Μονώνυμα - Πολυώνυμα

Γ΄ Γυμνασίου

Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε έκφραση που περιέχει μόνο αριθμούς.

π.χ. $8 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, $\quad 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 5$.

Αλγεβρική παράσταση λέγεται κάθε έκφραση, από αριθμούς και μεταβλητές ή μόνο μεταβλητές, που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων.

Μία αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

π.χ. $3\psi + x^3$, $\frac{2}{5}\alpha + \beta^5$.

Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

Μονώνυμα λέγονται οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

π.χ $5x$, α^3, $\sqrt{5}\,x\omega^4$, $\frac{2}{5}\alpha\beta^6$

Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

Στο μονώνυμο $3\,x^4\psi$.

Το 3 είναι ο συντελεστής

Το $x^4\psi$ είναι το κύριο μέρος

Ο εκθέτης μιάς μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

Το μονώνυμο $3x^4ψ$ είναι:

4ου	**βαθμού**	**ως προς x**
1ου	**βαθμού**	**ως προς ψ**
5ου	**βαθμού**	**ως προς x, ψ**

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια**,
π.χ. τα μονώνυμα $\frac{3}{4}x^2ψ$, $-6x^2ψ$, $x^2ψ$ είναι όμοια.

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα**, ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**, π.χ. τα μονώνυμα $2x^5ψ^4$ και $-2x^5ψ^4$, είναι αντίθετα.

Μπορούμε επίσης και τους αριθμούς να τους θεωρούμε ως μονώνυμα και τους ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός **0** λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Παρατήρηση:

Για να βρούμε τον βαθμό ενός μονωνύμου, πρέπει ο συντελεστής του μονωνύμου να είναι διάφορος του μηδενός.

Λυμένες ασκήσεις

1) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε τα μονώνυμα $(3λ-2)\,x^3ψ^2$ και $(λ-2)\,x^3ψ^2$
α) να είναι ίσα, **β)** να είναι αντίθετα.

Λύση

α) Για να είναι ίσα πρέπει: $3λ - 2 = λ - 2$ ή $3λ-λ = -2+2$ ή $2λ= 0$ ή $λ= 0$

β) Για να είναι αντίθετα πρέπει: $(3λ - 2) + (λ - 2) = 0$ ή $3λ+λ = 2+2$ ή $4λ = 4$ ή $λ = 1$

2) Δίνεται το μονώνυμο $(α - 3)x^3$ να βρείτε τον βαθμό του.

Λύση

1η περίπτωση:

Αν $α - 3 = 0$ ή $α = 3$ τότε το μονώνυμο είναι το μηδενικό και δεν έχει βαθμό.

2η περίπτωση:

Αν $α - 3 \neq 0$ ή $α \neq 3$ τότε το μονώνυμο είναι 3ου βαθμού.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ώς σωστές(Σ) ή λνθασμένες(Λ)

1) Δύο μονώνυμα είναι όμοια όταν είναι ίδιου βαθμού.

2) Ο βαθμός του μονωνύμου $2007\, x^4\psi^3\omega$ είναι ίσος με 7.

3) Το μονώνυμο $(\alpha - 4)\, x^5$ είναι $5^{ου}$ βαθμού για κάθε τιμή του α.

4) Η παράσταση $x^4\psi^2 + x^4\psi^2$ είναι μονώνυμο.

5) Η παράσταση $3x^{-2}\psi^3$ είναι μονώνυμο.

6) Οι παραστάσεις $4x^{-2}\psi^3$, $6x^{-2}\psi^3$ είναι όμοια μονώνυμα.

7) Η αλγεβρική παράσταση $4\alpha^{\lambda+3}\beta^2$ είναι μονώνυμο για κάθε τιμή του ακεραίου λ.

8) Τα αντίθετα μονώνυμα είναι ίδιου βαθμού.

9) Η αλγεβρική παράσταση $\frac{2}{x}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή 2.

10) Η αλγεβρική παράσταση $\frac{x}{2}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή $\frac{1}{2}$.

