

Κείμενο με έγχρωμα, πλάγια γράμματα είναι αυξημένης δυσκολίας ή  
εγκυκλοπαιδικής φύσης και μπορεί να παραληφθεί σε μία πρώτη ανάγνωση.

## Κεφάλαιο 1- Καμπυλόγραμμες Κινήσεις

### Εισαγωγικά | Επανάληψη από Α' Λυκείου

Στην Α' Λυκείου μελετήσαμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα (Newton),  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  (όπου  $\sum \vec{F}$  το άθροισμα των δυνάμεων,  $m$  η μάζα και  $\vec{a}$  η επιτάχυνση) τόσο στη μία διάσταση ("στη γραμμή") όσο και στις δύο διαστάσεις ("στο επίπεδο"). Η κινηματική μας όμως, η μελέτη δηλαδή των κινήσεων που εκτελούν τα σώματα δεδομένης κάποιας δύναμης, περιορίστηκε στη μία διάσταση.

Ο λόγος ήταν ότι, όπως θα φανεί στη συνέχεια, κάθε κίνηση σε δύο διαστάσεις μπορεί να γίνει κατανοητή μέσω δύο επιμέρους κινήσεων σε μία διάσταση. Ήταν λοιπόν σημαντική η έμφαση που δόθηκε στην κίνηση σε μία διάσταση, ώστε να μπορούμε τώρα ευκολότερα να γενικεύσουμε.

Ας κάνουμε εδώ μία ανασκόπηση των εξισώσεων που θεωρούνται γνωστές από την Α' Λυκείου:

•

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Ο περίφημος 2ος νόμος του Νεύτωνα αφορά διανύσματα. Μπορούμε να τον αναλύουμε σε συνιστώσες ως εξής (π.χ. στο επίπεδο, αλλά εύκολα γενικεύουμε και σε περισσότερες διαστάσεις αν χρειαστεί):

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases}$$

•

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

Αυτή είναι η εξίσωση κίνησης για την Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (ΕΟΚ). Έχει λοιπόν ισχύ μόνο όταν η ταχύτητα  $v$  (από το Αγγλικό *velocity*- συχνά συμβολίζεται και με  $u$  χωρίς λόγο) είναι σταθερή, δηλαδή όταν η επιτάχυνση είναι μηδενική ή ισοδύναμα (από 2ο ν. Ν.) όταν δεν ασκούνται δυνάμεις στο σώμα, ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν.

•

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t, \quad v = v_0 + at$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις κίνησης στην Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα δεν είναι πλέον

σταθερή, άρα η εξίσωση της ΕΟΚ δεν ισχύει! Στην παρούσα μορφή τους, που είναι και αυτή που θα μας χρειαστεί, οι εξισώσεις περιλαμβάνουν το  $a$  το οποίο συμβολίζει την επιτάχυνση (*acceleration*). Εάν βάζαμε όπου  $a$  το  $-a$ , τότε θα μιλούσαμε για επιβραδυνόμενη κίνηση- το  $a$  θα συμβόλιζε λοιπόν την επιβράδυνση. Με αυτή τη σύμβαση, το  $a$  πάντα προκύπτει θετικό.

- Η ελεύθερη πτώση είναι μία επιταχυνόμενη κίνηση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον, και η εξίσωση κίνησης δίνει το χρόνο πτώσης:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας (η τιμή της στο σύστημα μονάδων SI είναι περίπου  $10 \frac{m}{s^2}$ ).

- Γενικώς, πρέπει να κρατάμε στο μυαλό μας την ιδέα της "ανάλυσης" διανυσματικών ποσοτήτων σε συνιστώσες. Για παράδειγμα η ταχύτητα ενός σώματος στο επίπεδο γράφεται:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

όπου η  $\vec{v}_x$  "κοιτάζει" στον άξονα  $x'$  (έχει τη διεύθυνση του άξονα αυτού) και η  $\vec{v}_y$  έχει τη διεύθυνση του άξονα  $y'$ .

<sup>1</sup> Ακριβέστερα,  $9,81 \frac{m}{s^2}$ . Ακόμα ακριβέστερα,  $9,807 \frac{m}{s^2}$ .

