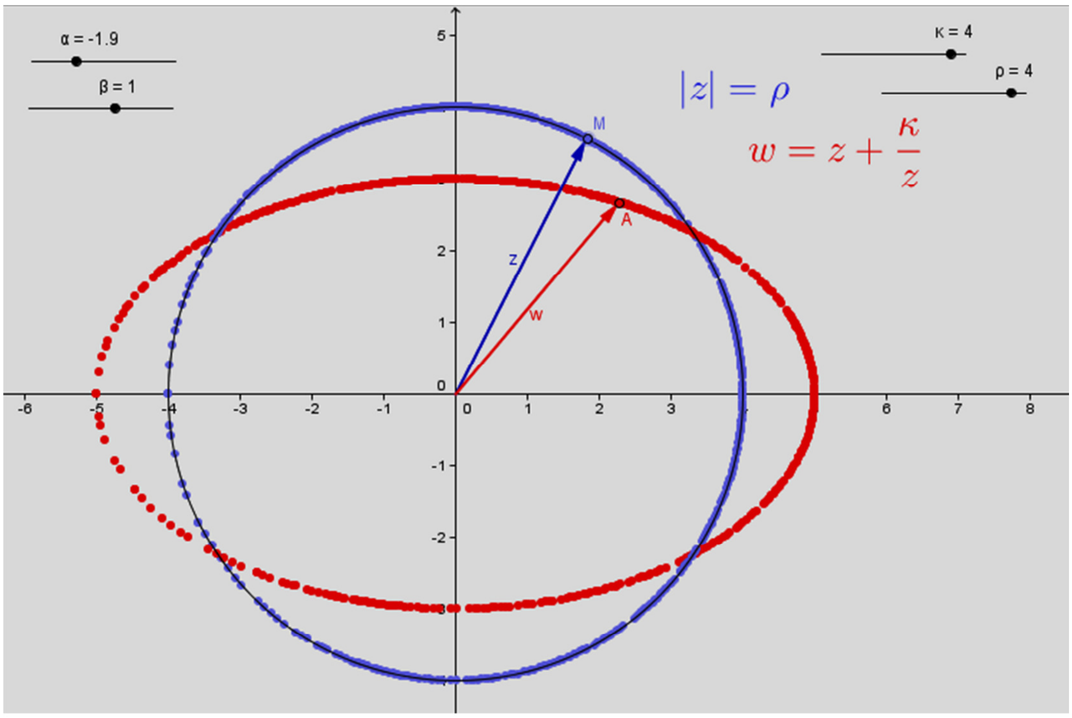
Διανυσματικές ακτίνες των z, w με $|z| = \rho$, w= $z + \dfrac{\kappa}{z}$

Στα επόμενα σχήματα διαγράφεται ο γεωμετρικός των μιγαδικών $w = z + \dfrac{\kappa}{z}, \kappa \in \Re^*$ με $|z| = \rho$ για τις διάφορες τιμές του κ. Παρατηρούμε ότι για κ= ρ^2 ο γεωμετρικός τόπος των A(w) είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του άξονα x΄x, ενώ για κ= -ρ^2 ευθύγραμμο τμήμα του άξονα y΄y. Όταν

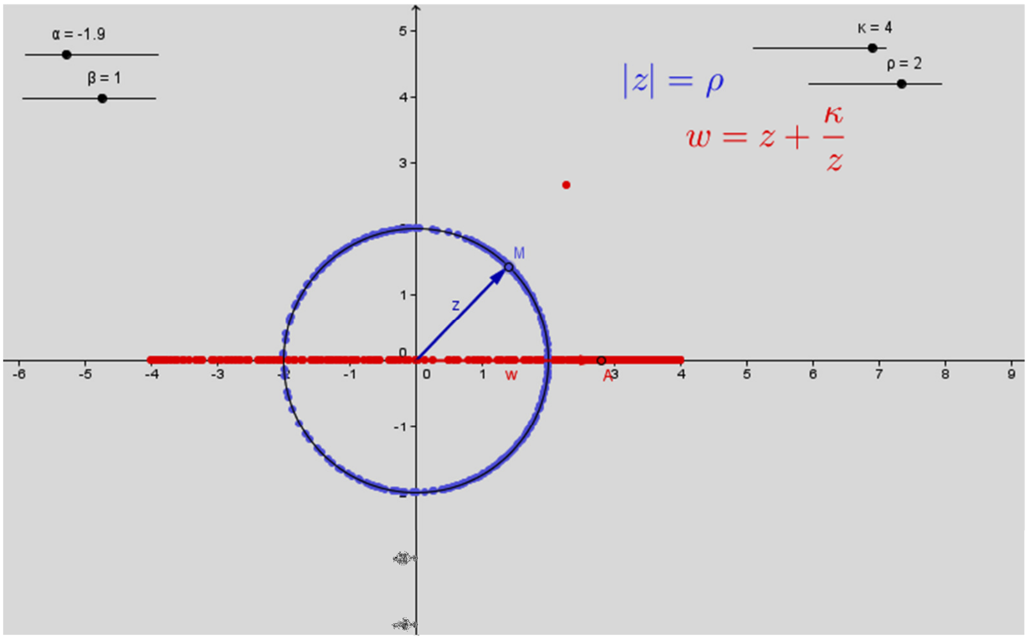
$\kappa \neq \rho^2$ ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι έλλειψη με εστίες στον x΄x (αν κ>0) ή στον y΄y (αν κ<0).