11) Το κύριο μέρος του μονωνύμου $-4\alpha^3\beta^2$ είναι το αβ.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1) Τα μονώνυμα $(3\alpha + 1)x^3\psi^{\alpha+2}$, $-5x^3\psi^2$ είναι όμοια αν το α είναι:
α. -2, **β.** 0, **γ.** 2, **δ.** 4.

2) Η παράσταση $2x^2\psi^\kappa + 3x^\lambda\psi^3$ είναι μονώνυμο αν:
α. $\lambda = 2$, **β.** $\kappa = 3$ **γ.** $\lambda = 2$ ή $\kappa = 3$ **δ.** $\lambda = 2$ και $\kappa = 3$.

3) Αν η παράσταση $2x^\kappa\psi^\nu$ είναι μονώνυμο. Τότε οι αριθμοί κ, ν είναι:
α. ίσοι, **β.** φυσικοί, **γ.** ακέραιοι, **δ.** θετικοί.

4) Ο βαθμός του μονωνύμου $[2x^2 (x\,\psi)^2]^3$ ως προς x είναι:
α. 6ου βαθμού. **β.** 4ου βαθμού **γ.** 7ου βαθμού **δ.** 12ου βαθμού.

5) Δίνεται το μονώνυμο $A = 3x^2\psi^3$. Η αλγεβρική τιμή του για $x = -3$ είναι -27. Τότε η τιμή του ψ είναι:
α. 1, **β.** -1, **γ.** 27, **δ.** -27.

Στον παρακάτω πινακα να συμπληρωθεί η στήλη με το βαθμό του μονώνυμου:

$3\chi^3 y^2$	
$\frac{2}{3}\chi^3 x^{-2} y^2$	
$\frac{2}{3}\chi^3 3x^{-1} y^2$	
$4\chi^5 3x^2 y^2$	
$4x^2 y^2 \frac{2}{4} y^1$	
4	

Να γίνει αντιστοίχηση μεταξύ ομοίων μονώνυμων

$3a^3\beta^2$	4β
$\frac{3}{5}\alpha^3\beta$	$5\sqrt{5}\beta^3\alpha$
$\frac{1}{4}\beta^4\alpha$	$-4\beta^{-2}\alpha\beta^6$
$\sqrt{3}\alpha\beta^3$	$\frac{21}{7}a^3\beta^2$
$\frac{8}{3}\delta\beta\delta^{-1}$	$\frac{3}{5}\beta^{-1}\alpha^3\beta^2, \beta \neq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω προτάσεις, συμπληρώνοντας τον πίνακα που ακολουθεί :

- Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και 3
- Το εμβαδό ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και 3
- Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα υ (Km/h) σε χρόνο 3 h
- Το μήκος ενός ορθογωνίου με εμβαδό 10 (cm^2) , αν το πλάτος του είναι χ.
- Το τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές χ και 4.
- Η επιφάνεια ενός κύβου με ακμή α.
- Η επιφάνεια ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ.
- Η περίμετρος ενός κύκλου ακτίνας ρ.
- Το εμβαδό ενός κύκλου ακτίνας ρ.
- Το τριπλάσιο ενός αριθμού χ αυξημένο κατά τον κύβο του.

Α/Α	ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΟΝΟΝΥΜΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2) Ποιές από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

α) $-\frac{4}{3}x^2\psi^3$ **β)** $4-3x^2\psi^3$ **γ)** $3x^2\psi^{-3}$ **δ)** $(4-\sqrt{5})\,x^3\psi^5$ **ε)** $\frac{x^4\cdot\psi^4}{8}$

στ) $\frac{x^5\psi^3}{\omega^2}$ **ζ)** $\frac{x^4\psi^8}{\omega^{-4}}$ **η)** $\frac{3}{4}\sqrt{x}\psi^4$

3) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντε-λεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς ψ	Βαθμός ως προς x, ψ
$x\psi^4$					
$\dfrac{2x^4\psi^2}{3x^{-2}}$					
$(-\sqrt{3}-2)x^4$					
$(-\sqrt{5}x^3\psi)^2$					

4) Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν την επιφάνεια και τον όγκο κύβου ακμής x. Να προσδιορίσετε το συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου για $x = 5$.

5) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παρακάτω παράστασεις:
α) $\mathbf{A} = 3\,\alpha^{\lambda+2}\beta^3 + 6\,\alpha^5\beta^\lambda$
β) $\mathbf{B} = (\lambda-2)\,x^3\psi^2 + (\lambda+3)\,x^2\psi^3$
να είναι μονώνυμα και να βρείτε τον βαθμό τους για τις διάφορες μεταβλητές.

6) Να γράψετε στην τελική τους μορφή τα μονώνυμα:
α) $3x^4\psi^2 + (x^2\psi)^2$ **β)** $(x\psi^2)^2\,x$ **γ)** $(x^2\psi^3)^2 \cdot (x\psi)^3$

Πρόσθεση μονωνύμων

α) Αν τα μονώνυμα είναι όμοια τότε το άθροισμά τους είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

β) Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το άθροισμα τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μία αλγεβρική παράσταση.

Γινόμενο μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

Διαίρεση μονωνύμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε τους συντελεστές και αφαιρούμε τους εκθέτες των μεταβλητών

Παρατηρήσεις

Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
Το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο.

Λύμενες ασκήσεις

1) **Να κάνετε τις πράξεις:**

α) $2x^2\psi - 4\psi x^2$, **β)** $2\alpha^3\beta^6-6(\alpha\beta^2)^3$, **γ)** $2x^3\psi-3x+6x^3\psi+3x$, **δ)** $\frac{1}{4}x^5\psi-\frac{1}{2}x^5\psi$,

ε) $3x^2\psi^4+(2x\psi^2)^2$, **στ)** $\sqrt{8}x^2\psi^4-\sqrt{2}(x\psi^2)^2$

Λύση

α) $2x^2\psi-4\psi x^2 = (2-4)x^2\psi = -2x^2\psi$, **β)** $2\alpha^3\beta^6-6(\alpha\beta^2)^3 = 2\alpha^3\beta^6-6\alpha^3\beta^6 =$
$= (2-6)\alpha^3\beta^6 = -4\alpha^3\beta^6$, **γ)** $2x^3\psi-3x+6x^3\psi+3x = (2+6)x^3\psi = 8x^3\psi$

δ) $\frac{1}{4}x^5\psi-\frac{1}{2}x^5\psi = (\frac{1}{4}-\frac{1}{2})x^5\psi = (\frac{1}{4}-\frac{2}{4})x^5\psi = -\frac{1}{4}x^5\psi$

ε) $3x^2\psi^4+(2x\psi^2)^2 = 3x^2\psi^4+4x^2\psi^4 = (3+4)x^2\psi^4 = 7x^2\psi^4$

στ) $\sqrt{8}x^2\psi^4-\sqrt{2}(x\psi^2)^2 = \sqrt{8}x^2\psi^4-\sqrt{2}x^2\psi^4 = (\sqrt{8}-\sqrt{2})x^2\psi^4 = (2\sqrt{2}-\sqrt{2})x^2\psi^4 = \sqrt{2}x^2\psi^4$

2) **Να βρείτε τα γινόμενα:**
α) $3x^4 \cdot 2x^5 \cdot (-4x)^2$, **β)** $-3x^3\psi^2 \cdot (-2x\psi^3)$, **γ)** $6x^2 \cdot (-2x^6\psi^2) \cdot (5x^3\psi^4)$
δ) $(2x)^3 \cdot 3x^2$

Λύση
α) $3x^4 \cdot 2x^5 \cdot (-4x)^2 = 3x^4 2x^5 16x^2 = (3\cdot 2\cdot 16)(x^4x^5x^2) = 96x^{11}$
β) $-3x^3\psi^2 \cdot (-2x\psi^3) = (-3)\cdot(-2)\cdot(x^3\psi^2x\psi^3) = 6x^4\psi^5$
γ) $6x^2 \cdot (-2x^6\psi^2) \cdot (5x^3\psi^4) = 6(-2)5\cdot(x^2x^6x^3\psi^2\psi^6) = -60x^{11}\psi^8$
δ) $(2x)^3 \cdot 3x^2 = 8x^3 3x^2 = 24x^5$