## 1.1 Οριζόντια βολή

Έστω ένα αντικείμενο που βρισκόταν αρχικά στην άκρη ενός τραπέζιου. Αν το εκτοξεύσουμε οριζόντια θα πέσει στο έδαφος, αλλά προφανώς σε διαφορετικό σημείο από εκείνο που θα έπεφτε εάν το αφήναμε να εκτελέσει ελεύθερη πτώση (βλ. Φυσική Α' Λυκείου). Η κίνηση που εκτελεί το αντικείμενο ονομάζεται **οριζόντια βολή**. Πιο "επίσημα", έχουμε τον εξής ορισμό:

**Ορισμός 1:** Η οριζόντια βολή είναι μία **σύνθετη κίνηση** που αποτελείται από δύο απλές κινήσεις, μία κατακόρυφη (ελεύθερη πτώση) και μία οριζόντια (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση- ΕΟΚ).

*Ο Ορισμός 1 υπονοεί ότι μπορούμε να περιγράψουμε μία δισδιάστατη κίνηση χωρίζοντάς τη στις μονοδιάστατες κινήσεις από τις οποίες αποτελείται. Γιατί όμως να ισχύει κάτι τέτοιο; Ξέρουμε μάλιστα παραδείγματα από τη Φύση όπου αυτό δεν ισχύει: η ένταση του ρεύματος που διαρρέει δύο αντιστάσεις δεν είναι πάντα το άθροισμα των επιμέρους εντάσεων- μόνο όταν είναι συνδεδεμένες σε σειρά! Αποδεικνύεται εν τέλει ότι η θέση ενός σωματιδίου, που περιγράφεται από το διάνυσμα  $\vec{x}$ , ικανοποιεί την **αρχή της επαλληλίας**, που εξασφαλίζει ακριβώς το ζητούμενο. Επειδή η ταχύτητα είναι απλώς ο ρυθμός μεταβολής της θέσης (και β επιτάχυνση της ταχύτητας αντίστοιχα), και αυτά τα μεγέθη ικανοποιούν την ίδια αρχή.*

Ας μελετήσουμε την οριζόντια βολή μέσω των εξισώσεων κίνησης: στον άξονα  $x'$  (εφεξής απλώς  $x$ ) έχουμε ΕΟΚ, άρα:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow x - x_0 = v_x \cdot t$$

Από την άλλη στον άξονα  $y'$  (εφεξής απλώς  $y$ ) έχουμε ελεύθερη πτώση, άρα:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{και} \quad v_y = -gt$$

όπου  $h$  θα συμβολίζουμε στο εξής το αρχικό ύψος. Συνήθως θα επιλέγουμε επίσης  $x_0 = 0$ . Τέλος το αρνητικό πρόσημο αφορά τη σύμβαση ότι ο κατακόρυφος άξονας παίρνει μεγαλύτερες τιμές προς τα πάνω.

**Πρόταση 1:** Ο **χρόνος πτώσης**, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται ένα σώμα που εκτελεί Οριζόντια Βολή για να φτάσει στο έδαφος ( $y = 0$ ) είναι ίδιος με αυτόν που θα χρειαζόταν εάν έκανε ελεύθερη πτώση, δηλαδή:

$$t_{\text{πτώσης}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1)$$

**Απόδειξη:** Θέτοντας  $y = 0$  στην εξίσωση κίνησης έχουμε  $h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$ . Λύνοντας ως προς  $t$  (πολλαπλασιάζοντας δηλαδή με 2 και διαιρώντας με  $g$ , και έπειτα "ριζώνοντας") προκύπτει το ζητούμενο.

**Ορισμός 2:** Το **βεληνεκές** του σώματος ορίζεται ως η οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα μέχρι να φτάσει στο έδαφος και ισούται με:

$$S = v_0 \cdot t_{\text{πτώσης}} \Rightarrow S = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

**Πρόταση 2:** Το μέτρο της ταχύτητας είναι (σε κάθε χρονική στιγμή):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3)$$

Προφανώς λοιπόν είναι ίσο με  $v_x$  τη στιγμή της βολής (αφού αυτή είναι οριζόντια) και αυξάνεται μέχρι τη στιγμή που το σώμα πέφτει στο έδαφος. Η δε γωνία υπό την οποία το σώμα πέφτει στο έδαφος είναι ίση με:

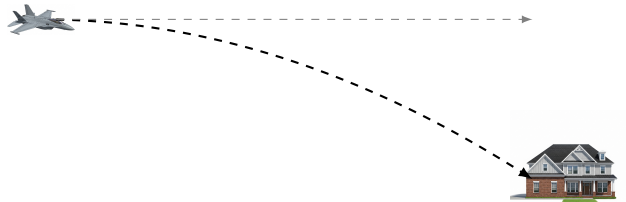
$$\varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{v_y}{v_x} \quad (4)$$

Εύκολα φαίνεται ότι  $\varphi = 0$  αρχικά, όπως άλλωστε αναμέναμε.

### Παράδειγμα: Βομβαρδιστικό αεροπλάνο

Θα παρουσιάσουμε μία υποδειγματική (;) λύση ενός από τα πιο διαδεδομένα παραδείγματα οριζόντιας βολής: η κίνηση που εκτελεί μία βόμβα που αφήνεται από ένα αεροπλάνο.

Ας θεωρήσουμε το αεροπλάνο του σχήματος, που πετά σε ύψος  $500\text{ m}$  με ταχύτητα  $300\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



- α) Από ποιο σημείο πρέπει να αφήσει τη βόμβα για να πετύχει το σπίτι;
- β) Πού θα βρίσκεται το αεροπλάνο όταν η βόμβα φτάσει στο στόχο της;
- γ) Με τι ταχύτητα φτάνει η βόμβα στο σπίτι;

**Λύση:** α) Η βόμβα εκτελεί οριζόντια βολή, την οποία μπορούμε να αναλύσουμε στις επιμέρους κινήσεις: ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα ( $y$ ) και ΕΟΚ στον οριζόντιο ( $x$ ). Η βόμβα φτάνει στο σπίτι (άρα στο  $y = 0$ ) στο χρόνο πτώσης  $t_{\pi\tau}$ , που βρίσκουμε ως εξής:

$$y = 0 \Rightarrow h - \frac{1}{2}gt_{\pi\tau}^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_{\pi\tau}^2 \Rightarrow gt_{\pi\tau}^2 = 2h \Rightarrow t_{\pi\tau}^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500\text{ m}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \Rightarrow t_{\pi\tau} = 10\text{ s}$$

Με δεδομένο τώρα το χρόνο πτώσης μπορούμε να υπολογίσουμε το βεληνεκές, δηλαδή την οριζόντια απόσταση που πρέπει να απέχει το αεροπλάνο από το σπίτι προκειμένου η βόμβα να καταλήξει ακριβώς επάνω του:

$$S = v \cdot t_{\pi\tau} = 300\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\text{ s} \Rightarrow \boxed{S = 3000\text{ m}}$$

β) Αφού το αεροπλάνο εκτελεί ΕΟΚ στον άξονα  $x$  έχει σταθερό ύψος  $y = 500\text{ m}$  και κινείται με την ίδια οριζόντια ταχύτητα με τη βόμβα. Βρίσκεται λοιπόν συνεχώς (άρα και όταν αυτή φτάνει στο στόχο της) κατακόρυφα από πάνω της.

γ) Όταν μας ζητείται να προσδιορίσουμε ένα διάνυσμα, όπως η ταχύτητα, ζητούνται στην πραγματικότητα δύο πληροφορίες: το μέτρο και η κατεύθυνσή του. Αποτελεί σύνηθες λάθος για βιαστικούς μαθητές να ξεχνούν το δεύτερο, οπότε ας ξεκινήσουμε με αυτό. Γνωρίζουμε ότι η γωνία  $\varphi$  ως προς την οποία η βόμβα φτάνει στο έδαφος ικανοποιεί  $\varphi(\varphi) = \frac{v_y}{v_x}$ . Η  $v_y$ , δε, δίνεται από την δεύτερη εξίσωση κίνησης στον άξονα  $y$  (που ως τώρα δεν είχαμε χρησιμοποιήσει):