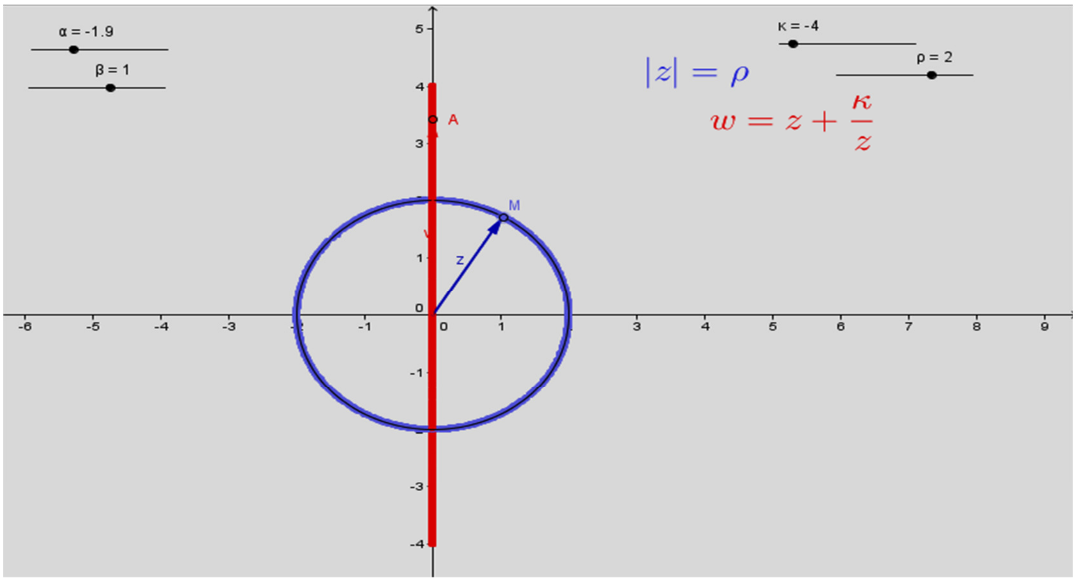
Γεωμετρικός τόπος του $w = z + \frac{1}{z}$ *όταν* $|z| = 1$



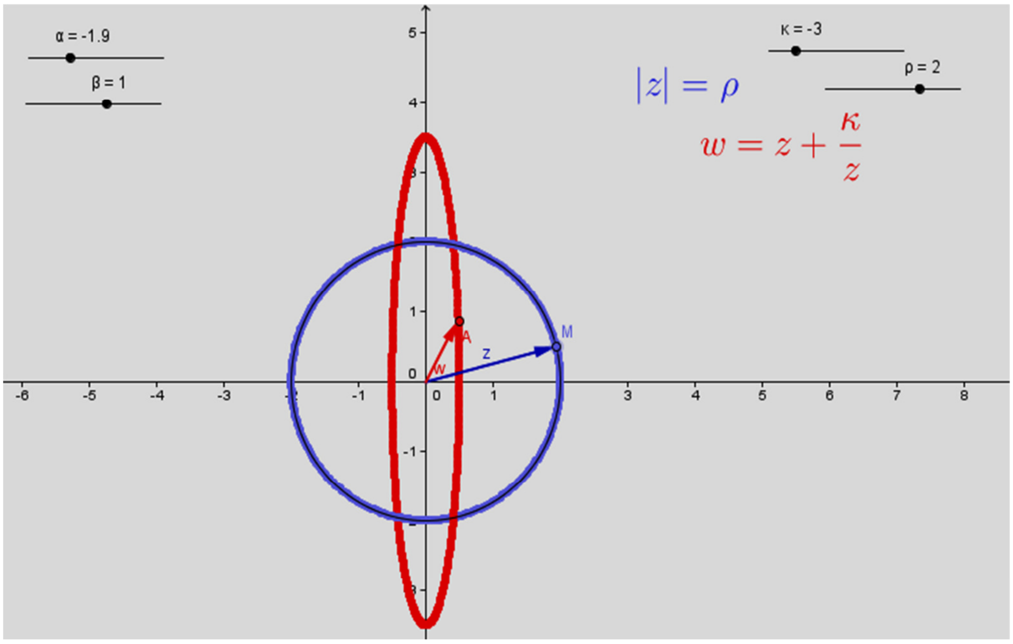
Γεωμετρικός τόπος του $w = z + \frac{4}{z}$ *όταν* $|z| = 4$



