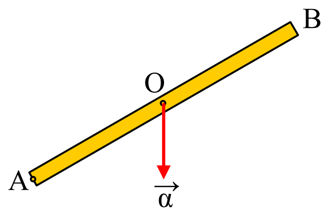
Επιτάχυνση κέντρου μάζας και δύναμη από τον άξονα περιστροφής.

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Σε μια στιγμή διέρχεται από τη θέση που φαίνεται στο σχήμα και τη στιγμή αυτή το κέντρο μάζας Ο έχει κατακόρυφη επιτάχυνση μέτρου $7{,}5 m/s^2$ με φορά προς τα κάτω.



i) Να βρεθεί η επιτάχυνση (μέτρο και κατεύθυνση) του άκρου Β στη θέση αυτή.

ii) Να αποδειχθεί ότι η μοναδική ροπή που ασκείται στη ράβδο είναι αυτή του βάρους.

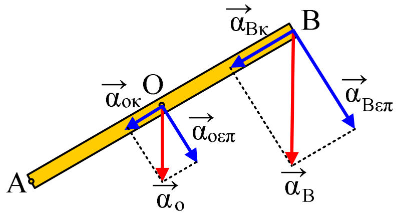
iii) Αν η μοναδική δύναμη, εκτός του βάρους, που ασκείται στη ράβδο είναι η δύναμη του άξονα περιστροφής, να αποδείξτε ότι αυτή είναι κατακόρυφη και έχει μέτρο ίσο με το ¼ του βάρους της ράβδου.

iv) Αν το μήκος της ράβδου είναι 2m και στη θέση αυτή σχηματίζει γωνία με ημθ=0,3 με την οριζόντια διεύθυνση, να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= 1/3\ m\ell^2$ και $g=10 m/s^2$.

Απάντηση:

i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο (του μέσου της ράβδου) μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες. Μια κατά μήκος της ράβδου $\alpha_{οκ}$ η οποία είναι η κεντρομόλος και μια κάθετη στη ράβδο $\alpha_{οεπ}$, η επιτρόχιος επιτάχυνση του Ο. Υπενθυμίζεται ότι το σημείο Ο εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Α και ακτίνας $\ell/2$, όπου ℓ το μήκος της ράβδου.



Για τις συνιστώσες αυτές έχουμε:

$$\alpha_{οκ}= \upsilon_o^2/R = \omega^2\cdot \ell/2 \text{ και}$$

$$\alpha_{οεπ}= \alpha_{γων}\cdot R = \alpha_{γων}\cdot \ell/2$$

όπου $\alpha_{γων}$ η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι και το σημείο Β έχει επίσης

$$\alpha_{B\kappa} = \omega^2 \cdot R' = \omega^2 \cdot \ell = 2\,\alpha_{o\kappa}$$

και

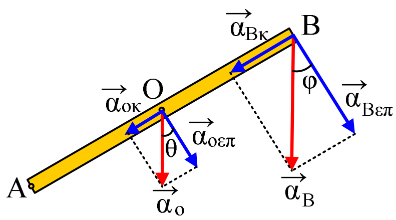
$$\alpha_{B\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell = 2\,\alpha_{o\varepsilon\pi}$$

όπως στο παραπάνω σχήμα.

Άρα το σημείο Β έχει επιτάχυνση:

$$a_B = \sqrt{a_{B\kappa}^2 + a_{B\varepsilon\pi}^2} = \sqrt{4a_{ok}^2 + 4a_{o\varepsilon\pi}^2} = 2a_o = 15m/s^2$$

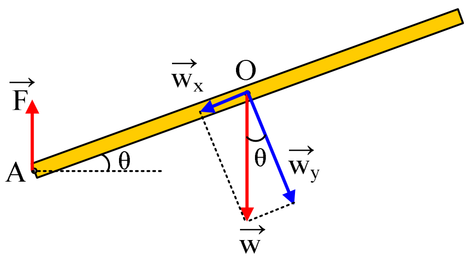
Για την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του σημείου Β έχουμε:



$$\varepsilon\phi\phi = \frac{a_{Bk}}{a_{B\varepsilon\pi}} = \frac{2a_{ok}}{2a_{o\varepsilon\pi}} = \varepsilon\phi\theta$$

συνεπώς και η επιτάχυνση του άκρου Β είναι κατακόρυφη.

ii) Έστω ότι εκτός της ροπής του βάρους ασκείται στη ράβδο και μια άλλη ροπή τ.



Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου παίρνουμε, (θετικές οι δεξιόστροφες ροπές):

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau_w + \tau_F + \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$w_y \cdot \ell/2 + 0 + \tau = 1/3\, m\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \ell/2 + \tau = 1/3\, m\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau = m\ell(\, 1/3\, \ell \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} - g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta/2) \quad (1)$$

Αλλά $\ell \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \cdot \alpha_{o\varepsilon\pi} = 2 \cdot \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ και η (1) γίνεται:

$$\tau = m\ell(\, 2/3\, \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta/2) = m\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(2/3\alpha - g/2)$$

και με αντικατάσταση

$$\tau = m\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(2/3 \cdot 7{,}5 - 10/2) = 0$$

iii) Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \rightarrow$$

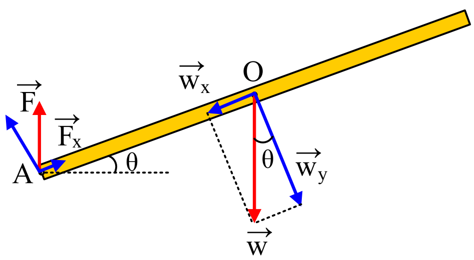
$$\vec{w} + \vec{F} = m\,\vec{a}_{cm} \quad (2)$$

Το βάρος όμως, όπως και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι κατακόρυφα, συνεπώς και η δύναμη από τον άξονα είναι επίσης κατακόρυφη και η (2) δίνει:

$F=m(\alpha_{cm}-g) = m(7{,}5m/s^2-10m/s^2) = -2{,}5m = -\frac{1}{4}\, mg$

Όπου το (-) δηλώνει ότι έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

iv) Αναλύουμε τη δύναμη F του άξονα σε δύο συνιστώσες, μια κατά μήκος της ράβδου F_x και μια σε κάθετη διεύθυνση, όπως στο σχήμα.



$$\Sigma F_R = m\upsilon^2/R \text{ ή}$$

$$w_x - F_x = m\omega^2 \cdot R \text{ ή}$$

$$mg\cdot\eta\mu\theta - F\cdot\eta\mu\theta = m\omega^2\cdot \ell/2 \text{ ή}$$

$$\tfrac{3}{4}\, mg\cdot\eta\mu\theta = m\omega^2\cdot \ell/2 \text{ ή}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\,\eta\mu\theta}{2l}}$$

και με αντικατάσταση ω=1,5 rad/s.

dmargaris@sch.gr