$$v_y = -gt$$

Αφού μας ενδιαφέρει η στιγμή της πτώσης, θέτουμε  $t = t_{\pi\tau}$  στην εξίσωση αυτή. Αντικαθιστώντας παίρνουμε  $v_y = -100\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Το αρνητικό πρόσημο περιγράφει φυσικά το γεγονός ότι η ταχύτητα έχει φορά προς τα κάτω (προς τα αρνητικά  $y$ ). Αντικαθιστώντας στη σχέση  $\varphi(\varphi) = \frac{v_y}{v_x}$  έχουμε  $\boxed{\varphi(\varphi) = \frac{1}{3}}$ . Αυτή η απάντηση είναι επαρκής, ωστόσο με μία αριθμομηχανή ή άλλες, πιο ενδιαφέρουσες μεθόδους μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\boxed{\varphi \approx 18^\circ}$$

Όσο για το μέτρο, έχουμε:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v = \sqrt{300^2 + 100^2} \Rightarrow v = \sqrt{100(1^2 + 3^2)} \Rightarrow v = 10\sqrt{1 + 9} \Rightarrow \boxed{v = 10\sqrt{10}}$$

## 1.2 Ομαλή Κυκλική Κίνηση

**Ορισμός 3:** Ένα κινητό εκτελεί Κυκλική Κίνηση όταν η τροχιά που διαγράφει είναι περιφέρεια κύκλου (*wow*). **Ομαλή Κυκλική Κίνηση** είναι η απλούστερη κυκλική κίνηση και ορίζεται ως αυτή στην οποία η ταχύτητα του κινητού έχει σταθερό μέτρο.

**Ορισμός 4:** Η **συχνότητα** μίας κυκλικής κίνησης ορίζεται ως ο αριθμός των πλήρων περιφορών που εκτελεί το κινητό στη μονάδα του χρόνου ( $\frac{N}{t}$ ) και συμβολίζεται με  $f$ , από το Αγγλικό *frequency*<sup>23</sup>. Για παράδειγμα, ένα κινητό που σε χρόνο ίσο με  $2\text{ s}$  εκτελεί  $N = 5$  περιφορές έχει συχνότητα  $f = \frac{N}{t} = \frac{5}{2}\text{ Hz}$  ή  $2,5\text{ Hz}$ .

**Ορισμός 5:** **Περίοδος** της κυκλικής κίνησης ονομάζεται ο χρόνος που απαιτεί το κινητό για να εκτελέσει μία πλήρη περιφορά. Συμβολίζεται με  $T$ .

*Υπενθυμίζεται ότι η κυκλική κίνηση αποτελεί περιοδική κίνηση. Μία άλλη κατηγορία περιοδικών κινήσεων που είχαμε γνωρίσει στο Γυμνάσιο είναι οι ταλαντώσεις. Μία πληρέστερη ανάλυσή τους θα κάνουν οι μαθητές του 2ου Επιστημονικού Πεδίου (Τεχνολογικών και Θετικών Σπουδών).*

**Πρόταση 3:** Η περίοδος και η συχνότητα συνδέονται μέσω της σχέσης:

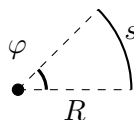
$$f = \frac{1}{T} \quad (5)$$

**Απόδειξη:** Εξ ορισμού η περίοδος είναι αυτός ο χρόνος στον οποίο πραγματοποιείται  $N = 1$  περιφορά. Αντικαθιστώντας  $N = 1$  και  $t = T$  στον ορισμό της συχνότητας παίρνουμε το ζητούμενο.

### Μία γεωμετρική υπενθύμιση, η γραμμική & η γωνιακή ταχύτητα

Ένα τμήμα περιφέρειας κύκλου λέγεται **τόξο** (και έχει, προφανώς, μονάδες μήκους). Έστω ένας κύκλος ακτίνας  $R$  και μία γωνία  $\varphi$ , η οποία βαίνει σε τόξο του, μήκους  $s$ . Από τη Γεωμετρία είναι γνωστό ότι τα μεγέθη  $R$ ,  $\varphi$  και  $s$  συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$s = R \cdot \varphi$$



**Ορισμός 6:** Η **γραμμική ταχύτητα** ενός σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση ορίζεται ως:

$$v = \frac{s}{t}$$

Στην Ομαλή Κυκλική Κίνηση η γραμμική ταχύτητα είναι σταθερή, άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $t$  με όποιο χρονικό διάστημα θέλουμε, βάζοντας την αντίστοιχη τιμή του  $s$ . Βολεύει φυσικά να θεωρήσουμε το χρονικό διάστημα μίας περιόδου. Έτσι έχουμε:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (6)$$

<sup>23</sup>Υπενθυμίζεται ότι η μονάδα μέτρησης της συχνότητας, το  $1\text{ Hz}$  ("Χερτζ") ισούται μαθηματικά με  $\frac{1}{\text{s}}$ .