3) **Να βρείτε τα πηλίκα:**
α) $4x^3 : 2x$, **β)** $-2x^7\psi^4 : (-x\psi^3)$, **γ)** $x^2\psi^8 : (x^5\psi^6)$

Λύση

α) $4x^3 : 2x = 4x^3\dfrac{1}{2x} = 2x^2$, **β)** $-2x^7\psi^4 : (-\dfrac{1}{2}x\psi^3) = -2x^7\psi^4\dfrac{-2}{x\psi^3} =$

$= -2(-2)\dfrac{x^7\psi^4}{x\psi^3} = 4x^6\psi^3$ **γ)** $\dfrac{3}{4}x^2\psi^8 : (\dfrac{2}{5}x^5\psi^6) = \dfrac{3x^2\psi^8}{4}\cdot\dfrac{2x^5\psi^6}{5} =$

$= \dfrac{6x^7\psi^{14}}{20} = \dfrac{3}{10}x^7\psi^{14}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ώς σωστές(Σ) ή λνθασμένες(Λ)

1) Το πηλίκο δύο αντίθετων μονώνυμων είναι πραγματικός αριθμός.

2) Η διαίρεση μεταξύ μονωνύμων γίνεται μόνο αν τά μονώνυμα είναι όμοια.

3) Αν δύο μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το γινόμενο δεν είναι μονώνυμο.

4) Το πηλίκο δύο όμοιων μονωνύμων είναι πραγματικός αριθμός.

5) Η διαίρεση δύο μονωνύμων γίνεται αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή.

6) Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο.

7) Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) **Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:**

$$3\alpha\chi^2 + 4\alpha\chi^2$$

$$2y^3a^2 - 5a^2y^3$$

$$-4xy + 4xy - 3xy$$

$$5\alpha\beta^2 - 8\alpha\beta^2 + 3\alpha\beta^2$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2\chi - \frac{1}{4}\beta^2\chi$$

$$\sqrt{2}\alpha\omega^3 + \sqrt{8}\alpha\omega^3 + \sqrt{18}\alpha\omega^3$$

$$-7\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 - 9\alpha^2\beta^2 - 3\alpha^2\beta^2$$

$$-2\chi^2\alpha + 6\chi^2\alpha + 8\chi^2\alpha - 12\chi^2\alpha$$

$$8\chi^2\beta^3 + \chi^2\beta^3 - 12\chi^2\beta^3 + 2\chi^2\beta^3$$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

i) $2xy^2 \cdot (-3x^2y^4)$ **ii)** $\left(-\frac{2}{3}\alpha^3\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\alpha y^2\right)$

iii) $\frac{2}{5}x^2y^3\omega \cdot \left(-\frac{15}{8}x^5y^3\omega\right)$

iv) $2xy^2 \cdot (-4x^3y) \cdot (-x^4y^6)$

v) $xy \cdot (-\alpha^2\beta^2\gamma) \cdot 4\alpha^3\gamma^5 \cdot (-\frac{1}{2}\alpha^3\beta\gamma^2)$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\beta\right)^3 \cdot (-2\beta^3\alpha^5) \cdot (-3\alpha\beta^4\gamma)^2$

ii) $(-2x^3y^2\omega)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\omega^2y^4\right)^3$

iii) $(-3\kappa\lambda^2\mu^3)^3 \cdot (-\kappa^4\lambda\mu^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\mu\kappa^5\lambda^6\right)^2$

v) $\left(-3\alpha^4x^2\beta^5y\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}\alpha\beta^4xy^3\right)^2 \cdot \left(-ax^6y^2\right)^4$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