Γεωμετρικός τόπος του $w = z + \dfrac{4}{z}$ *όταν* $|z| = 2$



Γεωμετρικός τόπος του $w = z - \dfrac{4}{z}$ *όταν* $|z| = 2$



Γεωμετρικός τόπος του w= $z-\frac{3}{z}$ *όταν* $|z|=2$

<u>Απόδειξη της ορθότητας των παραπάνω συμπερασμάτων μας</u>

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z=α+βi με $|z|=\rho \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=\rho^2$ (1) , ρ>0 και ο μιγαδικός w= $z+\frac{\kappa}{z}$, με κ$\neq 0$ (2). Αν M(x,y) είναι ένα τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου των w=x+yi, τότε με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε:

$$x+yi=\alpha+\beta i+\frac{\kappa(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow x+yi=\alpha+\beta i+\frac{\kappa}{\rho^2}(\alpha-\beta i) \quad (3)$$

- **Αν κ=ρ²** η σχέση (3) γράφεται:

$$x+yi=\alpha+\beta i+\alpha-\beta i \Leftrightarrow x+yi=2\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{x}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Λόγω της (1) έχουμε: $\frac{x^2}{4}+\beta^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2-\frac{x^2}{4}=\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow \rho^2-\frac{x^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 4\rho^2 \Leftrightarrow -2\rho\leq x\leq 2\rho$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι ευθύγραμμο τμήμα του x'x με -2ρ$\leq x\leq 2\rho$.

- **Αν κ=-ρ²** η σχέση (3) γράφεται:

$$x+yi=\alpha+\beta i-\alpha+\beta i \Leftrightarrow x+yi=2\beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \beta=\dfrac{y}{2} \end{cases}.$$

Εργαζόμενοι όπως και πριν με τη βοήθεια της (1) καταλήγουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου με $\begin{cases} x=0 \\ -2\rho \le y \le 2\rho \end{cases}$ δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα του y΄y με -2ρ$\le y \le 2\rho$.

- Αν κ$\neq \rho^2$ η (2) γράφεται:

$$x+yi=\alpha+\beta i+\frac{\kappa}{\rho^2}a-\frac{\kappa}{\rho^2}\beta i \Leftrightarrow x+yi=a\cdot\left(\frac{\rho^2+\kappa}{\rho^2}\right)+\beta\cdot\left(\frac{\rho^2-\kappa}{\rho^2}\right)i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\alpha\dfrac{\rho^2+\kappa}{\rho^2} \\ y=\beta\dfrac{\rho^2-\kappa}{\rho^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{\rho^2}{\rho^2+\kappa}x \\ \beta=\dfrac{\rho^2}{\rho^2-\kappa}y \end{cases}$$

Λόγω της (1) έχουμε:

$$\frac{\rho^4}{\left(\rho^2+\kappa\right)^2}x^2+\frac{\rho^4}{\left(\rho^2-\kappa\right)^2}y^2=\rho^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\dfrac{\rho^2+\kappa}{\rho}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{\rho^2-\kappa}{\rho}\right)^2}=1$$

- Αν κ>0 τότε $\left(\dfrac{\rho^2+\kappa}{\rho}\right)^2>\left(\dfrac{\rho^2-\kappa}{\rho}\right)^2$ και επομένως ο γ.τ. των εικόνων των w είναι έλλειψη με εστίες στον x΄x.
- Αν κ<0 τότε $\left(\dfrac{\rho^2+\kappa}{\rho}\right)^2<\left(\dfrac{\rho^2-\kappa}{\rho}\right)^2$ και επομένως ο γ.τ. των εικόνων των w είναι έλλειψη με εστίες στον y΄y.