<sup>3</sup>Είναι σημαντικό να συμβολίζουμε τη συχνότητα με πεζό  $f$  για να μην υπάρξει σύγχυση με το κεφαλαίο  $F$  που φυσικά συμβολίζει τη δύναμη (*force*).

Η γραμμική ταχύτητα είναι χρήσιμη, όμως έχει την "άκομψη" ιδιότητα να εξαρτάται από την ακτίνα της κυκλικής κίνησης. Χρειαζόμαστε ένα μέγεθος το οποίο να αφορά, όχι το πόσο μήκος διανύει το κινητό μας στη μονάδα του χρόνου, αλλά τη *γωνία* που διαγράφει η *επιβατική ακτίνα*. Το μέγεθος αυτό έχει μονάδες γωνίας (αδιάστατης) ανά χρόνο, δηλαδή μονάδες  $\frac{1}{s}$  στο σύστημα SI. Καταχρηστικά όμως θα το ονομάσουμε *γωνιακή ταχύτητα*.

**Ορισμός 7:** Η *γωνιακή ταχύτητα* ενός κινητού συμβολίζεται με  $\omega$  και έχει μέτρο:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Στην πραγματικότητα η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, οπότε ο πλήρης συμβολισμός είναι  $\vec{\omega}$ . Η διεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο της κίνησης. Η φορά καθορίζεται με τον "**κανόνα του δεξιού χεριού**", αλλιώς γνωστό ως "κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία": με τα 4 (πλην του αντίχειρα) δάκτυλα του δεξιού χεριού μας μιμούμαστε τη φορά της κυκλικής κίνησης (αντιωρολογιακή ή ωρολογιακή αντίστοιχα). Ο αντίχειράς μας δείχνει τη φορά της γωνιακής ταχύτητας (αν έχουμε εφαρμόσει τον κανόνα σωστά, θα είναι προς τα πάνω για αντιωρολογιακή φορά και προς τα κάτω για ωρολογιακή).

Μία τελευταία εξίσωση λοιπόν, ίσως η πιο χρήσιμη από όλες, προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι στην εξίσωση (6) έχει εμφανιστεί η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$v = \omega \cdot R \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) συσχετίζει επιτέλους τις δύο ταχύτητες μεταξύ τους, ενώ "εδραιώνει" την "κυριαρχία" μας στην κυκλική κίνηση: γνωρίζοντας πλέον δύο από τα μεγέθη  $v$ ,  $R$  και  $\omega$  (ή, ισοδύναμα,  $f$ , ή ακόμα και  $T$ ) μπορούμε να προσδιορίσουμε τα υπόλοιπα. Εάν, δε, γνωρίζουμε τη φορά της κυκλικής κίνησης μπορούμε να προσδιορίσουμε και την κατεύθυνση της  $\omega$ , και αντίστροφα, με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

### 1.3 Κεντρομόλος δύναμη

Όσα προαναφέραμε (*καθώς και οτιδήποτε άλλο στην κλασική μηχανική*) οφείλουν να είναι συμβατά με τους νόμους του Νεύτωνα. Εν προκειμένω έχει ενδιαφέρον να σκεφτούμε το εξής: ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες, όμως εδώ δεν εξυπηρετεί η ανάλυση σε  $x$  και  $y$  άξονες αλλά σε έναν άξονα *στη διεύθυνση της κυκλικής κίνησης και έναν κάθετα σε αυτήν*. Η γραμμική ταχύτητα (προφανώς στη διεύθυνση της κίνησης) είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων σε αυτόν τον άξονα είναι μηδέν και, αφού δεν υπάρχει λόγος να υποθέσουμε κάποιο μυστηριώδες ζεύγος δυνάμεων που αλληλοαναιρούνται, αυτό σημαίνει ότι απλούστατα δεν υπάρχει δύναμη στον άξονα αυτό. Ξέρουμε όμως ότι, αν δεν υπήρχε γενικώς καμία δύναμη, το σωματίδιο θα έκανε ΕΟΚ (απο πρώτο νόμο Νεύτωνα). Πρέπει επομένως να υπάρχει κάποια δύναμη κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης, δηλαδή *προς το κέντρο* του κύκλου που διαγράφει το σωματίδιο. Η δύναμη αυτή λέγεται **κεντρομόλος δύναμη**. Πιο κομψά μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 8:** Κάθε δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση λέγεται **κεντρομόλος δύναμη**.