- $\left(2\chi \cdot 3\chi - \chi^2\right)^2 : \chi^3$
- $2\alpha^3\beta\gamma^2 : \left(\sqrt{2}\alpha\beta\gamma\right) - \sqrt{2}\alpha \cdot \left(3\alpha^2 : \alpha - 2\alpha\right)\gamma$
- $\chi \cdot (\psi - 3\psi) : (-2) + 3\psi(\chi - 2\chi) - (\chi\psi)^3 : (\chi^2\psi^2)$
- $\left(\frac{1}{5}\omega^3 : \left(0,2\omega^2\right)\right)^3 : (-2\omega)^2 + 5\omega - \left(-\left(-3\omega\right)\right)$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

i) $-12x^8 : (-6x^5)$ **ii)** $(-24\alpha^9\beta^7) : (6\alpha^5\beta^3)$

iii) $(-18\alpha^2\beta^3) : (9\alpha^3\beta)$ **iv)** $10xy^4z^3 : (-15x^3y^4z^5)$

6) Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις μονώνυμων

i) $6\chi^4y^3\omega^6 : 3\chi^2y^3\omega^2$ v) $(4\chi^3y^4z^8) : (16\chi^3y^3z^5)$

ii) $(-16\chi^5y^3\omega^2) : (-4\chi^3y\omega)$

ii) $(-\frac{4}{3}\chi^7y^3\omega^2) : (\frac{3}{2}\chi^3y^2\omega)$

iv) $6\chi^{\kappa+2}y : 2\chi^{\kappa}y$

7) Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $[2x^3y^4 \cdot (-6x^2y)] : (-4x^5y^7)$

ii) $[(-4\alpha^2\beta^3x) \cdot \alpha^5x^3) \cdot (-\frac{1}{2}\alpha^6\beta x)] : (-14\alpha^{11}\beta^5x^4)$

iii) $(-\frac{2}{3}\alpha^3x^5)^3 : (-\frac{4}{9}\alpha^4x^4)^2$

iv) $\left[\left(-\frac{1}{3}\kappa^2\lambda^3\mu\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\kappa\lambda^4\right)^3\right] : \left(-\frac{3}{4}\mu^2\lambda\right)^2$

Πολυώνυμα-Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά. Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο, αλλά μία αλγεβρική παράσταση που λέγεται **πολυώνυμο**.

Π. χ. $\mathbf{4x^3 \psi - 7x \psi + 8x\psi^4}$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος του πολυωνύμου.**

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται:

- **διώνυμο**, αν έχει δύο όρους π.χ. $4\alpha^2 + \beta^3$
- **τριώνυμο**, αν έχει τρείς όρους π.χ. $4x^2 - 2x + 5$

Βαθμός ενός πολυωνύμου, ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται σταθερό πολυώνυμο. Ο αριθμός μηδέν, λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

Το πολυώνυμο $\mathbf{4x^5 \psi - 2x\psi^3 + 2x^7 \psi^3}$ είναι:

7ου βαθμού	ως προς x,
3ου βαθμού	ως προς ψ,
10ου βαθμού	ως προς x , ψ.

Αν ένα πολυώνυμο έχει μόνο μία μεταβλητή τότε μπορούμε με συντομία να το γράψουμε: P(x) ή Q(x) ή A(x) κ.λ.π.

Ετσι: $A(x) = x^3+2x^2-x+1$, $P(x) = -\frac{4}{5}x^2-2x+\sqrt{2}$.

Αν ένα πολυώνυμο με μια μεταβλητή μπορούμε να το γράψουμε έτσι ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλυτέρου βαθμού από τον επόμενό του, τότε λέμε ότι γράφουμε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.

Π.χ. $P(x) = -4x^3 - 2x + 2$.

Αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \alpha$ και συμβολίζουμε με $P(\alpha)$ λέμε τον αριθμό που θα πάρουμε, αν στη θέση του x βάλουμε τον αριθμό α και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται.

Ίσα πολυώνυμα λέγονται τα πολυώνυμα τα οποία έχουν, όρους ίσα μονώνυμα.

Αναγωγή ομοίων όρων λέμε την εργασία κατά την οποία, αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, τότε μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους.

Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών.

