

Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (2x2) με τη μέθοδο των οριζουσών

1) Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών, το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$$

Λύση: Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -4 - 15 = -19 \neq 0$$

οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Επιπλέον έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -16 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-16) = -10 + 48 = 38$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-16) - 5 \cdot 5 = -32 - 25 = -57$$

επομένως έχουμε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{38}{-19} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-57}{-19} = 3$$

άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

2) Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών, το σύστημα

$$\begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Λύση: Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = -4 + 4 = 0$$

οπότε το σύστημα θα είναι ή αδύνατο ή θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Παρατηρούμε όμως ότι αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση με το 2, ενώ αφήνουμε την πρώτη όπως έχει, τότε το σύστημα γίνεται ισοδύναμο ως εξής:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \quad \text{το οποίο είναι αδύνατο, άρα το σύστημα δεν έχει καμιά λύση.}$$

3) Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών, το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$$

Λύση: Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 6 \cdot (-1) = -6 + 6 = 0$$

οπότε το σύστημα θα είναι ή αδύνατο ή θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Παρατηρούμε όμως ότι αν πολλαπλασιάσουμε τη πρώτη εξίσωση με το 3, ενώ αφήσουμε τη δεύτερη όπως έχει, τότε το σύστημα γίνεται ισοδύναμο ως εξής:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}, \text{ οπότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.}$$

Για να τις βρούμε, παίρνουμε όποια εξίσωση θέλουμε από τις δυο του αρχικού συστήματος, π.χ. την $2x - y = 1$ και τη λύνουμε ως προς y , οπότε προκύπτει $y = 2x - 1$.

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι της μορφής $(\kappa, 2\kappa - 1)$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.