Καλά όλα αυτά, αλλά χρειαζόμαστε έναν τύπο για την κεντρομόλο, μία μαθηματική έκφραση για να μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις εξισώσεις μας.

**Πρόταση 4:** Ο τύπος της κεντρομόλου δύναμης είναι:

$$F_{\kappa} = m \frac{v^2}{R} \quad (8)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε την κεντρομόλο δύναμη ως

$$F_{\kappa} = m a_{\kappa}, \quad \text{όπου} \quad a_{\kappa} = \frac{v^2}{R} : \text{κεντρομόλος επιτάχυνση.} \quad (9)$$

### Παράδειγμα: Πέτρα δεμένη σε σχοινί

Έστω μία πέτρα μάζας  $m = 0,1 \text{ kg}$ , την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε σημειακό σώματιο, δεμένη στο άκρο αβαρούς νήματος (λεπτού σχοινοῦ). Η πέτρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας  $R = 0,5 \text{ m}$  και η κεντρομόλος δύναμη είναι  $F_k = 5 \text{ N}$ . Να βρεθούν: η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα, η περίοδος και η συχνότητα της κυκλικής κίνησης. Τι θα συμβεί αν κόψουμε ακαριαία το νήμα;

**Λύση:** Από τη σχέση της κεντρομόλου δύναμης, (8),  $v = \sqrt{\frac{F_k R}{m}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 0,5}{0,1}} = \sqrt{25} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Από τη σχέση  $v = \omega \cdot R$ ,  $\omega = \frac{v}{R} = 10 \text{ rad/s}$ . Από  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$ .

### Ασκήσεις

**1.1)** Επανάληψη από Α' Λυκείου: Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα  $y(t)$ ,  $v(t)$  και  $a(t)$  για σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση από αρχικό ύψος  $h = 20 \text{ m}$ .

**1.2)** α. Κατανόηση της κινηματικής στο επίπεδο: Ένα σώμα έχει αρχικά ταχύτητα  $v_x = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  στη διεύθυνση του άξονα  $x$  και  $v_y = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  στη διεύθυνση του άξονα  $y$ . Δε δέχεται καμία δύναμη. Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης.

β. Η αρχική θέση του σώματος είναι  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Να σημειωθεί σε διάγραμμα με οριζόντιο άξονα τον  $x$  και κατακόρυφο τον  $y$  η θέση του σώματος, αρχικά, και σε χρόνο  $t = 1 \text{ s}$ .

**1.3)** Θέμα 16039 Τράπεζας Θεμάτων: Δύο σώματα  $A$  και  $B$  εκτοξεύονται ταυτόχρονα και οριζόντια από σημεία που απέχουν από το έδαφος ύψη  $h$  και  $9h$  αντίστοιχα. Επιλέξτε τη σωστή από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την επιλογή σας.

i. Το σώμα  $A$  φτάνει στο έδαφος σε τριπλάσιο χρόνο από το σώμα  $B$ .

ii. Το σώμα  $B$  φτάνει στο έδαφος σε τριπλάσιο χρόνο από το σώμα  $A$ .

iii. Τα σώματα φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

**1.4)** Θέμα 20108 Τράπεζας Θεμάτων: Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από ύψος  $H = 125 \text{ m}$  σε σχέση με το έδαφος, με αρχική ταχύτητα  $v_0$ . Να προσδιορίσετε:

a. το χρόνο που χρειάστηκε για να φθάσει στο έδαφος.

b. το μέτρο της ταχύτητας  $v_0$  με την οποία εκτοξεύτηκε, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η οριζόντια απόσταση που διήνυσε μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι  $S = 50 \text{ m}$ .

c. το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος.

d. τη χρονική στιγμή  $t_1$  κατά την οποία το σώμα περνά από σημείο που βρίσκεται σε ύψος  $h_1 = 25 \text{ m}$  από το έδαφος.