ΑΣΗΣΕΙΣ

1) Να κάνετε τις αναγωγές των όμοιων όρων

i) $4x^2 - 3x^3 + 5x - 2x^2 + 7 - x - 2 + 3x^2 + 4x^3$

ii) $5x^4 - 3x^2 + 2x - 7x^4 - 3x^3 - 1 - 2x + 4 - 5x^2$

iii) $\alpha x^2 + 2x + 3\alpha x^2 - x + 5 - 4x$

iv) $2\alpha^3x - 6\alpha^2x^2 + 5\alpha^3x + \alpha^3 - 2\alpha^4 + x^4$

2) Αν $A = x^2-3x+1$, $B = -x^2+2x+5$ και $\Gamma = 2x^2-x-3$ να βρεθούν τα επόμενα αθροίσματα

i) $A + B$ **ii)** $A + B + \Gamma$ **iii)** $A - B - \Gamma$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

i) $3x^2 - [(5x^3-x) + 4x^2 - (2x^2+6)] + (-2x^2-5x)$

ii) $5\alpha^3 - (2\alpha^2+\alpha-3) + [-(3\alpha^2-2\alpha-4) + (-2+6\alpha)]$

4) Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $(2x-3) - [-2x - (x^2-2)] - \{x^2-[3x+4-(x^2-1)]\}$

ii) $3x^2-\{x^2-[x-(1-x^3)]+2x\}-\{2x^3 + [x+(x^2-3)-3x^2]-1\}-4$

Πολλαπλασισμός Πολυωνύμων

Πολλαπλασιασμός μονώνυμο με πολυώνυμο.

Στηρίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\,\gamma$$

Έτσι:

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

Πολλαπλασιασμός πολυώνυμο με πολυώνυμο

Στηρίζεται στην ιδιότητα:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)\,\gamma + (\alpha + \beta)\,\delta = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$$

Έτσι:

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Παρατήρηση:

Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ λέμε τον πραγματικό αριθμό ρ του οποίου η αριθμητική τιμή είναι 0, δηλ. όταν ισχύει $P(\rho) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $3x(x^2-1) - 4x^2(x+2) - 3x + 4(x^2-1)$

β) $-5x^2(x^3-2x^2+4) + (1-2x)(-4x^3) - x(x-1) - 2x$

γ) $2\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) - \beta^3 - (\alpha-\beta)(-3\alpha\beta) - 4\alpha^2\beta$

δ) $3[x^2-(x+4) - 3] - 2x^2[x + (x-2)] - 5$

ε) $2\alpha\{\alpha\beta - [\alpha^2-(-\alpha\beta+4)] + 2\} - 3(\alpha^2-2)$

2) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(3x+1)(2x-3)$

β) $(3x^2-2x+4)(2x-5)$

γ) $(x+2)(x-2)(x+5)$

δ) $(x+1)(x+2)(x+3)$

3) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\kappa-2)(1-\kappa)(2\kappa-3)$

β) $\mu(\mu-3)(4\mu+1)(2-\mu)$

γ) $(x-1)(2x-5)(x^2+5x-1)$

δ) $(\alpha+3)(2-\alpha)(\alpha^2-2\alpha-1)(4-\alpha^2)$

4) Να γίνουν οι πράξεις:

i) $(x-3)(1-x)+(x^2-x+2)(x-2+x^2)$

ii) $\alpha(\alpha+1)(2-\alpha)-(2\alpha^2+\alpha-3)(3-\alpha+2\alpha^2)$

5) Αν $\mathrm{A}=\alpha^2-\alpha+1$, $\mathrm{B}=\alpha+2$ και $\Gamma=\alpha-1$

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\cdot\Gamma$, $\mathrm{A}\cdot\Gamma$ και $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\mathrm{B}\cdot\Gamma-\Gamma\cdot\mathrm{A}$.

6) Αν $\mathrm{K}=4x-1$, $\Lambda=x-2$ και $\mathrm{M}=x^2+x-1$

$\mathrm{K}\cdot\Lambda$, $\Lambda\cdot\mathrm{M}$, $\mathrm{K}\cdot\mathrm{M}$ και $\mathrm{K}\cdot\Lambda-\mathrm{K}\cdot(\Lambda\cdot\mathrm{M}-\mathrm{K}\cdot\mathrm{M})$.

7) Να γίνουν οι πράξεις:

$$(x-2y)(4x-3y)-\left[(2x-5y)\left(2x-\frac{11}{3}y\right)-\left(\frac{37}{3}y^2-2xy\right)\right]$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να χαρακτηρίσετε ώς σωστές (Σ) ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

1) Αν $P(x) = 2x^2(x^4 - 1)$ τότε $P(-x) = P(x)$.