Ο γεωμετρικός των μιγαδικών $w = z + \frac{\kappa}{z}, \kappa \in \Re^*$ με $|z| = \rho$,ρ>0

Τάξη: Γ (Θετική –Τεχνολογική Κατεύθυνση)

Διδάσκουσα: Αγγελική Ευσταθίου

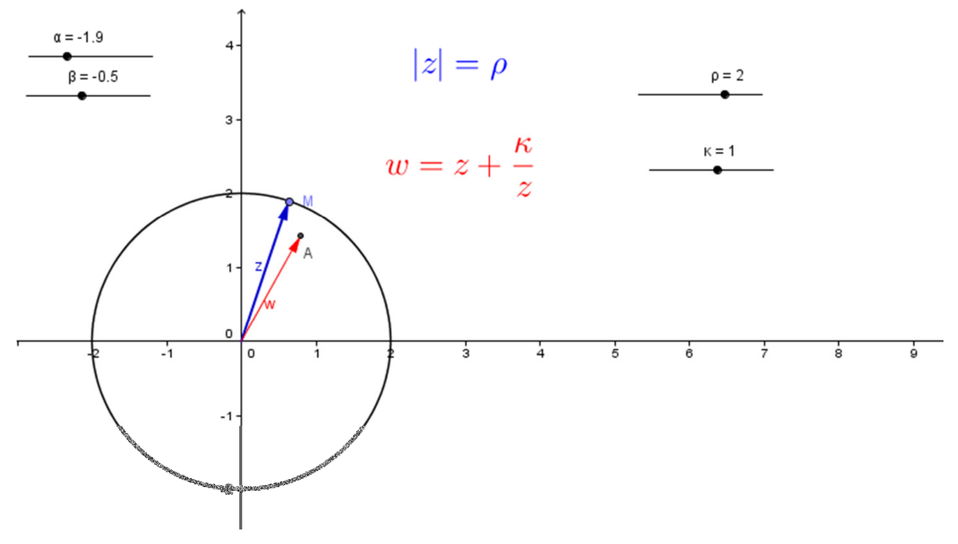
Ονοματεπώνυμο μαθητών:

1)...

2)...

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο δρομείς ρ και κ (οι τιμές των οποίων μπορούν να μεταβάλλονται με απλό σύρσιμο), ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z) (κύκλος με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ) και η διανυσματική ακτίνα του $w = z + \frac{\kappa}{z}, \kappa \in \Re^*$.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

Ερωτήματα για διερεύνηση:

1) Μεταβάλλουμε τις τιμές των δρομέων κ, ρ σε: **κ=4 και ρ=4.**
Επιλέγουμε τα σημεία Μ και Α να αφήνουν το ίχνος τους ενεργό με την εντολή «Ίχνος ενεργό». Μετακινούμε το σημείο Μ αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου Α.

Σε τι είδους γραμμή ανήκει το Α;

2) Μεταβάλλουμε τις τιμές των δρομέων κ, ρ σε: **κ=1 και ρ=1.**
Μετακινούμε το σημείο Μ αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου Α.

Σε τι είδους γραμμή ανήκει το Α;

3) Συνεχίζουμε να μεταβάλλουμε τις τιμές των δρομέων κ και ρ. Σε τι είδους γραμμή κινούνται οι εικόνες των Α(w);

Όταν :

- **κ= 4 και ρ=2:**
  …………………………………………………………………………………………

  …………………………………………………………………………………………

- **κ=-4 και ρ=2:**
  ……………………………………………………………………………………………..

  …………………………………………………………………………………………

- **κ=-3 και ρ=2:**
  ……………………………………………………………………………………………..

4) Να διατυπώσετε μια εικασία –συμπέρασμα για το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των A(w) ανάλογα με τη σχέση που συνδέει τις τιμές των κ, ρ.

5) Υποθέστε ότι ο z είναι της μορφής $\alpha+\beta i$ και ο w της μορφής $x+yi$, με $\alpha, \beta, x, y \in \Re$ Αποδείξτε την ορθότητα των παραπάνω συμπερασμάτων σας στην περίπτωση όπου $\kappa=\rho^2$.