Δίνεται η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας,  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**1.5)** Κανόνι: Να βρεθεί το βεληγεκές κανονιού που βάλει οριζόντια (με αρχική ταχύτητα  $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) κανονόμπαλες από αρχικό ύψος  $h = 25 \text{ m}$ . Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Πώς επηρεάζει η μάζα της κανονόμπαλας;

**1.6)** Θέμα 19651 Τράπεζας Θεμάτων (παράλλαγμένο): Σώματα εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2 = \frac{R_1}{3}$  αντίστοιχα. Οι συχνότητες περιστροφής τους συνδέονται από τη σχέση:  $f_2 = 9f_1$ . Ποια είναι η σχέση μεταξύ των γραμμικών ταχυτήτων τους;

1.7) Δεν αποδείξαμε τον τύπο της κεντρομόλου δύναμης, καθώς η ακριβής απόδειξη είναι αρκετά δύσκολη και απαιτεί ανώτερα μαθηματικά εργαλεία. Μπορούμε όμως να βεβαιωνούμε ότι είναι τουλάχιστον λογικός: επιβεβαιώστε ότι η ποσότητα  $m \frac{v^2}{R}$  έχει μονάδες δύναμης.

1.8) *Περιστροφή της Γης*: Αποδείξτε ότι ο τύπος της κεντρομόλου δύναμης μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη μορφή:

$$F_{\kappa} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

και στη συνέχεια στην (επίσης ισοδύναμη) μορφή:

$$F_{\kappa} = 4\pi^2 m \frac{R}{T^2}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία αυτή μορφή, υπολογίστε την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται ένας άνθρωπος μάζας  $m = 80 \text{ kg}$  λόγω της περιστροφής της Γης. Δίνεται η ακτίνα της Γης (και άρα της κυκλικής κίνησης του ανθρώπου, αν θεωρήσουμε ότι βρίσκεται στον Ισημερινό):  $R \approx 6000 \text{ km}$ . Συγκρίνετε με το βάρος του.

1.9) *Συνδυαστικό πρόβλημα*: Ένα σημειακό σωματίο μάζας  $m = 1 \text{ kg}$  εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο αβαρούς, μη εκτατού νήματος μήκους  $\ell = 20 \text{ cm}$ . Το επίπεδο της κυκλικής κίνησης απέχει ύψος  $h = 20 \text{ m}$  από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το νήμα κόβεται ακαριαία.

α) Τι κίνηση θα εκτελέσει το σωματίο και γιατί;

β) Αν η τάση του νήματος είχε μέτρο  $T = 5 \text{ N}$ , να βρεθεί η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα του σωματίου κατά τη διάρκεια της κυκλικής του κίνησης. Να βρεθούν επίσης η συχνότητα και η περίοδος της.

γ) Σε πόσο χρόνο φτάνει το σωματίο στο έδαφος; Ποια η οριζόντια απόστασή του από το σημείο που ξεκίνησε,  $S$ ;

## Τυπολόγιο

Οι τύποι που εμφανίζονται έγχρωμοι πρέπει να αποδεικνύονται.

$$\text{Οριζόντια βολή: } \Delta x = v_0 \cdot t, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad g \approx 10 \frac{m}{s^2}, \quad t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_{\pi\tau} = \sqrt{2gh}, \quad S = v_0 \cdot t_{\pi\tau},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\text{Κυκλική κίνηση: } v = \frac{s}{t}, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}, \quad v = \omega \cdot R, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f, \quad F_{\kappa} = ma_{\kappa}, \quad a_{\kappa} = \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Γενικά: } \eta\mu 0^\circ = 0, \quad \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0, \quad \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1, \quad \varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}, \quad \sigma\varphi\chi = \frac{1}{\varepsilon\varphi\chi}, \quad \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$$