2) Το πολυώνυμο $P(x) = -2$ είναι μηδενικού βαθμού.

3) Το πολυώνυμο $P(x) = 0$ είναι μηδενικού βαθμού.

4) Το πολυώνυμο $P(x)$ και $P(2x)$ είναι ίδιου βαθμού.

5) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο $P^2(x)$ είναι $6^{ου}$ βαθμού.

6) Το πολυώνυμο $P(x) = 0 \cdot x^3 - 2x + 5$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

7) Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = (3x^2 - x)8(x^2 - 1) + x^{10} - 3$ είναι 18.

8) Αν δύο πολυώνυμα δεν έχουν βαθμό τότε είναι ίσα.

9) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού και το $Q(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ είναι $6^{ου}$ βαθμού.

10) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού και το $Q(x)$ είναι $4^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο $P(x) - Q(x)$ είναι $4^{ου}$ βαθμού.

11) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού και το $Q(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο $2P(x) - 4Q(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να κάνετε τις πράξεις

i. $3\alpha - 5\beta + 2\alpha - \beta$

ii. $\chi\sqrt{2} + \chi - 2 + 3\chi - 1$

iii. $\frac{1}{5}\chi^2\psi - \chi\psi + \chi\psi^2 - \frac{2}{3}\chi^2\psi - \frac{1}{2}\chi\psi^2 + \chi\psi + 1$

iv. $-\frac{\kappa}{2} - \frac{\lambda}{3} + 2\kappa - \lambda + \frac{\kappa}{3}$

v. $\chi^2 - \chi\psi - \psi\chi + \psi^2 - \chi^2$

vi. $2 - 3\chi + \chi^2 + 5\chi - 3 + 7\chi^2$

vii. $\alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3$

viii. $-(2\alpha - \beta) + (3\alpha - 4\beta) - \alpha - (1 - 3\beta) + 2$

ix. $1 + \chi + \chi^2 - (1 - \chi + \chi^2) - 2\chi$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-2(\chi - \psi)$

β) $3(-\chi + 2)$

γ) $-\frac{3}{2}(-2\chi + 6\psi)$

δ) $0{,}7(2\alpha + 3\beta)$

ε) $-\alpha(\beta - \alpha + 2)$

στ) $\chi(\chi^2 - 3 + \chi)$

ζ) $-\psi(\chi\psi - \psi + 6)$

η) $\chi\psi(\chi - \psi)$

θ) $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

ι) $-3\chi(\chi^3 - 2\chi + 5)$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(\chi + 2)(\chi + 3) - \chi(\chi + 5) - 5$

β) $(\chi - 1)(\chi + 4) + 6 - \chi(\chi + 3)$

γ) $(\chi - 4)(\chi - 5) + \chi(9 - \chi) - 17$

δ) $(2\chi + 3)(2\chi - 3) - 4(\chi^2 - \frac{13}{4})$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$

β) $-\alpha(3\alpha - 2\beta - 5) + (3\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 - 5(\alpha - 1)$

γ) $(2\kappa - 3\lambda)(4\kappa^2 + 6\kappa\lambda + 9\lambda^2) - 8\kappa^3 + 27\lambda^3 + 10$

δ) $(3\mu - 2\nu)(3\nu - 2\mu) - 6(\mu + \nu)(\mu + \nu) - \nu\mu + 15$

5) Να κάνετε τις πράξεις:
α) $(\chi - 1)(\chi - 2)(\chi + 1)(\chi + 2) - \chi^2(\chi^2 - 5) + 6$.
β) $(\chi^2 - 4\chi + 4)(\chi - 2) - \chi^3 + 108 + 6\chi(\chi-2)$
γ) $(\chi + 10)(\chi^2 + 20\chi + 100) - \chi^2(\chi + 30) - 300\chi$
δ) $(\chi + 1)(\chi^4 - \chi^3 + \chi^2 - \chi + 1) - \chi^5 + 10001$

6) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3\alpha x^3 + 2x^2 - x + 6x^3 - 2x + 8$
Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων
Να γραφεί κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του.
Για $\alpha = 0$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = -2$.

7) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x - 1$
Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) + 2P(-x) + P(2)$
Να βρείτε το πολυώνυμο $2P(x) - Q(x)$.

8) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 6$ και $Q(x) = (\lambda-1)x^3 + x^2 + \gamma$
Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων.
Να βρείτε το γ ώστε $P(0) - 1 = Q(0) + 7$.
Να βρείτε τους α, β, γ, λ ώστε τα δύο πολυώνυμα να είναι ίσα.

9) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 2\alpha \cdot x + 3$
Να βρείτε την τιμή του α ώστε $P(-2) = -1 - \alpha$.
Για $\alpha = -4$ να λύσετε την εξίσωση $P(0) + 4x - 2P(1) = 3x$

10) Δίνονται οι παραστάσεις : $A(x) = 3(x-2)^2 - 2(1-2x)(1+2x) - 8x^2 - 5(3-2x) + 4$ και
$B(x) = (x-2)^3 + x^2(5-x) + 9 - 12x$
Να αποδείξετε οτι : $A(\chi) = 3x^2 - 2x - 1$ και $B(x) = 1 - x^2$.

Να υπολογίσετε τα : $A(-\chi), A(2\chi), B(-\chi), B(-2\chi)$

11) Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = (3x+2)^2 - 5(x-2)^2 - 4(8x-3)$ και
$B(\chi) = (\chi - 1)(\chi + 1)(\chi - 2)$

Να δείξετε ότι $A(x) = 4x^2 - 4$ $\kappa\alpha\iota B(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 2\chi + 2$

Να υπολογιστούν :$A(-\chi), A(\chi^2), B(0), B(-\chi)$

Για ποιές τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\dfrac{A(x)}{B(x)}$

12) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = x(x+2)-(x+1)(x-1)-2(x-2)$,

$B = (2x-3)^2 - 2x(x-3) - 2(x^2-3x+5)$

Να αποδείξετε ότι $A = 5$ και $B = -1$.

13) Εστω η παράσταση $A=(2x-1)^2-2x(x-1)-5$

Να γίνουν οι πράξεις και να δείξετε ότι $A=2x^2-2x-4$

Να υπολογιστούν $A(-\chi), A(\chi^2), A(-\chi^2)$

14) Εστω το πολυωνυμο $P(x)=x^3+\beta x+\alpha$

Αν $P(0)=1$ να βρείτε το α

Αν $P(2)$ - $P(1)=5$ να βρείτε το β

Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να υπολογιστουν : $P(-x), P(-x^2)$

15) Δίνονται τα πολυώνυμα :

$A(\chi) = (\chi+3)^2 - 4\chi^2 - 3\chi$ και $B(\chi) = (2\chi-1)(2\chi+1) - 8(\chi+1) + 6$

α) Να βρεθούν τα αναπτύγματα των πολυωνύμων $A(\chi)$ και $B(\chi)$, να γίνουν οι αναγωγές ομοίων όρων και να γραφούν κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του χ.

β) Να αποδείξετε ότι $A(\chi)+B(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6$.

γ) Αν $\Gamma(\chi) = A(\chi) + B(\chi)$ είναι το 2 και το 3 ρίζες του πολωνύμου $\Gamma(\chi)$;

16) Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x) = (2x-1)^2 - (x-2)(x+2) + 2(x-3)$ και

$Q(x) = (2\alpha-\beta)x^2 + (\alpha+3\beta)x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι: $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$

β) Αν $P(x) = Q(x)$ να υπολογίσετε τα α και β .

17) Δίνεται η παράσταση: $A=(3x+1)^2+(x-3)^2-(3x-1)(3x+1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2 + 11$.

β) $B(\chi) = A(\chi) - 12\chi$ να εξετάσετε αν οι αριθμοί 1 και 11 είναι ρίζες του πολυωνύμου $B(\chi)$.

γ) Να υπολογιστούν $B(-\chi), B(\chi^2), B(-\chi^2)$